ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 2, с. 150–163

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.93

ОБ ОДНОМ ТИПЕ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ТРЁХПОЗИЦИОННЫМ ГИСТЕРЕЗИСНЫМ РЕЛЕ И ВОЗМУЩЕНИЕМ

© 2023 г. В. В. Евстафьева, А. М. Камачкин, Д. К. Потапов

Рассматривается обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка с трёхпозиционной гистерезисной релейной характеристикой и периодической функцией возмущения. Доказана теорема существования колебательного решения с полным обходом характеристики с возможным выходом в зоны её насыщения за некоторое конечное время и с замкнутой фазовой траекторией произвольной формы. Установлены достаточные условия существования периодических решений с произвольной и симметричной фазовыми траекториями, а также условия несуществования периодического решения с симметричной фазовой траекторией. Приведены численные примеры.

DOI: 10.31857/S0374064123020024, EDN: PTOKGL

Введение. Математические модели в ряде прикладных задач сводятся к обыкновенным дифференциальным уравнениям второго порядка с разрывными правыми частями. Из последних работ по исследованию таких уравнений отметим статьи [1–14]. Разрывные правые части уравнений содержат так называемые "существенные нелинейности" [15, с. 45], которые являются математическими описаниями, например, таких физических эффектов как кулоновское сухое трение или реле. Дифференциальные уравнения с существенными нелинейностями релейного типа описывают нелинейные колебания и изучаются в задачах теории автоматического управления. Вопросы существования колебательных, в том числе периодических, решений дифференциальных уравнений и систем с релейными характеристиками до сих пор вызывают интерес (см. [16–30]).

В данной статье рассматривается обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка с существенной нелинейностью типа реле и возмущением, изучение которого было начато авторами в работах [23, 30]. Несмотря на невысокий порядок уравнения, его полное и детальное аналитическое исследование затрудняет разрывная правая часть, приводящая к сложной динамике и многообразию возможных колебательных решений.

1. Постановка задачи. Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка
$$\ddot{y}(t) = \lambda\dot{y}(t) + \alpha N(y(t)) + \beta\cos(\omega t + \varphi). \tag{1}$$
Здесь t – время ($t \geqslant 0$), λ, α, β, ω и φ – ненулевые вещественные постоянные, нелинейность $N(y(t))$ является существенной и задаётся характеристикой трёхпозиционного реле с гистерезисом следующим образом:
$$N(y) = \begin{cases} -C, & \text{если } y \leqslant -B \text{ или } -B < y \leqslant -A \text{ и } N_-(y) = -C, \\ 0, & \text{если } -A < y < A \text{ или } -B < y < B \text{ и } N_-(y) = 0, \\ C, & \text{если } y \geqslant B \text{ или } A \leqslant y < B \text{ и } N_-(y) = C, \end{cases} \tag{2}$$
где A, B и C – параметры, такие что $0 < A < B$ и $C > 0$, $N_-(y)$ – предыстория $N(y)$ (ввиду её неоднозначности). Характеристика (2) включает три типовые нелинейности, а именно насыщение, мёртвую зону и гистерезис. Интервалы $(-\infty, -B]$ и $[B, +\infty)$ соответствуют

зонам насыщения, $(-A, A)$ – мёртвой зоне, $(-B, -A]$ и $[A, B)$ – зонам неоднозначности (гистерезису). Обе петли гистерезиса обходятся против хода часовой стрелки, что соответствует положительному гистерезису. Для обеспечения отрицательной обратной связи полагаем $\alpha < 0$.

В статьях [23, 30] изучен вопрос существования у уравнения (1) периодических режимов с заданными периодами, выходом в зоны насыщения характеристики $N(y)$ и фазовыми траекториями, имеющими две симметричные точки, одна из которых удовлетворяет условию $y_{\max} > B$ ($y_{\max}$ – максимальное значение решения $y(t)$).

В данной работе рассматриваются колебательные, в том числе периодические, решения уравнения (1) с полным обходом (в обе стороны) характеристики $N(y)$ с возможным выходом в зоны её насыщения, т.е. допускается выполнение неравенства $|y(t)| > B$ за произвольное и заданное время, а также с произвольными и определёнными по расположению на фазовой плоскости траекториями.

Общее решение уравнения (1) и его производная для любого $t \geqslant 0$ имеют вид

$$y(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 + qt + q_1 \cos(\omega t + \varphi) + q_2 \sin(\omega t + \varphi),$$

$$\dot{y}(t) = \lambda c_1 e^{\lambda t} + q - \omega q_1 \sin(\omega t + \varphi) + \omega q_2 \cos(\omega t + \varphi),$$

где

$$q = \begin{cases} q^-, & \text{если } N(y) = -C, \\ 0, & \text{если } N(y) = 0, \\ q^+, & \text{если } N(y) = C, \end{cases}$$

$q^- = -q^+ = \alpha C/\lambda$, $q_1 = -\beta/(\lambda^2 + \omega^2)$, $q_2 = q_1 \lambda/\omega$, c_1 и c_2 – произвольные постоянные, которые, на самом деле, могут иметь разрывы в точках разрыва нелинейности $N(y(t))$.

Рассмотрим колебательное решение в классе непрерывных функций $y(t)$ для любого $t \geqslant 0$ с полным обходом характеристики $N(y)$ (с возможным выходом в зоны её насыщения) за время T_r и с замкнутой фазовой траекторией, которая проходит через четыре фиксированные точки, лежащие на прямых $y = \pm A$ и $y = \pm B$. Куски траектории между этими прямыми на плоскости $(y, \dot{y})$ соответствуют различным участкам $N(y)$ на плоскости $(y, N(y))$. В полный обход характеристики вовлечены четыре таких участка. Поэтому фазовая траектория, отвечающая одному полному обходу, состоит из четырёх кусков, которые склеиваются в соответствии с методом припасовывания для обеспечения непрерывности $y(t)$ и замкнутости траектории.

Обозначим порядковый номер обхода характеристики через p, а прямые $y = B$, $y = A$, $y = -B$ и $y = -A$ через L_1, L_2, L_3 и L_4 соответственно. Далее рассматриваемому колебательному решению дадим

Определение. Решение $y(t)$ уравнения (1) назовём *T_r-колебательным решением при полном обходе характеристики $N(y)$ с возможным выходом в зоны насыщения*, если существуют положительные числа τ_i $(i = \overline{1,4})$ такие, что выполняется равенство $\sum_{i=1}^4 \tau_i = T_r$, и точки Y^i на фазовой плоскости, которые удовлетворяют следующим условиям:

1) $Y^1 = (y(t_0 + (p-1)T_r), \dot{y}(t_0 + (p-1)T_r)) \in L_1$,

$Y^2 = (y(\tau_1 + t_0 + (p-1)T_r), \dot{y}(\tau_1 + t_0 + (p-1)T_r)) \in L_2$,

$Y^3 = (y(\tau_1 + \tau_2 + t_0 + (p-1)T_r), \dot{y}(\tau_1 + \tau_2 + t_0 + (p-1)T_r)) \in L_3$,

$Y^4 = (y(\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + t_0 + (p-1)T_r), \dot{y}(\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + t_0 + (p-1)T_r)) \in L_4$,

где $t_0 \geqslant 0$ – начальный момент времени, $p \in \mathbb{N}$;

2) для всех $p \in \mathbb{N}$ и

любого $t \in [t_0 + (p-1)T_r, \tau_1 + t_0 + (p-1)T_r]$ выполняется равенство $q = q^+$,

любого $t \in (\tau_1 + t_0 + (p-1)T_r, \tau_1 + \tau_2 + t_0 + (p-1)T_r) \bigcup (\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + t_0 + (p-1)T_r, t_0 + pT_r)$ выполняется равенство $q = 0$,

любого $t \in [\tau_1 + \tau_2 + t_0 + (p-1)T_r, \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + t_0 + (p-1)T_r]$ выполняется равенство $q = q^-$.

На прямой L_i в точке Y^i $(i = \overline{1,4})$ параметр q меняет значение, поскольку на плоскости $(y, N(y))$ при значении y, соответствующем прямой, меняется значение $N(y)$ (т.е. происходит переключение). Поэтому точку Y^i и прямую L_i будем далее называть *точкой переключения* и *прямой переключения* соответственно, число τ_i – *временем перехода* из точки Y^i на прямую L_{i+1}, причём при $i = 4$ на прямую L_1, а точки переключения и времена перехода – *параметрами решения.*

Ставится задача исследовать колебательные решения уравнения (1), отвечающие введённому выше определению со значением $t_0 = 0$, и установить достаточные условия существования периодических решений с произвольной траекторией и с траекторией, симметричной относительно начала координат фазовой плоскости.

2. Система уравнений для параметров решения. Введём обозначения

$$d_1(t) = q_1\cos(\omega t+\varphi) + q_2\sin(\omega t+\varphi), \quad d_2(t) = q_2\cos(\omega t+\varphi) - q_1\sin(\omega t+\varphi)$$

для любого $t \geqslant 0$.

Сначала запишем решение и его производную в новых обозначениях на интервалах согласно условию 2) определения. Затем с помощью замены переменной от функций $y(t)$ и $\dot y(t)$, зависящих от текущего времени t, с неопределёнными постоянными c_1, c_2 перейдём к функциям $y_p^i(\tau)$ и $\dot y_p^i(\tau)$, зависящим от времени перехода τ по i-му куску фазовой траектории при p-м обходе с соответствующими постоянными c_1^i, c_2^i, $i = \overline{1,4}$.

Рассмотрим первый полный обход $N(y)$, т.е. $p = 1$. Итак, для любого $t \in [0, \tau_1]$ имеем

$$y(t) = c_1e^{\lambda t} + c_2 + q^+t + d_1(t), \quad \dot y(t) = \lambda c_1e^{\lambda t} + q^+ + \omega d_2(t).$$

Используем замену переменных $\tau = t$. Тогда первый кусок фазовой траектории задаётся для $\tau \in [0, \tau_1]$ следующими функциями:

$$y_1^1(\tau) = c_1^1e^{\lambda\tau} + c_2^1 + q^+\tau + d_1(\tau), \quad \dot y_1^1(\tau) = \lambda c_1^1e^{\lambda\tau} + q^+ + \omega d_2(\tau), \tag{3}$$

причём $c_1^1 = c_1$, $c_2^1 = c_2$.

Затем для любого $t \in (\tau_1, \tau_1+\tau_2)$ имеем $y(t) = c_1e^{\lambda t} + c_2 + d_1(t)$ и $\dot y(t) = \lambda c_1e^{\lambda t} + \omega d_2(t)$. После замены переменных $\tau = t - \tau_1$ приходим к функциям

$$y_1^2(\tau) = c_1^2e^{\lambda\tau} + c_2^2 + d_1(\tau+\tau_1), \quad \dot y_1^2(\tau) = \lambda c_1^2e^{\lambda\tau} + \omega d_2(\tau+\tau_1), \tag{4}$$

которыми задаётся для любого $\tau \in (0, \tau_2)$ второй кусок фазовой траектории. Здесь $c_1^2 = c_1e^{\lambda\tau_1}$, $c_2^2 = c_2$. Далее для любого $t \in [\tau_1+\tau_2, \tau_1+\tau_2+\tau_3]$ имеем $y(t) = c_1e^{\lambda t} + c_2 + q^-t + d_1(t)$, $\dot y(t) = \lambda c_1e^{\lambda t} + q^- + \omega d_2(t)$. Используем замену переменных $\tau = t - \tau_1 - \tau_2$. Тогда третий кусок фазовой траектории задаётся для $\tau \in [0, \tau_3]$ следующими функциями:

$$y_1^3(\tau) = c_1^3e^{\lambda\tau} + c_2^3 + q^-\tau + d_1(\tau+\tau_1+\tau_2), \quad \dot y_1^3(\tau) = \lambda c_1^3e^{\lambda\tau} + q^- + \omega d_2(\tau+\tau_1+\tau_2), \tag{5}$$

где $c_1^3 = c_1e^{\lambda(\tau_1+\tau_2)}$, $c_2^3 = c_2 + q^-(\tau_1+\tau_2)$. Наконец, для любого $t \in (\tau_1+\tau_2+\tau_3, T_r)$ имеем $y(t) = c_1e^{\lambda t} + c_2 + d_1(t)$, $\dot y(t) = \lambda c_1e^{\lambda t} + \omega d_2(t)$. Здесь сделаем замену $\tau = t - \tau_1 - \tau_2 - \tau_3$. Четвёртый кусок фазовой траектории задаётся для $\tau \in (0, \tau_4)$ функциями

$$y_1^4(\tau) = c_1^4e^{\lambda\tau} + c_2^4 + d_1(\tau+\tau_1+\tau_2+\tau_3), \quad \dot y_1^4(\tau) = \lambda c_1^4e^{\lambda\tau} + \omega d_2(\tau+\tau_1+\tau_2+\tau_3), \tag{6}$$

где $c_1^4 = c_1e^{\lambda(\tau_1+\tau_2+\tau_3)}$, $c_2^4 = c_2$.

Теперь рассмотрим условие 1) определения для $p = 1$ с учётом введённых выше новых функций. Условие $Y^1 \in L_1$ в координатной записи означает

$$(y(0), \dot y(0)) = (y_1^1(0), \dot y_1^1(0)) = (y_1^4(\tau_4), \dot y_1^4(\tau_4)) = (B, \dot y^1),$$

что равносильно выполнению равенств

$$c_1^1 + c_2^1 + d_1(0) = B = c_1^4e^{\lambda\tau_4} + c_2^4 + d_1(T_r), \tag{7}$$

$$\lambda c_1^1 + q^+ + \omega d_2(0) = \dot{y}^1 = \lambda c_1^4 e^{\lambda\tau_4} + \omega d_2(T_r). \tag{8}$$

Условие $Y^2 \in L_2$ означает

$$(y(\tau_1), \dot{y}(\tau_1)) = (y_1^2(0), \dot{y}_1^2(0)) = (y_1^1(\tau_1), \dot{y}_1^1(\tau_1)) = (A, \dot{y}^2),$$

что равносильно выполнению равенств

$$c_1^2 + c_2^2 + d_1(\tau_1) = A = c_1^1 e^{\lambda\tau_1} + c_2^1 + q^+\tau_1 + d_1(\tau_1), \tag{9}$$

$$\lambda c_1^2 + \omega d_2(\tau_1) = \dot{y}^2 = \lambda c_1^1 e^{\lambda\tau_1} + q^+ + \omega d_2(\tau_1). \tag{10}$$

Условие $Y^3 \in L_3$ означает

$$(y(\tau_1+\tau_2), \dot{y}(\tau_1+\tau_2)) = (y_1^3(0), \dot{y}_1^3(0)) = (y_1^2(\tau_2), \dot{y}_1^2(\tau_2)) = (-B, \dot{y}^3),$$

что равносильно выполнению равенств

$$c_1^3 + c_2^3 + d_1(\tau_1+\tau_2) = -B = c_1^2 e^{\lambda\tau_2} + c_2^2 + d_1(\tau_1+\tau_2), \tag{11}$$

$$\lambda c_1^3 + q^- + \omega d_2(\tau_1+\tau_2) = \dot{y}^3 = \lambda c_1^2 e^{\lambda\tau_2} + \omega d_2(\tau_1+\tau_2). \tag{12}$$

Условие $Y^4 \in L_4$ означает

$$(y(\tau_1+\tau_2+\tau_3), \dot{y}(\tau_1+\tau_2+\tau_3)) = (y_1^4(0), \dot{y}_1^4(0)) = (y_1^3(\tau_3), \dot{y}_1^3(\tau_3)) = (-A, \dot{y}^4),$$

что равносильно выполнению равенств

$$c_1^4 + c_2^4 + d_1(\tau_1+\tau_2+\tau_3) = -A = c_1^3 e^{\lambda\tau_3} + c_2^3 + q^-\tau_3 + d_1(\tau_1+\tau_2+\tau_3), \tag{13}$$

$$\lambda c_1^4 + \omega d_2(\tau_1+\tau_2+\tau_3) = \dot{y}^4 = \lambda c_1^3 e^{\lambda\tau_3} + q^- + \omega d_2(\tau_1+\tau_2+\tau_3). \tag{14}$$

Далее находим постоянные c_1^i, c_2^i, $i = \overline{1,4}$. Для этого из левого равенства (7) и правого равенства (9) выражаем постоянные c_1^1, c_2^1. Имеем

$$c_1^1 = (1 - e^{\lambda\tau_1})^{-1}(B - A + q^+\tau_1 + d_1(\tau_1) - d_1(0)), \quad c_2^1 = B - c_1^1 - d_1(0). \tag{15}$$

Из левого равенства (9) и правого равенства (11) выражаем постоянные c_1^2 и c_2^2:

$$c_1^2 = (1 - e^{\lambda\tau_2})^{-1}(A + B + d_1(\tau_1+\tau_2) - d_1(\tau_1)), \quad c_2^2 = A - c_1^2 - d_1(\tau_1). \tag{16}$$

Аналогично получаем из левого равенства (11) и правого равенства (13) значения

$$c_1^3 = (1 - e^{\lambda\tau_3})^{-1}(A - B + q^-\tau_3 + d_1(\tau_1+\tau_2+\tau_3) - d_1(\tau_1+\tau_2)), \quad c_2^3 = -B - c_1^3 - d_1(\tau_1+\tau_2), \tag{17}$$

а из левого равенства (13) и правого равенства (7) находим

$$c_1^4 = (1 - e^{\lambda\tau_4})^{-1}(-A - B + d_1(T_r) - d_1(\tau_1+\tau_2+\tau_3)), \quad c_2^4 = -A - c_1^4 - d_1(\tau_1+\tau_2+\tau_3). \tag{18}$$

Полученные выражения подставляем в соотношения (8), (10), (12) и (14). Приходим к системе уравнений относительно переменных τ_1, τ_2, τ_3, τ_4 вида

$$\lambda(1 - e^{\lambda\tau_1})^{-1}(B - A + q^+\tau_1 + d_1(\tau_1) - d_1(0)) + q^+ + \omega d_2(0) =$$

$$= \lambda e^{\lambda\tau_4}(1 - e^{\lambda\tau_4})^{-1}(-A - B + d_1(T_r) - d_1(\tau_1+\tau_2+\tau_3)) + \omega d_2(T_r),$$

$$\lambda(1 - e^{\lambda\tau_2})^{-1}(A + B + d_1(\tau_1+\tau_2) - d_1(\tau_1)) =$$

$$= \lambda e^{\lambda\tau_1}(1 - e^{\lambda\tau_1})^{-1}(B - A + q^+\tau_1 + d_1(\tau_1) - d_1(0)) + q^+,$$

$$\lambda(1-e^{\lambda\tau_3})^{-1}(A-B+q^-\tau_3+d_1(\tau_1+\tau_2+\tau_3)-d_1(\tau_1+\tau_2))+q^- =$$
$$=\lambda e^{\lambda\tau_2}(1-e^{\lambda\tau_2})^{-1}(A+B+d_1(\tau_1+\tau_2)-d_1(\tau_1)),$$
$$\lambda(1-e^{\lambda\tau_4})^{-1}(-A-B+d_1(T_r)-d_1(\tau_1+\tau_2+\tau_3))=$$
$$=\lambda e^{\lambda\tau_3}(1-e^{\lambda\tau_3})^{-1}(A-B+q^-\tau_3+d_1(\tau_1+\tau_2+\tau_3)-d_1(\tau_1+\tau_2))+q^- \qquad (19)$$

и к формулам для нахождения точек переключения

$$Y^1=(B,\dot y^1),\quad Y^2=(A,\dot y^2),\quad Y^3=(-B,\dot y^3),\quad Y^4=(-A,\dot y^4), \qquad (20)$$

где

$$\dot y^1=\lambda(1-e^{\lambda\tau_1})^{-1}(B-A+q^+\tau_1+d_1(\tau_1)-d_1(0))+q^++\omega d_2(0),$$
$$\dot y^2=\lambda(1-e^{\lambda\tau_2})^{-1}(A+B+d_1(\tau_1+\tau_2)-d_1(\tau_1))+\omega d_2(\tau_1),$$
$$\dot y^3=\lambda(1-e^{\lambda\tau_3})^{-1}(A-B+q^-\tau_3+d_1(\tau_1+\tau_2+\tau_3)-d_1(\tau_1+\tau_2))+q^-+\omega d_2(\tau_1+\tau_2),$$
$$\dot y^4=\lambda(1-e^{\lambda\tau_4})^{-1}(-A-B+d_1(T_r)-d_1(\tau_1+\tau_2+\tau_3))+\omega d_2(\tau_1+\tau_2+\tau_3).$$

Вторые координаты точек переключения получены из левых равенств в (8), (10), (12) и (14), в которых постоянные c_1^1, c_1^2, c_1^3 и c_1^4 заменены на выражения из систем равенств (15)–(18) соответственно.

3. Существование решения с произвольной траекторией. На вопрос о существовании решения уравнения (1) с фазовой траекторией, проходящей через точки переключения $(B,\dot y^1)$, $(A,\dot y^2)$, $(-B,\dot y^3)$ и $(-A,\dot y^4)$, которые произвольным образом располагаются на прямых переключения плоскости $(y,\dot y)$, даёт ответ следующая

Теорема 1. *Пусть выполняются условия:*

1) система уравнений (19) имеет решение τ_1, τ_2, τ_3 *и* τ_4, *причём* $\sum_{i=1}^4\tau_i=T_r$;

2) значения $d_j((p-1)T_r)$, $d_j(\tau_1+(p-1)T_r)$, $d_j(\tau_1+\tau_2+(p-1)T_r)$ *и* $d_j(\tau_1+\tau_2+\tau_3+(p-1)T_r)$, $j=1,2$, *не зависят от* p.

Тогда существует T_r*-колебательное решение уравнения (1) при полном обходе характеристики* $N(y)$ *с возможным выходом в зоны её насыщения и траекторией, проходящей через четыре точки переключения, которые находятся по формулам (20).*

Доказательство. Из условия 2) определения следует, что число τ_i $(i=\overline{1,4})$ является временем перехода между переключениями и отвечает первому моменту попадания решения $y(t)$ на прямую переключения L_{i+1} (при $i=4$ на прямую L_1). Поэтому только одно решение системы уравнений (19), составленное из наименьших значений независимо по каждой переменной τ_i, удовлетворяет условию 2) определения, которое обеспечивает нахождение траектории колебательного решения в допустимых областях фазовой плоскости в моменты между переключениями.

Пусть решение системы уравнений (19) найдено и имеет место равенство $\sum_{i=1}^4\tau_i=T_r$. Тогда точки переключения Y^1, Y^2, Y^3 и Y^4 находятся по формулам (20). Однако и времена перехода, и точки переключения удовлетворяют условиям определения для $p=1$. Это означает, что траектория решения проходит через точки переключения за соответствующие времена перехода при первом полном обходе нелинейной характеристики.

Пусть выполняется условие 2) теоремы 1. Покажем, что тогда выполняются условия определения не только для $p=1$, но и для $p>1$, т.е. существует решение $y(t)$ уравнения (1) с найденными выше параметрами.

Итак, значения $d_j((p-1)T_r)$, $j=1,2$, не зависят от p, поэтому равенства

$$c_1^1+c_2^1+d_1((p-1)T_r)=B,\quad \lambda c_1^1+q^++\omega d_2((p-1)T_r)=\dot y^1,$$

равносильные условию $Y^1\in L_1$, выполняются не только для $p=1$, но и для всех $p\in\mathbb{N}$. Поскольку значения $d_j(\tau_1+(p-1)T_r)$ также не зависят от p, то равенства

$$c_1^2+c_2^2+d_1(\tau_1+(p-1)T_r)=A,\quad \lambda c_1^2+\omega d_2(\tau_1+(p-1)T_r)=\dot y^2,$$

равносильные условию $Y^2 \in L_2$, имеют место для всех $p \in \mathbb{N}$.

Аналогично значения $d_j(\tau_1+\tau_2+(p-1)T_r)$ и $d_j(\tau_1+\tau_2+\tau_3+(p-1)T_r)$ не зависят от p. Значит для всех $p \in \mathbb{N}$ справедливы равенства

$$c_1^3+c_2^3+d_1(\tau_1+\tau_2+(p-1)T_r)=-B, \quad \lambda c_1^3+q^-+\omega d_2(\tau_1+\tau_2+(p-1)T_r)=\dot{y}^3,$$

равносильные условию $Y^3 \in L_3$, и равенства

$$c_1^4+c_2^4+d_1(\tau_1+\tau_2+\tau_3+(p-1)T_r)=-A, \quad \lambda c_1^4+\omega d_2(\tau_1+\tau_2+\tau_3+(p-1)T_r)=\dot{y}^4,$$

равносильные условию $Y^4 \in L_4$.

Система уравнений (19) была построена для решения $y(t)$, на которое не накладывалось условие $|y(t)| \leqslant B$ для любого $t>0$. Следовательно, существует T_r-колебательное решение уравнения (1) с возможным выходом в зоны насыщения характеристики $N(y)$ и найденными точками переключения, через которые проходит фазовая траектория не только при первом, но и при последующих обходах характеристики, что отражено в утверждении теоремы 1. Теорема доказана.

Существование периодического решения с периодом заданного вида устанавливает

Следствие 1. *Пусть выполняется условие 1) теоремы 1 и значение T_r кратно $2\pi/\omega$, $\omega>0$. Тогда существует T_r-колебательное решение уравнения (1), которое является периодическим решением с периодом T_r.*

Доказательство. Пусть имеет место условие 1) теоремы 1 и $T_r=2\pi k/\omega$, $k \in \mathbb{N}$. Поскольку функции $d_j(t)$, $j=1,2$, являются $2\pi/\omega$-периодическими, то они удовлетворяют равенству $d_j(t)=d_j(t+T_r)$ для любого $t \geqslant 0$. Отсюда следует, что имеют место равенства $d_j(t)=d_j(t+(p-1)T_r)$ не только в моменты переключения, что равносильно выполнению условия 2) теоремы 1 (а значит существует искомое T_r-колебательное решение уравнения (1)), но и на интервалах, соответствующих кускам траектории.

Покажем, что в этом случае T_r-колебательному решению уравнения (1) на фазовой плоскости $(y,\dot{y})$ соответствует замкнутая траектория, состоящая из четырёх кусков при первом и последующих обходах характеристики, т.е. $y(t)=y(t+T_r)$ и $\dot{y}(t)=\dot{y}(t+T_r)$ для любого $t \geqslant 0$. Это значит, что решение уравнения (1) является периодическим с периодом T_r.

Запишем функции, задающие куски траектории, для любого $p \in \mathbb{N}$. Для моментов времени $t \in [(p-1)T_r, \tau_1+(p-1)T_r]$ и первого куска траектории с $\tau \in [0,\tau_1]$ имеем функции

$$y_p^1(\tau)=c_1^1 e^{\lambda\tau}+c_2^1+q^+\tau+d_1(\tau+(p-1)T_r),$$

$$\dot{y}_p^1(\tau)=\lambda c_1^1 e^{\lambda\tau}+q^++\omega d_2(\tau+(p-1)T_r),$$

где c_1^1, c_2^1 вычисляются по формуле (15). Для $t \in (\tau_1+(p-1)T_r, \tau_1+\tau_2+(p-1)T_r)$ и второго куска траектории со значением $\tau \in (0,\tau_2)$ имеем

$$y_p^2(\tau)=c_1^2 e^{\lambda\tau}+c_2^2+d_1(\tau+\tau_1+(p-1)T_r),$$

$$\dot{y}_p^2(\tau)=\lambda c_1^2 e^{\lambda\tau}+\omega d_2(\tau+\tau_1+(p-1)T_r),$$

где c_1^2, c_2^2 вычисляются по формуле (16). Для $t \in [\tau_1+\tau_2+(p-1)T_r, \tau_1+\tau_2+\tau_3+(p-1)T_r]$ и третьего куска траектории с $\tau \in [0,\tau_3]$ имеем функции

$$y_p^3(\tau)=c_1^3 e^{\lambda\tau}+c_2^3+q^-\tau+d_1(\tau+\tau_1+\tau_2+(p-1)T_r),$$

$$\dot{y}_p^3(\tau)=\lambda c_1^3 e^{\lambda\tau}+q^-+\omega d_2(\tau+\tau_1+\tau_2+(p-1)T_r),$$

где c_1^3, c_2^3 вычисляются по формуле (17). И, наконец, для $t \in (\tau_1+\tau_2+\tau_3+(p-1)T_r, pT_r)$ и четвёртого куска траектории с $\tau \in (0,\tau_4)$ находим

$$y_p^4(\tau)=c_1^4 e^{\lambda\tau}+c_2^4+d_1(\tau+\tau_1+\tau_2+\tau_3+(p-1)T_r),$$

$$\dot{y}_p^4(\tau) = \lambda c_1^4 e^{\lambda\tau} + \omega d_2(\tau + \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + (p-1)T_r),$$

где c_1^4, c_2^4 вычисляются по формуле (18).

Поскольку функции $d_j(t)$, $j = 1, 2$, не зависят от p на интервалах, соответствующих кускам траектории, то функции $y_p^i(\tau)$ и $\dot{y}_p^i(\tau)$ также не зависят от p и справедливы равенства $y_p^i(\tau) = y_1^i(\tau)$ и $\dot{y}_p^i(\tau) = \dot{y}_1^i(\tau)$ для любого $p \in \mathbb{N}$. Это означает, что траектория состоит из четырёх кусков на протяжении неограниченного количества обходов. Каждая из функций $y_1^i(\tau)$, $\dot{y}_1^i(\tau)$ непрерывна на соответствующем интервале. Отсюда следует, что функции $y(t)$ и $\dot{y}(t)$ непрерывны для всех $t \geqslant 0$, за исключением моментов переключения. Однако в силу того, что множество таких моментов времени дискретно, метод припасовывания применим. Поэтому указанные функции непрерывны для всех $t \geqslant 0$ и справедливы равенства

$$y(t) = y(t + T_r), \quad \dot{y}(t) = \dot{y}(t + T_r),$$

т.е. траектория замкнутая, а решение периодическое с периодом T_r, что и требовалось доказать. Следствие доказано.

4. Периодические решения с симметричной траекторией. Рассмотрим T_r-колебательное решение уравнения (1) с определёнными требованиями к её параметрам и к траектории, а именно периодическое решение с периодом T_r и с фазовой траекторией, симметричной относительно начала координат плоскости $(y, \dot{y})$ (далее T_r-периодическое решение с симметричной траекторией).

Функции $d_1(t)$ и $d_2(t)$ представим в следующем виде:

$$d_1(t) = \sqrt{q_1^2 + q_2^2}\,\sin\left(\omega t + \varphi + \operatorname{arctg}\frac{q_1}{q_2} + \pi h\right),$$

$$d_2(t) = \sqrt{q_1^2 + q_2^2}\,\sin\left(\omega t + \varphi - \operatorname{arctg}\frac{q_2}{q_1} + \pi h\right),$$

где $h = 0$, если $\lambda > 0$, и $h = 1$, если $\lambda < 0$,

$$\sqrt{q_1^2 + q_2^2} = -\frac{\beta}{\omega\sqrt{\lambda^2 + \omega^2}}, \quad \frac{q_1}{q_2} = \frac{\omega}{\lambda}.$$

Обозначим через T *полупериод* решения. Достаточное условие существования искомого решения даёт

Теорема 2. *Пусть выполняется условие 1) теоремы 1 и* $\tau_1 = \tau_3$, $\tau_2 = \tau_4$, $T_r = 2T$, *где* $T = \pi k/\omega$, k *– нечётное натуральное число,* $\omega > 0$. *Тогда существует* T_r*-периодическое решение уравнения (1) с симметричной траекторией.*

Доказательство. Если выполняется условие 1) теоремы 1 и T_r кратно $2\pi/\omega$, то, согласно следствию 1, T_r-колебательное решение уравнения (1) является периодическим. Пусть $\tau_1 = \tau_3$, $\tau_2 = \tau_4$ и $T_r = 2T$. Тогда $T = \tau_1 + \tau_2$.

Исходя из симметричности нелинейной характеристики, запишем условия симметричности траектории относительно начала координат плоскости $(y, \dot{y})$ и покажем, что они выполняются, если $T = \pi k/\omega$, k – нечётное натуральное число.

Для первого и третьего кусков траектории имеем условие

$$y_1^1(\tau) = -y_1^3(\tau), \quad \dot{y}_1^1(\tau) = -\dot{y}_1^3(\tau) \quad \text{при всех} \quad \tau \in [0, \tau_1],$$

выполнение которого равносильно для любого $\tau \in [0, \tau_1]$ равенствам

$$c_1^1 e^{\lambda\tau} + c_2^1 + q^+\tau + d_1(\tau) = -c_1^3 e^{\lambda\tau} - c_2^3 - q^-\tau - d_1(\tau + T),$$

$$\lambda c_1^1 e^{\lambda\tau} + q^+ + \omega d_2(\tau) = -\lambda c_1^3 e^{\lambda\tau} - q^- - \omega d_2(\tau + T). \qquad (21)$$

При составлении соотношений (21) использованы равенства (3) и (5). В моменты переключения имеем

$$y_1^1(0) = -y_1^3(0) = B, \quad \dot{y}_1^1(0) = -\dot{y}_1^3(0) = \dot{y}^1,$$

$$y_1^1(\tau_1) = -y_1^3(\tau_3) = A, \quad \dot{y}_1^1(\tau_1) = -\dot{y}_1^3(\tau_3) = \dot{y}^2.$$

Для второго и четвёртого кусков траектории имеем условие

$$y_1^2(\tau) = -y_1^4(\tau), \quad \dot{y}_1^2(\tau) = -\dot{y}_1^4(\tau) \quad \text{при всех} \quad \tau \in (0, \tau_2),$$

что равносильно для любого $\tau \in (0, \tau_2)$ равенствам

$$c_1^2 e^{\lambda\tau} + c_2^2 + d_1(\tau + \tau_1) = -c_1^4 e^{\lambda\tau} - c_2^4 - d_1(\tau + \tau_1 + T),$$

$$\lambda c_1^2 e^{\lambda\tau} + \omega d_2(\tau + \tau_1) = -\lambda c_1^4 e^{\lambda\tau} - \omega d_2(\tau + \tau_1 + T),$$

которые составлены с помощью (4) и (6).

В моменты переключения имеем

$$y_1^2(0) = -y_1^4(0) = A, \quad \dot{y}_1^2(0) = -\dot{y}_1^4(0) = \dot{y}^2,$$

$$y_1^2(\tau_2) = -y_1^4(\tau_4) = -B, \quad \dot{y}_1^2(\tau_2) = -\dot{y}_1^4(\tau_4) = \dot{y}^3 = -\dot{y}^1.$$

Если $T = \pi k/\omega$, k – нечётное натуральное число, то для любого $x \in \mathbb{R}$ имеет место равенство $\sin(x + \pi k) = -\sin x$, а значит $d_j(t) = -d_j(t + T)$ для любого $t \geqslant 0$. Обратимся к формулам (15)–(18), определяющим постоянные c_1^i, c_2^i, $i = \overline{1,4}$. Нетрудно видеть, что $c_1^1 = -c_1^3$, $c_2^1 = -c_2^3$, $c_1^2 = -c_1^4$ и $c_2^2 = -c_2^4$, поскольку $q^- = -q^+$. Очевидно, что условия симметричности траектории выполняются. Теорема доказана.

Ввиду симметричности траектории достаточно рассмотреть первый и второй куски траектории, которые соответствуют решению с обходом характеристики в одну сторону и с двумя точками переключения $Y^1 = (B, \dot{y}^1)$, $Y^2 = (A, \dot{y}^2)$ за полупериод.

Выражения, которые определяют постоянные c_1^1, c_2^1 в (15) и c_1^2, c_2^2 в (16), подставим в равенства

$$\lambda c_1^1 + q^+ + \omega d_2(0) = -\lambda c_1^2 e^{\lambda\tau_2} - \omega d_2(T), \quad \lambda c_1^1 e^{\lambda\tau_1} + q^+ + \omega d_2(\tau_1) = \lambda c_1^2 + \omega d_2(\tau_1),$$

равносильные условиям

$$\dot{y}_1^1(0) = -\dot{y}_1^2(\tau_2), \quad \dot{y}_1^1(\tau_1) = \dot{y}_1^2(0).$$

Приходим к системе уравнений

$$\lambda(1 - e^{\lambda\tau_1})^{-1}(B - A + q^+\tau_1 + d_1(\tau_1) - d_1(0)) + q^+ =$$

$$= -\lambda e^{\lambda\tau_2}(1 - e^{\lambda\tau_2})^{-1}(B + A - d_1(0) - d_1(\tau_1)),$$

$$\lambda(1 - e^{\lambda\tau_2})^{-1}(B + A - d_1(0) - d_1(\tau_1)) =$$

$$= \lambda e^{\lambda\tau_1}(1 - e^{\lambda\tau_1})^{-1}(B - A + q^+\tau_1 + d_1(\tau_1) - d_1(0)) + q^+ \tag{22}$$

относительно переменных τ_1 и τ_2 таких, что $\tau_1 + \tau_2 = T$ (здесь учтено равенство $d_1(0) = -d_1(T)$), и к формулам для нахождения точек переключения $Y^1 = (B, \dot{y}^1)$, $Y^2 = (A, \dot{y}^2)$, $Y^3 = (-B, -\dot{y}^1)$, $Y^4 = (-A, -\dot{y}^2)$, где $\dot{y}^1$ и $\dot{y}^2$ определены в (20).

Таким образом, система уравнений (19) относительно τ_i, $i = \overline{1,4}$, для T_r-колебательного решения уравнения (1) принимает вид системы уравнений (22) относительно τ_1 и τ_2 для T_r-периодического решения с симметричной траекторией.

Преобразуем систему уравнений (22) к виду, удобному для дальнейшего исследования. Для этого из её первого уравнения, умноженного на $e^{\lambda\tau_1}$, вычтем второе уравнение и получим

$$q^+(e^{\lambda\tau_1} - 1) = \frac{\lambda(e^{\lambda T} + 1)}{e^{\lambda\tau_2} - 1}(B + A - d_1(0) - d_1(\tau_1)).$$

Из последнего равенства выразим слагаемое, содержащее $d_1(\tau_1)$:

$$\lambda(e^{\lambda T}+1)d_1(\tau_1) = q^+(e^{\lambda\tau_1}-1)(1-e^{\lambda\tau_2}) + \lambda(e^{\lambda T}+1)(B+A-d_1(0)).$$

Теперь второе уравнение системы (22) умножим на $e^{\lambda\tau_2}$, сложим с первым уравнением и получим

$$q^+(e^{\lambda\tau_2}+1) = \frac{\lambda(e^{\lambda T}+1)}{e^{\lambda\tau_1}-1}(B-A+q^+\tau_1+d_1(\tau_1)-d_1(0)).$$

Аналогично выразим слагаемое, содержащее $d_1(\tau_1)$:

$$\lambda(e^{\lambda T}+1)d_1(\tau_1) = q^+(e^{\lambda\tau_2}+1)(e^{\lambda\tau_1}-1) - \lambda(e^{\lambda T}+1)(B-A+q^+\tau_1-d_1(0)).$$

Приравниваем правые части равенств, которые в своих левых частях содержат одинаковые выражения с $d_1(\tau_1)$ и получаем первое уравнение преобразованной системы. В качестве второго её уравнения рассмотрим второе уравнение системы (22). Поскольку $\tau_1+\tau_2=T$, сделаем замену $\tau_2 = T-\tau_1$. Приходим к преобразованной системе уравнений относительно τ_1 и T:

$$2q^+e^{\lambda(T-\tau_1)} - 2q^+e^{\lambda T} + 2\lambda(e^{\lambda T}+1)(B-d_1(0)) = -\lambda(e^{\lambda T}+1)q^+\tau_1,$$

$$\lambda(1-e^{\lambda(T-\tau_1)})^{-1}(B+A-d_1(0)-d_1(\tau_1)) =$$
$$= \lambda e^{\lambda\tau_1}(1-e^{\lambda\tau_1})^{-1}(B-A+q^+\tau_1+d_1(\tau_1)-d_1(0)) + q^+, \qquad (23)$$

которая равносильна системе (22).

Условия разрешимости системы уравнений (23) относительно τ_1 при фиксированном T устанавливает

Лемма 1. *Пусть $T = \pi k/\omega$, $\omega > 0$, и для некоторого нечётного $k \in \mathbb{N}$ выполняются следующие условия:*

1) если $\lambda > 0$ и имеют место неравенства

$$q^+\left(\frac{e^{\lambda T}-1}{\lambda(e^{\lambda T}+1)} - \frac{T}{2}\right) < B - d_1(0) < 0 \qquad (24)$$

или $\lambda < 0$ и имеют место неравенства

$$0 < B - d_1(0) < q^+\left(\frac{e^{\lambda T}-1}{\lambda(e^{\lambda T}+1)} - \frac{T}{2}\right), \qquad (25)$$

то первое уравнение системы (23) имеет решение $\tau_1 \in (0, T)$;

2) при значении τ_1, удовлетворяющем первому уравнению системы (23), имеет место равенство

$$A = \frac{e^{\lambda\tau_1}-e^{\lambda T}}{1-e^{\lambda T}}(B+q^+\tau_1+d_1(\tau_1)-d_1(0)) -$$
$$-\frac{1-e^{\lambda\tau_1}}{1-e^{\lambda T}}(B-d_1(0)-d_1(\tau_1)) + q^+\frac{(e^{\lambda\tau_1}-1)(e^{\lambda(T-\tau_1)}-1)}{\lambda(1-e^{\lambda T})}, \qquad (26)$$

причём $0 < A < B$.

Тогда система уравнений (23) имеет решение τ_1.

Доказательство. При некотором нечётном $k \in \mathbb{N}$ величина $T = \pi k/\omega$ является фиксированной и система уравнений (23) зависит только от переменной τ_1. Рассмотрим первое уравнение системы (23).

Введём обозначения для $t \in [0, T]$

$$f_1(t) = 2q^+e^{\lambda(T-t)} - 2q^+e^{\lambda T} + 2\lambda(e^{\lambda T}+1)(B-d_1(0)), \quad f_2(t) = -\lambda(e^{\lambda T}+1)q^+t.$$

Заметим, что справедливы равенства

$$f_1(0)=2\lambda(e^{\lambda T}+1)(B-d_1(0)),\quad f_2(T)=-\lambda(e^{\lambda T}+1)q^+T,$$

$$f_1(T)=2q^+(1-e^{\lambda T})+2\lambda(e^{\lambda T}+1)(B-d_1(0)),\quad f_2(0)=0.$$

Пусть $\lambda>0$. Имеем $q^+>0$ и $1-e^{\lambda T}<0$. Функции $f_1(t)$ и $f_2(t)$ являются непрерывными и монотонно убывающими, причём $f_2(t)\leqslant 0$, а функция $f_1(t)$ за счёт свободного члена может принимать как неположительные, так и положительные значения для любого $t\in[0,T]$.

Пусть выполняется левое неравенство в (24). Домножив его обе части на выражение $2\lambda\times$ $\times(e^{\lambda T}+1)$, приходим к неравенству $2q^+(e^{\lambda T}-1)-\lambda(e^{\lambda T}+1)q^+T<2\lambda(e^{\lambda T}+1)(B-d_1(0))$ или к неравенству $-\lambda(e^{\lambda T}+1)q^+T<-2q^+(e^{\lambda T}-1)+2\lambda(e^{\lambda T}+1)(B-d_1(0))$ после преобразования, которое означает, что $f_2(T)<f_1(T)$.

Пусть выполняется правое неравенство в (24). Итак, если $B-d_1(0)<0$, то $2\lambda(e^{\lambda T}+1)\times$ $\times(B-d_1(0))<0$ и выполняется неравенство $f_1(0)<f_2(0)$.

Таким образом, при выполнении неравенств (24) в условии 1) леммы 1 справедливы неравенства $f_1(0)<f_2(0)$ и $f_1(T)>f_2(T)$. В силу непрерывности и монотонности функций $f_1(t)$, $f_2(t)$ имеет место одно пересечение их графиков, и тогда абсцисса τ_1 точки их пересечения является решением уравнения $f_1(\tau_1)=f_2(\tau_1)$, что отражено в условии 1) леммы 1.

Пусть теперь $\lambda<0$. Имеем $q^+<0$ и $1-e^{\lambda T}>0$. Функции $f_1(t)$ и $f_2(t)$ являются также убывающими, поскольку коэффициент $2q^+e^{\lambda T}$ перед экспонентой $e^{-\lambda t}$ в функции $f_1(t)$ и коэффициент $-\lambda(e^{\lambda T}+1)q^+$ линейной функции $f_2(t)$ принимают отрицательные значения.

Рассмотрим неравенства (25). Если выполняется левое неравенство, т.е. $B-d_1(0)>0$, то $f_1(0)<0=f_2(0)$, поскольку $2\lambda(e^{\lambda T}+1)(B-d_1(0))<0$. Если имеет место правое неравенство в (25), то справедливо неравенство $2q^+(1-e^{\lambda T})+2\lambda(e^{\lambda T}+1)(B-d_1(0))>-\lambda(e^{\lambda T}+1)q^+T$, из которого следует, что $f_1(T)>f_2(T)$, т.е. графики функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$ пересекаются. Следовательно, при выполнении условия 1) леммы 1 первое уравнение системы (23) имеет решение $\tau_1\in(0,T)$.

Далее рассмотрим второе уравнение системы (23). После приведения к общему знаменателю и преобразования получим равносильное уравнение

$$\lambda(1-e^{\lambda\tau_1})(B+A-d_1(0)-d_1(\tau_1))=$$

$$=\lambda(e^{\lambda\tau_1}-e^{\lambda T})(B-A+q^+\tau_1+d_1(\tau_1)-d_1(0))+q^+(e^{\lambda\tau_1}-1)(e^{\lambda(T-\tau_1)}-1).$$

Введём для $t\in[0,T]$ обозначения

$$f_3(t)=\lambda(1-e^{\lambda t})(B+A-d_1(0)-d_1(t)),$$

$$f_4(t)=\lambda(e^{\lambda t}-e^{\lambda T})(B-A+q^+t+d_1(t)-d_1(0))+q^+(e^{\lambda t}-1)(e^{\lambda(T-t)}-1).$$

Напомним, что $-d_1(T)=d_1(0)$. Поэтому

$$f_3(0)=0,\quad f_3(T)=\lambda(1-e^{\lambda T})(B+A)<0,$$

$$f_4(0)=\lambda(1-e^{\lambda T})(B-A)<0,\quad f_4(T)=0.$$

Отсюда следует, что $f_3(0)>f_4(0)$ и $f_3(T)<f_4(T)$. Поскольку функции $f_3(t)$ и $f_4(t)$ являются непрерывными, то их графики пересекаются.

Пусть имеет место условие 2) леммы 1. Равенство (26) получено из второго уравнения системы (23) при значении τ_1, которое удовлетворяет первому уравнению системы (23). Поэтому выполнение равенства (26) равносильно тому, что решение τ_1 первого уравнения системы (23) удовлетворяет её второму уравнению, т.е. имеет место равенство $f_3(\tau_1)=f_4(\tau_1)$, и τ_1 является абсциссой точки пересечения графиков функций $f_3(t)$ и $f_4(t)$. Таким образом, при выполнении условий 1) и 2) леммы 1 система уравнений (23) имеет решение τ_1 при фиксированном T. Лемма доказана.

Далее условия неразрешимости системы (23) даёт

Лемма 2. *Пусть* $T = \pi k/\omega$, $\omega > 0$, *и для некоторого нечётного* $k \in \mathbb{N}$ *выполняется следующее условие: при* $\lambda > 0$ *имеет место неравенство*

$$\frac{q^+ e^{\lambda T}}{\lambda(e^{\lambda T}+1)} \leqslant B - d_1(0), \tag{27}$$

а при $\lambda < 0$ – *неравенство*

$$q^+\left(\frac{e^{\lambda T}}{\lambda(e^{\lambda T}+1)} - \frac{T}{2}\right) \leqslant B - d_1(0). \tag{28}$$

Тогда система уравнений (23) не имеет решения τ_1 *такого, что* $\tau_1 \in (0, T)$.

Доказательство. Функция $f_1(t)$ имеет горизонтальную асимптоту, которую обозначим через h. Тогда

$$h = -2q^+ e^{\lambda T} + 2\lambda(e^{\lambda T}+1)(B - d_1(0))$$

и функция $f_1(t)$ принимает вид $f_1(t) = 2q^+ e^{\lambda T} e^{-\lambda t} + h$.

Пусть выполняется неравенство (27). Перенесём выражение из левой части неравенства в правую часть, приведём к общему знаменателю, умножим обе части на 2 и получим равносильное неравенство

$$0 \leqslant -2q^+ e^{\lambda T} + 2\lambda(e^{\lambda T}+1)(B - d_1(0)),$$

которое означает, что $h \geqslant 0$, т.е. $h \geqslant f_2(0) = 0$. Отсюда следует, что при $\lambda > 0$ имеет место неравенство $f_1(t) > 0$ для любого $t \in [0, T]$ и пересечение графиков функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$ невозможно, поскольку $f_2(t) \leqslant 0$ на указанном интервале.

Пусть выполняется неравенство (28), после преобразования которого приходим к равносильному неравенству

$$-2q^+ e^{\lambda T} + 2\lambda(e^{\lambda T}+1)(B - d_1(0)) \leqslant -\lambda(e^{\lambda T}+1)q^+ T,$$

из которого следует, что $h \leqslant f_2(T)$ и, значит, при $\lambda < 0$ имеем $f_1(0) < f_2(T)$, поскольку $f_1(0) < h$. В силу того, что функция $f_1(t)$ убывает для любого $t \geqslant 0$, неравенство $f_1(0) < f_2(T)$ означает, что на отрезке $[0, T]$ графики функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$ не пересекаются. Таким образом, при выполнении условий леммы 2 первое уравнение системы (23) не имеет решения $\tau_1 \in (0, T)$, следовательно, и система уравнений (23) не имеет решения τ_1 при фиксированном $T = \pi k/\omega$. Лемма доказана.

Из леммы 2 очевидно вытекает следующее

Следствие 2. *Пусть выполняется условие леммы 2. Тогда не существует* T_r*-периодического решения уравнения (1) с симметричной траекторией.*

Для демонстрации результатов работы приведём примеры.

Пример 1. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\ddot{y}(t) = 0.314159\dot{y}(t) - 0.1N(y(t)) - 0.21\cos(t + 0.196349). \tag{29}$$

Здесь $\lambda = 0.314159$, $\alpha = -0.1$, $\beta = -0.21$, $\omega = 1$ и $\varphi = 0.196349$. Пусть $C = 0.1$ и $B = 0.83$. Тогда $q^+ = 0.031831$, $q_1 = 0.191136$ и $q_2 = 3.298672$. Здесь и далее расчёты проведены с точностью до 10^{-6}.

Обратимся к условиям леммы 1. Пусть $k = 1$. Тогда $T = \pi$. При $\lambda = 0.314159 > 0$ и $d_1(0) = 0.831002$ справедливы неравенства (24), а именно $-0.003699 < -0.001002 < 0$. Первое уравнение системы (23) имеет единственное решение $\tau_1 = 2.739280$, значит $d_1(\tau_1) = 0.487516$. Вычислим параметр A. Имеем $0 < A = 0.493575 < B$. Следовательно, найденное значение τ_1 является решением системы уравнений (23).

Для построения $2T$-периодического решения найдём постоянные:

$$c_1^1 = -c_1^3 = -0.058726, \quad c_2^1 = -c_2^3 = 0.057724, \quad c_1^2 = -c_1^4 = -0.037537, \quad c_2^2 = -c_2^4 = 0.043597.$$

На рис. 1 представлен график симметричной траектории 2π-периодического решения уравнения (29) с выходом в зоны насыщения характеристики (так как $y_{\max} = 3.315021 > 0.83 = B$) и с точками переключения $Y^1 = (0.83, 3.211382)$, $Y^2 = (0.493575, -3.279835)$, $Y^3 = -Y^1$ и $Y^4 = -Y^2$, которые отмечены на рисунке и расположены на фазовой плоскости $(y, \dot{y})$ по ходу часовой стрелки. Куски траектории между точками переключения для всех $p \in \mathbb{N}$ задаются следующими функциями:

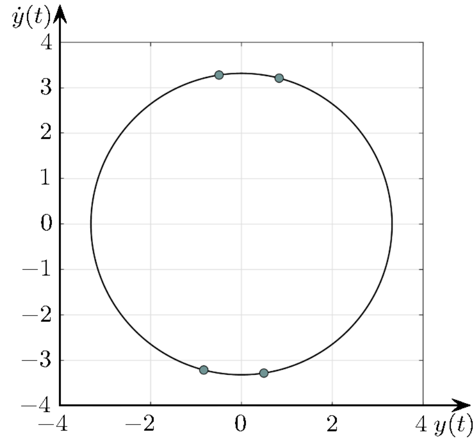

Рис. 1. 2π-периодическое решение $y(t)$ уравнения (29) на фазовой плоскости.

первый кусок для $t \in (2(p-1)\pi, \tau_1 + 2(p-1)\pi)$:

$$y(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 + q^+ t + d_1(t), \quad \dot{y}(t) = \lambda c_1 e^{\lambda t} + q^+ + \omega d_2(t),$$

где $c_1 = c_1^1 = -0.058726$, $c_2 = c_2^1 = 0.057724$;

второй кусок для $t \in (\tau_1 + 2(p-1)\pi, \pi + 2(p-1)\pi)$:

$$y(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 + d_1(t), \quad \dot{y}(t) = \lambda c_1 e^{\lambda t} + \omega d_2(t),$$

где $c_1 = e^{-\lambda\tau_1} c_1^2 = -0.015885$, $c_2 = c_2^2 = 0.043597$;

третий кусок для $t \in (\pi + 2(p-1)\pi, \tau_1 + \pi + 2(p-1)\pi)$:

$$y(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 - q^+ t + d_1(t), \quad \dot{y}(t) = \lambda c_1 e^{\lambda t} - q^+ + \omega d_2(t),$$

где $c_1 = e^{-\lambda\pi} c_1^3 = 0.021887$, $c_2 = c_2^3 + q^+\pi = 0.042275$;

четвёртый кусок для $t \in (\tau_1 + \pi + 2(p-1)\pi, 2p\pi)$:

$$y(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 + d_1(t), \quad \dot{y}(t) = \lambda c_1 e^{\lambda t} + \omega d_2(t),$$

где $c_1 = e^{-\lambda(\tau_1+\pi)} c_1^4 = 0.005916$, $c_2 = c_2^4 = -0.043597$.

Пример 2. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\ddot{y}(t) = -0.589048\dot{y}(t) - 4.36N(y(t)) - 0.1\cos(2t + 0.003490). \tag{30}$$

Здесь $\lambda = -0.589048$, $\alpha = -4.36$, $\beta = -0.1$, $\omega = 2$ и $\varphi = 0.003490$. Пусть $C = 0.1$ и $B = 0.6$. Тогда $q^+ = -0.740180$, $q_1 = 0.023004$ и $q_2 = -0.001550$.

Обратимся к условиям леммы 1 при $\lambda < 0$. Пусть $k = 3$. Тогда $T = 3\pi/2 = 4.712389$. Здесь $d_1(0) = 0.022999$. Справедливы неравенства (25), так как $0 < 0.577001 < 0.634818$.

Первое уравнение системы (23) имеет одно решение $\tau_1 = 2.010911$ такое, что $\tau_1 < T$ (второе решение $\tau_1 = 4.872707$ не удовлетворяет уравнению, поскольку нарушается условие $\tau_1 < T$), значит $d_1(\tau_1) = -0.013394$. Параметр A принимает значение $A = 0.063433$, при этом $0 < A < B$. Следовательно, найденное значение τ_1 является решением системы уравнений (23).

Вычислим постоянные: $c_1^1 = -c_1^3 = -1.423776$, $c_2^1 = -c_2^3 = 2.000777$, $c_1^2 = -c_1^4 = 0.821041$ и $c_2^2 = -c_2^4 = -0.744214$.

На рис. 2 представлен график симметричной траектории 3π-периодического решения уравнения (30) с выходом в зоны насыщения характеристики (так как $y_{\max} = 0.607746 > 0.6 = B$) и с точками переключения $Y^1 = (0.6, 0.095320)$, $Y^2 = (0.063433, -0.463884)$, $Y^3 = -Y^1$ и $Y^4 = -Y^2$ на фазовой плоскости $(y, \dot{y})$.

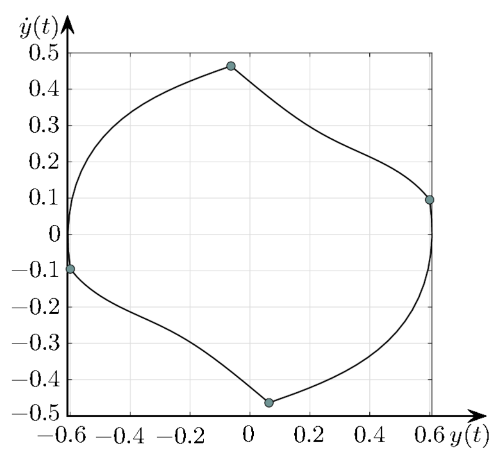

Рис. 2. 3π-периодическое решение $y(t)$ уравнения (30) на фазовой плоскости.

Первый кусок траектории между точками Y^1 и Y^2 описывается функцией с постоянными $c_1 = c_1^1 = -1.423776$, $c_2 = c_2^1 = 2.000777$ и соответствует интервалу $(3(p-1)\pi, \tau_1 + 3(p-1)\pi)$. Второй кусок между точками Y^2 и Y^3 описывается функцией с постоянными $c_1 = e^{-\lambda\tau_1}c_1^2 = 2.684093$, $c_2 = c_2^2 = -0.744214$ и соответствует интервалу $(\tau_1 + 3(p-1)\pi, 1.5\pi + 3(p-1)\pi)$. Третий кусок между точками Y^3 и Y^4 описывается функцией с постоянными $c_1 = e^{-1.5\pi\lambda}c_1^3 = 22.854293$, $c_2 = c_2^3 + 1.5\pi q^+ = -5.488777$ и соответствует интервалу $(1.5\pi + 3(p-1)\pi, \tau_1 + 1.5\pi + 3(p-1)\pi)$. Наконец, четвёртый кусок траектории между точками Y^4 и Y^1 описывается функцией с постоянными $c_1 = e^{-\lambda(\tau_1+1.5\pi)}c_1^4 = -43.084744$, $c_2 = c_2^4 = 0.744214$ и соответствует интервалу $(\tau_1 + 1.5\pi + 3(p-1)\pi, 3p\pi)$.

Заключение. Для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с трёхпозиционным гистерезисным реле доказаны теоремы существования колебательного и периодического решений с обходом характеристики с возможным выходом в зоны насыщения. Траектории решений проходят за время полного обхода через четыре точки, которые расположены произвольным образом или симметрично на прямых переключения фазовой плоскости. Для периодического решения с симметричной траекторией установлены достаточные условия разрешимости и неразрешимости системы уравнений относительно параметров решения. Рассмотрены численные примеры, демонстрирующие полученные результаты.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Нижник И.Л., Краснеева А.А.* Периодические решения дифференциальных уравнений второго порядка с разрывной нелинейностью // Нелин. колебания. 2012. Т. 15. № 3. С. 381–389.
2. *Jacquemard A., Teixeira M.A.* Periodic solutions of a class of non-autonomous second order differential equations with discontinuous right-hand side // Phys. D: Nonlin. Phenom. 2012. V. 241. № 22. P. 2003–2009.
3. *Потапов Д.К.* Задача Штурма–Лиувилля с разрывной нелинейностью // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50. № 9. С. 1284–1286.
4. *Kamachkin A.M., Potapov D.K., Yevstafyeva V.V.* Solution to second-order differential equations with discontinuous right-hand side // Electron. J. Differ. Equat. 2014. № 221. P. 1–6.
5. *Llibre J., Teixeira M.A.* Periodic solutions of discontinuous second order differential systems // J. Singularities. 2014. V. 10. P. 183–190.
6. *Потапов Д.К.* Существование решений, оценки дифференциального оператора и “разделяющее” множество в краевой задаче для дифференциального уравнения второго порядка с разрывной нелинейностью // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51. № 7. С. 970–974.
7. *Самойленко А.М., Нижник И.Л.* Дифференциальные уравнения с биустойчивой нелинейностью // Укр. мат. журн. 2015. Т. 67. № 4. С. 517–554.
8. *Bonanno G., D'Agui G., Winkert P.* Sturm–Liouville equations involving discontinuous nonlinearities // Minimax Theory Appl. 2016. V. 1. № 1. P. 125–143.
9. *Kamachkin A.M., Potapov D.K., Yevstafyeva V.V.* Non-existence of periodic solutions to non-autonomous second-order differential equation with discontinuous nonlinearity // Electron. J. Differ. Equat. 2016. № 4. P. 1–8.
10. *Kamachkin A.M., Potapov D.K., Yevstafyeva V.V.* Existence of solutions for second-order differential equations with discontinuous right-hand side // Electron. J. Differ. Equat. 2016. № 124. P. 1–9.
11. *Bensid S., Diaz J.I.* Stability results for discontinuous nonlinear elliptic and parabolic problems with a S-shaped bifurcation branch of stationary solutions // Disc. Contin. Dyn. Syst. Ser. B. 2017. V. 22. № 5. P. 1757–1778.
12. *da Silva C.E.L., da Silva P.R., Jacquemard A.* Sliding solutions of second-order differential equations with discontinuous right-hand side // Math. Meth. Appl. Sci. 2017. V. 40. № 14. P. 5295–5306.
13. *Павленко В.Н., Постникова Е.Ю.* Задача Штурма–Лиувилля для уравнения с разрывной нелинейностью // Челябинский физ.-мат. журн. 2019. Т. 4. Вып. 2. С. 142–154.
14. *da Silva C.E.L., Jacquemard A., Teixeira M.A.* Periodic solutions of a class of non-autonomous discontinuous second-order differential equations // J. Dyn. Control Syst. 2020. V. 26. № 1. P. 17–44.
15. *Ким Д.П.* Теория автоматического управления. Т. 2. М., 2004.
16. *Kamachkin A.M., Potapov D.K., Yevstafyeva V.V.* On uniqueness and properties of periodic solution of second-order nonautonomous system with discontinuous nonlinearity // J. Dyn. Control Syst. 2017. V. 23. № 4. P. 825–837.

17. *Kamachkin A.M., Potapov D.K., Yevstafyeva V.V.* Existence of periodic solutions to automatic control system with relay nonlinearity and sinusoidal external influence // Int. J. Robust Nonlin. Control. 2017. V. 27. № 2. P. 204–211.
18. *Kamachkin A.M., Potapov D.K., Yevstafyeva V.V.* Existence of subharmonic solutions to a hysteresis system with sinusoidal external influence // Electron. J. Differ. Equat. 2017. № 140. P. 1–10.
19. *Solovyov A.M., Semenov M.E., Meleshenko P.A., Reshetova O.O., Popov M.A., Kabulova E.G.* Hysteretic nonlinearity and unbounded solutions in oscillating systems // Proc. Engin. 2017. V. 201. P. 578–583.
20. *Евстафьева В.В.* Периодические решения системы дифференциальных уравнений с гистерезисной нелинейностью при наличии нулевого собственного числа // Укр. мат. журн. 2018. Т. 70. № 8. С. 1085–1096.
21. *Камачкин А.М., Потапов Д.К., Евстафьева В.В.* Динамика и синхронизация циклических структур осцилляторов с гистерезисной обратной связью // Вестн. Санкт-Петербург. ун-та. Прикл. матем. Информ. Проц. упр. 2020. Т. 16. Вып. 2. С. 186–199.
22. *Фурсов А.С., Тодоров Т.С., Крылов П.А., Митрев Р.П.* О существовании колебательных режимов в одной нелинейной системе с гистерезисами // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 8. С. 1103–1121.
23. *Kamachkin A.M., Potapov D.K., Yevstafyeva V.V.* Existence of periodic modes in automatic control system with a three-position relay // Int. J. Control. 2020. V. 93. № 4. P. 763–770.
24. *Евстафьева В.В.* О существовании двухточечно-колебательных решений возмущённой релейной системы с гистерезисом // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 2. С. 169–178.
25. *Евстафьева В.В.* Существование T/k-периодических решений нелинейной неавтономной системы с кратным собственным числом матрицы // Мат. заметки. 2021. Т. 109. № 4. С. 529–543.
26. *Євстаф'єва В.В.* Існування двоточково-коливних розв'язків релейної неавтономної системи з кратним власним числом дійсної симетричної матриці // Укр. мат. журн. 2021. Т. 73. № 5. С. 640–650.
27. *Фурсов А.С., Митрев Р.П., Крылов П.А., Тодоров Т.С.* О существовании периодического режима в одной нелинейной системе // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 8. С. 1104–1115.
28. *Kamachkin A.M., Potapov D.K., Yevstafyeva V.V.* Continuous dependence on parameters and boundedness of solutions to a hysteresis system // Appl. Math. 2022. V. 67. № 1. P. 65–80.
29. *Камачкин А.М., Потапов Д.К., Евстафьева В.В.* Неподвижные точки отображения, порождённого системой обыкновенных дифференциальных уравнений с релейным гистерезисом // Дифференц. уравнения. 2022. Т. 58. № 4. С. 456–469.
30. *Евстафьева В.В., Камачкин А.М., Потапов Д.К.* Периодические режимы в системе автоматического управления с трёхпозиционным гистерезисным реле // Вестн. Санкт-Петербург. ун-та. Прикл. матем. Информ. Проц. упр. 2022. Т. 18. Вып. 4. С. 595–606.

Санкт-Петербургский государственный университет

Поступила в редакцию 07.09.2022 г.
После доработки 27.11.2022 г.
Принята к публикации 22.12.2022 г.