ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 2, с. 164–169

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.984.5

О СПЕКТРАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ САМОСОПРЯЖЁННОГО ОПЕРАТОРА ЧЕТВЁРТОГО ПОРЯДКА

© 2023 г. Д. М. Поляков

Рассматривается спектральная задача для дифференциального оператора четвёртого порядка с вещественными периодическими коэффициентами и с краевыми условиями типа Неймана. Для этого оператора получена асимптотика собственных значений и формула регуляризованного следа.

DOI: 10.31857/S0374064123020036, EDN: PTUFRY

В гильбертовом пространстве $L^2(0,1)$ рассматривается спектральная задача

$$Hy = y^{(4)} + (py')' + qy, \quad y(0) = y'(0) = y(1) = y'(1) = 0 \tag{1}$$

для самосопряжённого оператора четвёртого порядка $H = H(p,q)$ с областью определения

$$D(H) = \{y \in L^2(0,1) : y', y'', y''' + py' \in W_1^1(0,1), \quad y^{(4)} + (py')' + qy \in L^2(0,1),$$
$$y(0) = y'(0) = y(1) = y'(1) = 0\},$$

где коэффициенты p и q являются вещественными периодическими (периода единица) функциями из пространства $L^1(\mathbb{T})$, где $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ – факторпространство.

Цель настоящей работы – получить асимптотику собственных значений и формулу следа для дифференциального оператора H.

С точки зрения законов механики оператор H описывает колебания балки с жёстко закреплёнными концами. Кроме того, уравнения четвёртого порядка появляются как модельные уравнения для большого класса параболических уравнений высокого порядка, возникающих в статистической механике, моделях фазового поля, гидродинамике или моделях висячих мостов (см. [1, 2] и используемую там литературу).

В последнее время спектральные свойства оператора H достаточно активно изучаются. В работе [3] получена асимптотика собственных значений, а также решена обратная спектральная задача для оператора H с гладкими коэффициентами. В статье [4] для оператора H были описаны изоспектральные потенциалы. Явная формула для характеристической функции была установлена в [5]. В работе [6] получена асимптотика собственных функций для оператора H, а в статье [7] – оценки отклонений спектральных проекторов и оценки равносходимости спектральных разложений для оператора H с функциями $p, q \in L^2(0,1)$. Наконец, положительность оператора H с $p = 0$ и структура спектра исследовались в [8].

Перейдём к описанию свойств оператора H. Спектр $\sigma(H)$ оператора H является чисто дискретным (см. [9, гл. 1, § 2, 4]). Введём в рассмотрение фундаментальные решения φ_j, $j = \overline{1,4}$, уравнения

$$y^{(4)} + (py')' + qy = \lambda y, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{2}$$

При этом фундаментальные решения удовлетворяют условиям

$$\varphi_j^{(k-1)}(0,\lambda) = \delta_{jk}, \quad k = 1,2,3, \quad (\varphi_j''' + p\varphi_j')(0,\lambda) = \delta_{j4},$$

где δ_{jk} – символ Кронекера. Спектр $\sigma(H)$ состоит из вещественных собственных значений, и справедливо соотношение $\sigma(H) = \{\lambda \in \mathbb{C} : D(\lambda) = 0\}$, где D – целая функция вида

$$D(\lambda) = -\det \begin{pmatrix} \varphi_3(1,\lambda) & \varphi_4(1,\lambda) \\ \varphi_3'(1,\lambda) & \varphi_4'(1,\lambda) \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Спектр оператора H – вещественный, полуограниченный снизу и состоит из собственных значений λ_n, $n \in \mathbb{N}$, которые будут занумерованы (с учётом кратности) следующим образом: $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots$ В невозмущённом случае $(p = q = 0)$ все собственные значения λ_n^0 допускают следующую асимптотику (см. [3, следствие 1]):

$$\lambda_n^0 = (\pi/2 + \pi n)^4 + \mathcal{O}(n^2), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Отметим, что все собственные значения λ_n^0 являются простыми (см. [6, теорема 2.1]).

Перейдём к описанию основных результатов настоящей статьи. Первая теорема будет посвящена доказательству асимптотики собственных значений рассматриваемого оператора при высоких энергиях. Указанные асимптотики будут приведены в терминах коэффициентов Фурье функции p в случае, если $p, q \in L^1(\mathbb{T})$. Кроме того, асимптотика собственных значений будет записана с бо́льшей точностью (в предположении более гладких коэффициентов).

Введём коэффициенты Фурье для некоторой функции $f \in L^1(\mathbb{T})$ и любого $n \in \mathbb{Z}$ следующим образом:

$$f_0 = \int\limits_0^1 f(x)\,dx, \quad \widehat{f}_n = \int\limits_0^1 f(x)e^{-i\pi(2n+1)x}\,dx, \quad \widehat{f}_{sn} = \int\limits_0^1 f(x)\sin(\pi(2n+1)x)\,dx.$$

Имеет место следующая

Теорема 1. *Пусть* $p, q \in L^1(\mathbb{T})$ *и число* $n \in \mathbb{N}$ *выбрано достаточно большим. Тогда собственные значения* λ_n *являются простыми и удовлетворяют асимптотике*

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right)^4 - \left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right)^2 (p_0 + \widehat{p}_{sn} + \varkappa_{1,n}) + \mathcal{O}(n), \quad n \to +\infty, \tag{3}$$

где

$$\varkappa_{1,n} = \int\limits_0^1 e^{-\pi(n+1/2)s}(p(s) + p(1-s))(e^{-\pi(n+1/2)s} - 2\sin\pi(n+1/2) - 2\cos\pi(n+1/2))\,ds.$$

В случае, если $p''', q' \in L^1(\mathbb{T})$, *справедливо асимптотическое представление*

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right)^4 - \left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right)^2 (p_0 + \widehat{p}_{sn}) + 3\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right)p(0) + \frac{p_0^2 - \|p\|^2}{8} + q_0 - \widehat{q}_{sn} -$$
$$- \frac{p''(0)}{2\pi(2n+1)} - \frac{4\varkappa_{2,n}}{\pi(2n+1)} + \frac{2q(0)}{\pi(2n+1)} + \mathcal{O}(n^{-2}), \quad n \to +\infty, \tag{4}$$

где

$$\varkappa_{2,n} = \int\limits_0^1 e^{-\pi(n+1/2)s}\left(\frac{1}{2}(p'''(s) - p'''(1-s))\left(\sin(\pi(n+1/2)s) + \frac{e^{-\pi(n+1/2)s}}{8}\right) + \right.$$
$$\left. + (q'(1-s) - q'(s))\left(\sin(\pi(n+1/2)s) + \frac{e^{-\pi(n+1/2)s}}{4}\right)\right)ds.$$

В статьях [3, следствие 1] и [6, теорема 3.1] была получена асимптотика собственных значений оператора H для коэффициентов $p \in C^3[0,1]$ и $q \in C^1[0,1]$. Однако указанная асимптотика содержала только главное слагаемое и остаток. В теореме 1 установлена точная асимптотика собственных значений в наиболее общем случае.

Использовав теорему 1, получим формулу следа для оператора H. Рассмотрим оператор $H_t(p_t, q_t)$ вида (1) со сдвигом в коэффициентах, т.е. $p_t = p(\cdot + t)$, $q_t = q(\cdot + t)$, $t \in \mathbb{T}$. Через $\lambda_n(t)$, $t \in \mathbb{T}$, обозначим собственные значения оператора H_t.

Теорема 2. *Пусть* $p'''', q'' \in L^1(\mathbb{T})$. *Тогда существует такое число* $N = N(p,q) \in \mathbb{N}$, *что каждая из функций* $\sum_{n=1}^{N} \lambda_n(t)$ *и* $\lambda_n(t)$, $n > N$, *принадлежит пространству* $C^2(\mathbb{T})$. *Кроме того, имеет место следующая формула следа:*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda_n(t)-\lambda_n(0)-3(p(t)-p(0))\left(\frac{\pi}{2}+\pi n\right)+\frac{p''(t)-p''(0)}{2\pi(2n+1)}-\frac{2(q(t)-q(0))}{\pi(2n+1)}\right)=$$

$$=\frac{p''(t)-p''(0)}{2}+q(0)-q(t)+\frac{p^2(t)-p^2(0)}{4}, \tag{5}$$

где ряд сходится абсолютно и равномерно на множестве $\mathbb{T}$.

Асимптотика (4) показывает, что если $p'''', q'' \in L^1(\mathbb{T})$, то ряд (5) сходится абсолютно и равномерно на $\mathbb{T}$. Доказательство теоремы 2 основано на асимптотическом анализе разности резольвент возмущённого и невозмущённого операторов H и H_0.

Теперь кратко опишем схему доказательства теоремы 1. Она будет основана на матричном варианте метода Биркгофа, развиваемого в работах [10, 11]. Пусть $z = \lambda^{1/4}$, $z \in \mathcal{Z}_+$, $\lambda \in \mathbb{C}$, где $\mathcal{Z}_+ = \{z \in \mathbb{C} : \arg z \in (0, \pi/4)\}$. Введём в рассмотрение параметры $\omega_1 = -\omega_4 = i$, $\omega_2 = -\omega_3 = 1$. Тогда имеют место неравенства

$$\operatorname{Re}(i\omega_1 z) \leqslant \operatorname{Re}(i\omega_2 z) \leqslant \operatorname{Re}(i\omega_3 z) \leqslant \operatorname{Re}(i\omega_4 z), \quad z \in \mathcal{Z}_+. \tag{6}$$

Определим фундаментальную матрицу $A(x,z)$, $x \in [0,1]$, $z \in \mathcal{Z}_+$, уравнения (2) следующим образом:

$$A = \begin{pmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 & \phi_4 \\ \phi_1' & \phi_2' & \phi_3' & \phi_4' \\ \phi_1'' & \phi_2'' & \phi_3'' & \phi_4'' \\ \phi_1''' + p\phi_1' & \phi_2''' + p\phi_2' & \phi_3''' + p\phi_1' & \phi_4''' + p\phi_4' \end{pmatrix}, \tag{7}$$

где ϕ_j, $j = \overline{1,4}$, – фундаментальные решения уравнения (2), удовлетворяющие асимптотике

$$\phi_j(x,z) = e^{izx\omega_j}(1 + \mathcal{O}(z^{-1})), \quad \phi_j'(x,z) = iz\omega_j e^{izx\omega_j}(1 + \mathcal{O}(z^{-1})) \tag{8}$$

при $|z| \to \infty$. Существование таких решений установлено в [9, гл. 2]. Матрично-значная функция A удовлетворяет уравнению

$$A' = \mathcal{P}A, \quad \text{где} \quad \mathcal{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -p & 0 & 1 \\ \lambda - q & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Следовательно, функция A – решение уравнения (9), для которого выполнена асимптотика

$$A(x,z) = \Omega(z)(\mathbb{I}_4 + \mathcal{O}(z^{-1}))e^{izx\mathcal{T}}, \quad x \in [0,1], \tag{10}$$

при $|z| \to \infty$, $z \in \mathcal{Z}_+$, где $\mathbb{I}_4$ – единичная матрица размерности 4×4 и

$$\mathcal{T} = \operatorname{diag}(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4) = \operatorname{diag}(i, 1, -1, -i), \quad \Omega = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -z & iz & -iz & z \\ z^2 & -z^2 & -z^2 & z^2 \\ -z^3 & -iz^3 & iz^3 & z^3 \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Основная идея исследования состоит в асимптотическом анализе фундаментальной матрицы A для достаточно больших $|z|$. Такой анализ является стандартным при изучении спектральных свойств оператора Шрёдингера. Однако в случае оператора четвёртого порядка появляются дополнительные сложности, связанные с тем, что фундаментальная матрица содержит как экспоненциально растущие элементы, так и экспоненциально убывающие элементы при $|z| \to \infty$ в любом направлении.

Перейдём к изучению асимптотического поведения фундаментальной матрицы. Пусть $z \in \in \mathcal{Z}_+$ и A – матрично-значное решение уравнения (9) вида (7). Введём в рассмотрение матрично-значную функцию Y такую, что выполняется равенство

$$A(x,z) = \Omega(z)Y(x,z), \quad x \in [0,1], \quad z \in \mathcal{Z}_+. \tag{12}$$

Подставив это выражение в (9) и использовав тождество $\Omega^{-1}\mathcal{P}\Omega = iz\mathcal{T} + P/z$, получим, что Y удовлетворяет уравнению $Y' - iz\mathcal{T}Y = PY/z$, где P – некоторая матрица, явный вид которой легко записать. Несложно найти обратный оператор к оператору в левой части последнего уравнения (подробнее см. в [11]). Рассмотрим матрично-значную функцию X такую, что

$$Y(x,z) = X(x,z)e^{izx\mathcal{T}}, \quad x \in [0,1], \quad z \in \mathcal{Z}_+. \tag{13}$$

Тогда X – решение дифференциального уравнения

$$X' + iz(X\mathcal{T} - \mathcal{T}X) = PX/z,$$

которое (как и эквивалентное ему уравнение (9)) имеет много решений. Выберем решение X, удовлетворяющее условиям

$$X_{jk}(0,z) = 0, \quad j < k, \quad X_{jk}(1,z) = \delta_{jk}, \quad j \geqslant k.$$

Выбор X приводит к необходимому решению A уравнения (9) вида (7).

Пусть $|z|$ – достаточно большое число. В работе [11] было показано, что X – единственное решение интегрального уравнения

$$X = \mathbb{I}_4 + \frac{KX}{z}, \tag{14}$$

где

$$(KX)_{lj}(x,z) = \int\limits_0^1 K_{lj}(x,s,z)(PX)_{lj}(s,z)\,ds, \quad l,j = \overline{1,4},$$

$$K_{lj}(x,s,z) = \begin{cases} e^{iz(x-s)(\omega_l-\omega_j)}\chi(x-s), & l < j, \\ -e^{iz(x-s)(\omega_l-\omega_j)}\chi(s-x), & l \geqslant j, \end{cases} \quad \chi(s) = \begin{cases} 1, & s \geqslant 0, \\ 0, & s < 0. \end{cases}$$

Оценки (6) показывают, что для ядра интегрального оператора K выполнено неравенство $|K_{lj}(x,s,z)| \leqslant 1$ для всех $l,j = \overline{1,4}$ и $(x,s,z) \in [0,1] \times [0,1] \times \mathcal{Z}_+$. Тогда, применив метод простых итераций к интегральному уравнению (14), получим асимптотику

$$X(x,z) = \mathbb{I}_4 + \mathcal{O}(z^{-1})$$

при $|z| \to \infty$, $z \in \mathcal{Z}_+$, равномерно по $x \in [0,1]$. Проведённые выше рассуждения показывают, что Y допускает представление (13), где X удовлетворяет полученной асимптотике. Подставив (13) в (12), имеем равенство (10).

Таким образом, установлена теорема о факторизации для матрично-значного решения уравнения (9). Эта теорема играет ключевую роль для доказательства асимптотики собственных значений оператора H.

Теорема 3. *Пусть $p,q \in L^1(\mathbb{T})$. Тогда существует матрично-значное решение A уравнения (9) такое, что каждая функция $A(x,\cdot)$, $x \in [0,1]$, является аналитической в $\mathcal{Z}_+$ для достаточно большого $|z|$ и удовлетворяет равенству*

$$A(x,z) = \Omega(z)X(x,z)e^{izx\mathcal{T}}, \tag{15}$$

где X – решение интегрального уравнения (14), $\mathcal{T}$ и Ω имеют вид (11).

Согласно формуле (15) фундаментальная матрица A представима в виде произведения матрицы Ω простой структуры, ограниченной матрицы и диагональной матрицы, причём диагональная матрица содержит все экспоненциально растущие слагаемые. Таким образом, становится удобно анализировать свойства фундаментальной матрицы A.

Основываясь на формуле (15) факторизации фундаментальной матрицы A, установим асимптотику характеристической функции D. Напомним, что её нули являются спектром оператора H. Пусть $(x,z)\in[0,1]\times\mathcal{Z}_+$ и значение $|z|$ является достаточно большим. Несложно показать, что справедлива формула

$$D(\lambda)=\frac{\det\phi(z)}{\det A(0,z)}, \tag{16}$$

где

$$\phi(z)=\begin{pmatrix}\phi_1(0,z) & \phi_2(0,z) & \phi_3(0,z) & \phi_4(0,z)\\ \phi_1'(0,z) & \phi_2'(0,z) & \phi_3'(0,z) & \phi_4'(0,z)\\ \phi_1(1,z) & \phi_2(1,z) & \phi_3(1,z) & \phi_4(1,z)\\ \phi_1'(1,z) & \phi_2'(1,z) & \phi_3'(1,z) & \phi_4'(1,z)\end{pmatrix}. \tag{17}$$

Из асимптотики (10) и формулы (11) непосредственно следует, что

$$\det A(0,z)=-16iz^6(1+\mathcal{O}(z^{-1})) \tag{18}$$

при $|z|\to\infty$, $z\in\mathcal{Z}_+$. Полученная асимптотика и равенство (16) показывают, что большие положительные нули функции D совпадают с нулями $\det\phi(z)$. Следовательно, возникает необходимость преобразовать определитель матрицы ϕ вида (17). Раскрыв определитель, получим следующую асимптотику:

$$\det\phi(z)=\xi_1(z)\xi_2(z)+\xi_3(z)\xi_4(z)+\mathcal{O}(z^4) \tag{19}$$

в секторе $\mathcal{Z}_+$, где

$$\xi_1(z)=\det\begin{pmatrix}\phi_3(1,z) & \phi_4(1,z)\\ \phi_3'(1,z) & \phi_4'(1,z)\end{pmatrix},\quad \xi_2(z)=\det\begin{pmatrix}\phi_1(0,z) & \phi_2'(0,z)\\ \phi_1'(0,z) & \phi_2'(0,z)\end{pmatrix},$$

$$\xi_3(z)=\det\begin{pmatrix}\phi_2(1,z) & \phi_4(1,z)\\ \phi_2'(1,z) & \phi_4'(1,z)\end{pmatrix},\quad \xi_4(z)=\det\begin{pmatrix}\phi_3(0,z) & \phi_1(0,z)\\ \phi_3'(0,z) & \phi_1'(0,z)\end{pmatrix}.$$

Подставив асимптотики (18) и (19) в (16), имеем

$$D(\lambda)=\frac{i}{16z^6}(\xi_1(z)\xi_2(z)+\xi_3(z)\xi_4(z)+\mathcal{O}(z^4)) \tag{20}$$

при $|z|\to\infty$. Последнее соотношение показывает, что асимптотический анализ нулей определителя $\det\phi(z)$ размерности 4×4 сводится к анализу нулей суммы произведений определителей размерности 2×2.

Отметим, что асимптотика (8) является достаточно грубой и не даёт точной асимптотики нулей функции D. Однако, применяя теорему Руше, можно вычислить количество нулей в круге большого радиуса, а также их локализацию. Взяв следующие слагаемые итерационного ряда в качестве приближения решения интегрального уравнения (14), мы улучшаем асимптотику фундаментальной матрицы A, а значит, и асимптотику ϕ_j, $j=\overline{1,4}$. Подставляя эту более точную асимптотику ϕ_j в (20), получаем спектральные асимптотики (3) и (4) нулей функции D.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке гранта Президента Российской Федерации для молодых учёных – кандидатов наук (проект МК-160.2022.1.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Gupta C.P.* Existence and uniqueness theorems for some fourth order fully quasilinear boundary value problems // Appl. Anal. 1990. V. 36. P. 157–169.
2. *Peletier L.A., Rodrigues J.A.* Homoclinic orbits to a saddle-center in a fourth-order differential equation // J. Differ. Equat. 2004. V. 203. P. 185–215.
3. *McLaughlin J.R.* An inverse eigenvalue problem of order four – an infinite case // SIAM J. Math. Anal. 1978. V. 9. № 3. P. 395–413.
4. *Caudill Jr L.F., Perry P.A., Schueller A.W.* Isospectral sets for fourth-order ordinary differential operators // SIAM J. Math. Anal. 1998. V. 29. № 4. P. 935–966.
5. *Boumenir A.* Sampling for the fourth-order Sturm–Liouville differential operator // J. Math. Anal. Appl. 2003. V. 278. P. 542–550.
6. *Керимов Н.Б., Алиев З.С.* О базисности системы собственных функций одной спектральной задачи со спектральным параметром в граничном условии // Дифференц. уравнения. 2007. Т. 43. № 7. С. 886–895.
7. *Поляков Д.М.* Спектральный анализ несамосопряжённого оператора четвёртого порядка с негладкими коэффициентами // Сиб. мат. журн. 2015. Т. 56. № 1. С. 165–184.
8. *Ma R., Wang H., Elsanosi M.* Spectrum of a linear fourth-order differential operator and its applications // Math. Nachr. 2013. V. 286. P. 1805–1819.
9. *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. М., 1969.
10. *Баданин А.В., Коротяев Е.Л.* Спектральные оценки для периодического оператора четвёртого порядка // Алгебра и анализ. 2010. Т. 22. № 5. С. 1–48.
11. *Badanin A., Korotyaev E.L.* Third-order operators with three-point conditions associated with Boussinesq's equation // Appl. Anal. 2021. V. 100. P. 527–560.

Южный математический институт –
филиал Владикавказского научного центра РАН

Поступила в редакцию 10.06.2022 г.
После доработки 10.06.2022 г.
Принята к публикации 20.01.2023 г.