ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 2, с. 170–182

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.925

О БАЗИСЕ ГРЁБНЕРА ИДЕАЛА ЛЯПУНОВСКИХ ВЕЛИЧИН СИСТЕМЫ КУКЛЕСА

© 2023 г. А. Е. Руденок, М. Н. Василевич

Изучены проблема центра и цикличность особых точек системы Куклеса. Необходимые условия центра в начале координат получены как многообразие идеала ляпуновских величин, вычисленных непосредственным решением полиномиальной системы, левые части которой составляют базис Грёбнера идеала. Этот идеал использован также для вычисления цикличности центров и фокусов системы. Доказана теорема, которая позволяет находить цикличность центров полиномиальных систем, используя вместо идеала ляпуновских величин его базис Грёбнера.

DOI: 10.31857/S0374064123020048, EDN: PUHQOJ

Введение. Система Куклеса (см. [1]) представляет собой систему вида

$$\dot{x} = -y, \quad \dot{y} = x(1 - Ax - Kx^2) - 3xy(B + Lx) + (A - U - Mx)y^2 - Ny^3, \tag{1}$$

где $A,$ $B,$ $K,$ $L,$ $M,$ $N,$ U – вещественные константы.

И.С. Куклес был первым в изучении систем вида (1), и с тех пор они и их обобщения называются *системами Куклеса* и *обобщёнными системами Куклеса*. Считается [2], что решение задачи о различении центра и фокуса для системы Куклеса было дано независимо Н.Г. Ллойдом и Дж.М. Пирсоном [3], а также А.П. Садовским [4, 5] с использованием разных подходов.

В частности, в работе [3] для облегчения вычислений значение коэффициента B было положено равным единице. Это возможно, если $B \neq 0,$ поскольку ляпуновские величины представляют собой однородные (в обобщённом смысле) полиномы. Многообразие центра было получено с помощью решения системы из результантов постоянных Ляпунова и с использованием ресурсов вычислительных центров (Manchester Computing Center и Minnesota Supercomputer Center). Для доказательства достаточности условий центра использовался метод построения первого интеграла с помощью инвариантных алгебраических кривых.

В отличие от авторов [3], А.П. Садовский в статьях [4, 5] полагал коэффициент B равным коэффициенту $N,$ если $BN \neq 0.$ Это возможно по той же причине однородности ляпуновских величин. Основным инструментом исследования в статье [4] является метод Л.А. Черкаса, с помощью которого затруднительно получить необходимые условия центра, но он позволяет сравнительно просто доказывать достаточность условий центра. В работе [5] А.П. Садовский, используя свою программу для вычисления ляпуновских величин в пакете Mathematica 4.0, вычислил первые семь постоянных Ляпунова. Многообразие идеала, образованное из этих многочленов, он нашел с помощью их результантов. Необходимо отметить сложность вычислений этих результантов, степени которых достигали значения 996.

В работе [6], которую можно считать продолжением работы [3], авторы отмечают, что наиболее требовательным аспектом их работы является вычисление результантов многомерных полиномов. В ней они применили разработанное ими программное обеспечение для более эффективного вычисления результантов. Они также использовали модульную арифметику, чтобы избежать необходимости вычислять некоторые очень большие результанты.

В статье [7] показано, что система Куклеса при $N = 0$ может иметь негрубый фокус пятого порядка и не менее пяти малоамплитудных предельных циклов, рождающихся из него. В [8] приведена система со значением $B = 0,$ которая имеет негрубый фокус шестого порядка, из которого рождаются шесть малоамплитудных предельных циклов.

В монографии [9, с. 125] А.П. Садовский вычислил базис Грёбнера идеала, образующие которого состоят из семи ляпуновских величин, а сам базис Грёбнера состоит из пятидесяти семи многочленов. Из-за громоздкости этого базиса трудно найти непосредственно из него многообразие центра.

В работе [10] применяется новый метод получения необходимых и достаточных условий центра, разработанный А. П. Садовским и основанный на методе нормальных форм. Вместо изучения многообразия идеала фокусных величин исследуется многообразие идеала, базисом которого являются полиномы, полученные новым методом. В отличии от статьи [5], в этом исследовании результанты не применялись. Здесь был вычислен радикал идеала, его базис Грёбнера (не представленный в явном виде), а также его многообразие.

В настоящей статье удалось избежать больших вычислений, которые обычно возникают при использовании результантов. Найдено многообразие центра непосредственно при решении полиномиальной системы, левые части которой составляют базис Грёбнера идеала постоянных Ляпунова. Для упрощения вычислений сделаны подходящие замены коэффициентов системы Куклеса или параметризация многообразия идеала. При этом базис Грёбнера идеала оказывается таким, что во всех рассматриваемых в настоящей статье случаях он представлен в полном виде и не составляет труда найти его многообразие. Также находится число малоамплитудных предельных циклов, рождающихся из особой точки типа центр или фокус, с помощью матрицы Якоби вектор-функции, состоящей из постоянных Ляпунова. Доказана теорема, которая позволяет находить цикличность центров полиномиальных систем, используя вместо идеала ляпуновских величин его базис Грёбнера, что существенно сокращает вычисления.

1. Условия центра для системы нелинейных колебаний. Рассмотрим систему нелинейных колебаний третьей степени по переменной y:

$$\dot{x} = -y, \quad \dot{y} = xP_0(x) + 3xyP_1(x) + y^2P_2(x) + y^3P_3(x). \tag{2}$$

Преобразование

$$y \to \frac{yP_0(x)}{1 - yP_1(x)} \tag{3}$$

переводит систему (2) в систему

$$\dot{x} = -y, \quad \dot{y} = \frac{x}{\varphi(x)}(1 - B_2(x)y^2 - B_3(x)y^3), \tag{4}$$

где

$$\varphi(x) = P_0(x), \quad B_2(x) = -\frac{-3xP_1(x)^2 + P_0(x)P_2(x) + P_0'(x)}{x},$$

$$B_3(x) = -\frac{1}{x}(2xP_1(x)^3 - P_0(x)P_1(x)P_2(x) + P_0(x)^2P_3(x) - P_1(x)P_0'(x) + P_0(x)P_1'(x)). \tag{5}$$

Заметим, что для перехода от системы (2) к системе (4) используется не только замена (3), но и масштабирование независимой переменной t.

Применим к системе (4) преобразование $y \to y/\Psi(x)$, где

$$\Psi(x) = \exp\biggl(-\int\limits_0^x \frac{uB_2(u)}{\varphi(u)}\,du\biggr). \tag{6}$$

С учётом масштабирования переменной t получим систему

$$\dot{x} = -y, \quad \dot{y} = \frac{x}{\varphi(x)\Gamma(x)^2}(1 - \Gamma(x)^3B_3(x)y^3), \tag{7}$$

здесь $\Gamma(x) = 1/\Psi(x)$. Рассмотрим систему

$$\dot{x} = -y, \quad \dot{y} = x + xf(x) + y^{2n+1}g(x), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{8}$$

где $f(x)$, $g(x)$ – голоморфные в окрестности точки $x=0$ функции $f(0)=0$. Введём обозначения

$$\varphi(x)=\frac{1}{1+f(x)},\quad \beta_1(x)=-\frac{\varphi(x)}{x}g(x),$$

тогда система (8) примет вид

$$\dot x=-y,\quad \dot y=\frac{x}{\varphi(x)}(1-y^{2n+1}\beta_1(x)). \tag{9}$$

В дальнейшем будем использовать обозначения для произвольной функции $h(x)$ и заданной функции $\varphi(x)$, голоморфных в окрестности точки $x=0$:

$$d(h)=\frac{\varphi(x)}{x}h'(x).$$

Рассмотрим последовательность функций

$$\gamma_1=\beta_1,\quad \gamma_3=\frac{\varphi}{x}\gamma_1'=d(\gamma_1),\quad \gamma_5=\frac{\varphi}{x}\gamma_3'=d(\gamma_3),\quad \ldots,\quad \gamma_{2s+1}(x)=d(\gamma_{2s-1}),\quad \ldots \tag{10}$$

Теорема Отрокова [11, с. 110–116]. *Для того чтобы система (9) имела в особой точке $O(0,0)$ центр, необходимо и достаточно, чтобы функции (10) были голоморфными в точке $x=0$.*

Заметим, что хотя Н.Ф. Отроков доказал эту теорему для системы Льенара (т.е. при значении $n=0$ в (9)), из его рассуждений следует, что эта теорема справедлива для системы (9) при всех $n\in\mathbb{N}$.

Будем считать, что в (10) функция $\varphi(x)$ та же, что и в системе (4).

Теорема 1. *Для того чтобы система (4) имела центр в особой точке, необходимо и достаточно, чтобы каждая из функций*

$$B_3,\quad B_5=3B_2B_3+d(B_3),\quad \ldots,\quad B_{2i+1}=(2i-1)B_2B_{2i-1}+d(B_{2i-1}),\quad \ldots \tag{11}$$

была голоморфной в точке $x=0$.

Доказательство. Строим последовательность функций (10) для системы (7). При этом учитываем, что в качестве $\varphi(x)$ будет выбрана функция $\varphi(x)\Gamma(x)^2$, в качестве $\beta_1(x)$ – функция $\Gamma(x)^3B_3(x)$. Учтём также, что из (6) вытекает равенство $\Gamma'(x)=\Gamma(x)xB_2(x)/\varphi(x)$. Имеем последовательность

$$\gamma_1(x)=\Gamma(x)^3B_3(x),$$

$$\gamma_3(x)=\frac{\varphi(x)\Gamma(x)^2}{x}(\Gamma(x)^3B_3(x))'=\frac{\varphi(x)\Gamma(x)^2}{x}\left(3\Gamma(x)^3\frac{xB_2(x)}{\varphi(x)}B_3(x)+\Gamma(x)^3(B_3(x))'\right)=$$

$$=\Gamma(x)^5\left(3B_2(x)B_3(x)+\frac{\varphi(x)B_3'(x)}{x}\right)=\Gamma(x)^5B_5(x),$$

$$\gamma_5(x)=\frac{\varphi(x)\Gamma(x)^2}{x}(\Gamma(x)^5B_5(x))'=\frac{\varphi(x)\Gamma(x)^2}{x}\left(5\Gamma(x)^5\frac{xB_2(x)}{\varphi(x)}B_5(x)+\Gamma(x)^5(B_5(x))'\right)=$$

$$=\Gamma(x)^7\left(5B_2(x)B_5(x)+\frac{\varphi(x)B_5'(x)}{x}\right)=\Gamma(x)^7B_7(x),\quad \ldots$$

Теорема доказана.

2. Базис Грёбнера и многообразие центра системы Куклеса. Заметим, что в качестве ляпуновских величин системы рассматриваются только те из них, которые не равны тождественно нулю в рассматриваемом классе систем.

Для системы Куклеса (1) из равенства нулю первой ляпуновской величины имеем

$$L=-N-BU. \tag{12}$$

С учётом (12) система (1) примет вид

$$\dot{x} = -y, \quad \dot{y} = x(1 - Ax - Kx^2) - 3xy(B - (N + BU)x) + (A - U - Mx)y^2 - Ny^3. \tag{13}$$

В системе (13) сделаем замену

$$N \to -BU + N \tag{14}$$

и получим систему

$$\dot{x} = -y, \quad \dot{y} = x(1 - Ax - Kx^2) - 3xy(B - Nx) + (A - U - Mx)y^2 - (N - BU)y^3. \tag{15}$$

Теорема 2. *Для того чтобы система (15) имела центр в начале координат, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из следующих условий:*

a) $B = 0,\ N = 0;$

b) $U = 0,\ N = 0,\ A = 0;$

c) $B = 0,\ N = -U^2/(3\sqrt{2}),\ A = -U,\ M = 0,\ K = -U^2/3;$

d) $B = 0,\ N = U^2/(3\sqrt{2}),\ A = -U,\ M = 0,\ K = -U^2/3;$

e) $M = -2B^2,\ K = 0,\ A = 0,\ N = 0;$

f) $U = 0,\ N = -B^2s^2(2 + s^4)/2,\ K = -B^2s^4(2 + s^4)/2,\ M = B^2(-2 + s^4)(2 + s^4)/2,\ A = -Bs^2(4 + s^4)/2;$

g) $U = 0,\ N = B^2s^2(2 + s^4)/2,\ K = -B^2s^4(2 + s^4)/2,\ M = B^2(-2 + s^4)(2 + s^4)/2,\ A = Bs^2(4 + s^4)/2;$

h) $N = BU,\ M = (A - U)^2U/(A - 2U),\ K = U(-A + U);$

i) $N = B^2s(2+s^2)/2,\ A = Bs(4+s^2)/2,\ K = -B^2s^2(2+s^2)/2,\ M = B(-4B+Bs^4-2sU)/2;$

k) $A = -\dfrac{16U}{(2 + s^2)^2},\ B = \dfrac{4(-2 + s^2)U}{s(2 + s^2)^2},\ K = -\dfrac{64U^2}{s^2(2 + s^2)^2(4 + s^2)},\ M = \dfrac{8(-2 + s^2)U^2}{(2 + s^2)^2(4 + s^2)},\ N = -\dfrac{32U^2}{s(2 + s^2)^2(4 + s^2)}.$

Здесь s *– произвольный параметр.*

Доказательство. С учётом (12) и (14) формулы (5) примут вид

$$\varphi(x) = 1 - Ax - Kx^2,$$

$$B_2(x) = \frac{1}{x}(U + (A^2 + 3B^2 + 2K + M - AU)x + (AK - AM - KU - 6BN)x^2 + (-KM + 3N^2)x^3),$$

$$B_3(x) = B(A^2 + 2B^2 + 2K + M + AU) - N(A + U) +$$
$$+ ((-6B^2 - 3K - M + AU)N - B(-AK + AM + A^2U - KU))x +$$
$$+ (-BK(M + 2AU) + N(AK + AM + 6BN + KU))x^2 + (-BK^2U + N(K^2 + KM - 2N^2))x^3. \tag{16}$$

Вычислим идеал J, образованный из первых шести ляпуновских величин системы (15), например, используя программу А.П. Садовского [5]. Следует заметить, что в [5] эта программа приведена с опечатками, которые в наших вычислениях исправлены. Первый член идеала J есть полином

$$ABK - ABM - 6B^2N - 3KN - MN + 2A^2BU + 6B^3U + 7BKU + 3BMU - 2ANU + 3ABU^2 - 3NU^2.$$

Остальные пять образующих идеала J мы не приводим из-за их громоздкости, в частности, степень шестого члена идеала равна $\{6, 6, 7, 7, 12, 13\}$ по переменным $\{K, M, N, U, A, B\}$ соответственно и состоит из 9097 слагаемых.

В дальнейшем при вычислении базиса Грёбнера идеала J можем полагать значение U равным либо нулю, либо единице. Это вытекает из того факта, что образующие идеала J представляют собой однородные (в обобщённом смысле) многочлены. Если $U \neq 0$, то замена

$$A \to AU, \quad B \to BU, \quad N \to NU^2, \quad K \to KU^2, \quad M \to MU^2 \tag{17}$$

сводит идеал J к идеалу, который получается из J при значении U, равном единице.

1. Рассмотрим случай $U = 0$.

Положив $U = 0$ в идеале J, получим идеал, который обозначим через j.

1.1. Рассмотрим сначала подслучай $N = 0$.

Базис Грёбнера идеала j в порядке переменных $\{B, M, A, K\}$ равен $\langle ABK^2, AB(M-K)\rangle$. Отсюда получим многообразие этого идеала:

1) $U = 0$, $N = 0$, $B = 0$;

2) $U = 0$, $N = 0$, $A = 0$;

3) $U = 0$, $N = 0$, $K = 0$, $M = 0$.

Подставив эти значения в формулы (16), получим:

случай 1) $\varphi(x) = 1 - Kx^2$, $B_2(x) = 3B^2 + 2K + M - KMx^2$, $B_3(x) = B(2B^2 + 2K + M - KMx^2)$, что соответствует симметрии поля направлений системы (15) относительно оси Oy;

случай 2) $B_3(x) = 0$, что соответствует симметрии поля направлений системы (15) относительно оси Ox;

случай 3) функции равны

$$\varphi(x) = 1 - Ax, \quad B_2(x) = A^2 + 3B^2, \quad B_3(x) = B(A^2 + 2B^2).$$

По формулам (13) получим

$$B_5(x) = 3B(A^2 + 2B^2)(A^2 + 3B^2), \quad B_7(x) = 15B(A^2 + 2B^2)(A^2 + 3B^2)^2.$$

Методом математической индукции, используя формулы (11), легко доказать, что

$$B_{2n+1}(x) = (2n-1)!!B(A^2 + 2B^2)(A^2 + 3B^2)^{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Следовательно, на основании теоремы 1 система (15) имеет в начале координат центр.

Полученный случай 1) есть частный случай п. a) теоремы 2, при выполнении которого, как легко проверить, $B_3(x) = 0$. В формулировке теоремы 2 полученный случай 3) заменён на более общий случай п. h), который будет рассмотрен далее.

1.2. Рассмотрим теперь подслучай $N \neq 0$. Если $N > 0$, то замена

$$A \to An, \quad B \to Bn, \quad N \to n^2, \quad K \to Kn^2, \quad M \to Mn^2 \tag{18}$$

сводит идеал j к идеалу, в котором $N = 1$. Вычислив базис Грёбнера этого идеала в порядке переменных $\{B, M, A, K\}$, получим

$$g_1 = \langle (1+K^2)^3(4A^2 + 16K + 2A^2K^2 + 8K^3 + K^5),$$

$$(1+K^2)^2(2A^2 - 31K - K^3)(4A^2 + 16K + 2A^2K^2 + 8K^3 + K^5),$$

$$(1+K^2)(-2 + K^2 + KM),$$

$$220 + 148A^2K + 482K^2 + 150A^2K^3 + 610K^4 + 76A^2K^5 +$$

$$+ 331K^6 + 14A^2K^7 + 80K^8 + 7K^{10} + 20A^2M - 30KM,$$

$$(3K + M)(-2 + K^2 + KM),$$

$$(1+K^2)(4A^3 + 360B + 106AK + 6A^3K^2 + 90BK^2 +$$

$$+ 24AK^3 + 2A^3K^4 + 9AK^5 + AK^7 + 90AM),$$

$$-72 + 36AB - 50A^2K - 182K^2 - 44A^2K^3 - 185K^4 -$$

$$- 22A^2K^5 - 96K^6 - 4A^2K^7 - 23K^8 - 2K^{10},$$

$$60A - 4A^3K + 630BK + 89AK^2 - 10A^3K^3 + 90BK^3 - 40AK^4 - 8A^3K^5 -$$

$$- 33AK^6 - 2A^3K^7 - 10AK^8 - AK^{10} + 180BM + 150AKM + 45AM^2,$$

$$254A^2+540B^2+476K+20A^2K^2+485K^3-2A^2K^4-12K^5-\\-8A^2K^6-25K^7-4K^9+270M+270K^2M\rangle.$$

Решив систему $g_1=0$ относительно переменных $\{B,M,A,K\}$ и исключив комплексные случаи, имеем значения

$$B=\pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{-K}\sqrt{2+K^2}},\quad M=-\frac{-2+K^2}{K},\quad A=\mp\frac{\sqrt{-K}(4+K^2)}{\sqrt{2}\sqrt{2+K^2}}.$$

Это многообразие является вещественным, только если K принимает отрицательные значения. Положив $K=-s^2$ и применив замену, обратную к (18), получим многообразие

$$U=0,\quad \frac{K}{N}=-s^2,\quad \frac{B}{\sqrt{N}}=\frac{\sqrt{2}}{s\sqrt{2+s^4}},\quad \frac{M}{N}=\frac{-2+s^4}{s^2},\quad \frac{A}{\sqrt{N}}=\frac{s(4+s^4)}{\sqrt{2}\sqrt{2+s^4}}. \tag{19}$$

Из третьего равенства в (19) выразим $N=B^2s^2(2+s^4)/2$. Подставив это выражение в остальные равенства (19), получим п. $f)$ теоремы. При этих значениях коэффициентов функция $B_3(x)$ в формулах (16) равна нулю, т.е. система (15) имеет центр в начале координат.

Аналогично рассматривается случай $N<0$. При этом будет получен п. $g)$ теоремы.

2. Рассмотрим случай $U=1$.

2.1. Пусть $B=0$.

Тогда базис Грёбнера идеала J, вычисленный в порядке переменных $\{N,K,M,A\}$, равен

$$h=\langle(1+A)N, MN, (1+3K)N, N(-1+18N^2)\rangle.$$

Решив систему $h=0$ относительно переменных $\{N,K,M,A\}$, получим три случая:

1) $B=0$, $N=0$;

2) $B=0$, $U=1$, $N=-1/(3\sqrt{2})$, $K=-1/3$, $M=0$, $A=-1$;

3) $B=0$, $U=1$, $N=1/(3\sqrt{2})$, $K=-1/3$, $M=0$, $A=-1$.

Во всех трёх случаях функция $B_3(x)=0$, т.е. система (15) имеет центр в начале координат.

Случай 1) уже рассмотрен выше. Применив к случаям 2), 3) преобразование, обратное к (17), получим пп. $c)$, $d)$ теоремы.

2.2. Предположим теперь, что $B\neq 0$.

В системе (15) и в идеале J сделаем замену

$$N\to NB. \tag{20}$$

Получим систему

$$\dot{x}=-y,\quad \dot{y}=x(1-Ax-Kx^2)-3Bx(1-Nx)y+(A-U-Mx)y^2+B(U-N)y^3. \tag{21}$$

Идеал J перейдет в идеал, который после сокращения на множитель B обозначим как J_1. Положим в нем $U=1$, $B=\sqrt{b}$ и обозначим полученный идеал J_2. Вычислив его базис Грёбнера в порядке переменных $\{b,M,K,A,N\}$, имеем

$$g_2=\langle(K+AN-N^2)(A^2-4AN-2A^2N+4N^2+5AN^2+A^2N^2),\\(K+AN-N^2)(-K-AN+KN+N^2+AN^2),(A^2+4K+AK)(K+AN-N^2),\\A^2-K-AK+AM-4AN-3A^2N-3KN-2MN+3N^2+3AN^2,\\2AK+KM+A^2N-2KN-2AKN-AN^2+3KN^2+MN^2,\\(-1+N)(A+A^2+2b+2K+M-N-AN),\\-A-A^2+A^3-2b+2Ab-K+2AK+A^2K+2bK+2K^2-M+N+\\+4AN+A^2N+4KN+AKN+2MN-3N^2-2AN^2-3KN^2-MN^2\rangle.$$

Замечание 1. Объединив замены (14) и (20), получим замену $N \to -BU+NB$, ключевую в данной работе. Она позволила представить базис Грёбнера идеала ляпуновских величин системы Куклеса (при условии $UB \neq 0$) в простом виде g_2. В статье [10] базис Грёбнера содержит пятьдесят семь многочленов, из которых затруднительно вычислить многообразие идеала. Впервые эта замена представлена в материалах конференции [12].

2.2.1. Учитывая разложение пятого члена базиса g_2 на множители, рассмотрим сначала случай $N=1$.

Решив систему $g_2=0$ относительно переменных $\{N,K,M,A\}$, получим

$$N=1, \quad M=\frac{(-1+A)^2}{-2+A}, \quad K=1-A. \tag{22}$$

Формулы (16) при выполнении условий (22) примут вид

$$\varphi(x)=(-1+x)(-1-x+Ax),$$

$$B_2(x)=\frac{1}{(-2+A)x}(2+A+(-3+6A-4A^2+A^3-6b+3Ab)x-$$

$$-2(-1+3A-3A^2+A^3-6b+3Ab)x^2+(-1+3A-3A^2+A^3-6b+3Ab)x^3),$$

$$B_3(x)=-\frac{(-1+3A-3A^2+A^3-4b+2Ab)(-1+x)^3}{-2+A}.$$

Используя формулы (13), вычислим

$$B_5(x)=-\frac{3(-1+3A-3A^2+A^3-4b+2Ab)(-1+3A-3A^2+A^3-6b+3Ab)(-1+x)^5}{(-2+A)^2},$$

$$B_7(x)=-\frac{15(-1+3A-3A^2+A^3-4b+2Ab)(-1+3A-3A^2+A^3-6b+3Ab)^2(-1+x)^7}{(-2+A)^3}.$$

Легко показать, используя метод математической индукции и систему (13), что справедлива формула

$$B_{2n+1}(x)=-\frac{(2n-1)!!(-1+3A-3A^2+A^3-4b+2Ab)}{(-2+A)^n}\times$$

$$\times(-1+3A-3A^2+A^3-6b+3Ab)^{n-1}(-1+x)^{2n+1}.$$

Так как при этом условия теоремы 1 выполняются, то полученное многообразие идеала (22) есть многообразие центра системы (15). Выполнив в нём преобразование, обратное к (17), получим случай п. $h)$ теоремы 2.

2.2.2. Рассмотрим теперь случай $A+A^2+2b+2K+M-N-AN=0$. Вычислив (при выполнении этого условия и условия $N\neq 1$) базис Грёбнера идеала, построенного на базисе g_2, в порядке переменных $\{b,M,K,A,N\}$ будем иметь

$$g_3=\langle (K+AN-N^2)(A^2-4AN-2A^2N+4N^2+5AN^2+A^2N^2),$$

$$(K+AN-N^2)(-K-AN+KN+N^2+AN^2), (A^2+4K+AK)(K+AN-N^2),$$

$$A^2-K-AK+AM-4AN-3A^2N-3KN-2MN+3N^2+3AN^2,$$

$$2AK+KM+A^2N-2KN-2AKN-AN^2+3KN^2+MN^2,$$

$$A+A^2+2b+2K+M-N-AN\rangle.$$

Рассмотрим случаи, соответствующие разложению первого члена этого базиса на множители.

2.2.2.1. В случае $K + AN - N^2 = 0$, решив систему $g_3 = 0$, получим многообразия идеала J_2:

1) $b = -\dfrac{(A-N)^3}{2(A-2N)}$, $M = \dfrac{(A-N)(-A+2N+2AN-3N^2)}{A-2N}$, $K = (N-A)N$;

2) $b = -M/2$, $K = 0$, $A = 0$, $N = 0$.

Случай 2) есть случай п. $e)$ теоремы. В случае 1), поскольку $b = B^2$, с целью избавиться от иррациональности введём параметр s по формуле

$$s^2 = -\frac{2(A-2N)}{A-N}.$$

Получим многообразие центра в параметрическом виде:

$$N = \frac{1}{2}B^2 s(2+s^2), \quad A = \frac{1}{2}Bs(4+s^2), \quad K = -\frac{1}{2}B^2 s^2(2+s^2), \quad M = \frac{1}{2}B(-4B + Bs^4 - 2sU).$$

Выполнив в нём преобразование, обратное к (17), получим случай п. $i)$ теоремы 2. При этих значениях в (16) $B_3(x) = 0$.

2.2.2.2. В случае $A^2 - 4AN - 2A^2N + 4N^2 + 5AN^2 + A^2N^2 = 0$ базис Грёбнера идеала, построенного на базисе g_3, в порядке переменных $\{b, M, K, A, N\}$ равен

$$h_1 = \langle A^2 - 4AN - 2A^2N + 4N^2 + 5AN^2 + A^2N^2, -K - AN + KN + N^2 + AN^2,$$

$$A^2 + 4K + AK, 2A + M - 3N - 3AN, -A + A^2 + 2b + 2K + 2N + 2AN\rangle.$$

Решив систему $h_1 = 0$ и исключив комплексный случай, получим действительное многообразием идеала в виде

$$b = \frac{-3A^2 - A^3 \mp 2A\sqrt{-A}}{2(4+A)}, \quad K = -\frac{A^2}{4+A},$$

$$M = \frac{-2A + A^2 \pm 3A\sqrt{-A}}{4+A}, \quad N = \frac{2A + A^2 \pm A\sqrt{-A}}{(1+A)(4+A)}.$$

Введём параметр s по формуле $A = -16(2+s^2)^{-2}$. Учтём, что $b = B^2$. Возвращаясь к старым переменным (используя преобразования (17), (20)), получим многообразие

$$A = -\frac{16U}{(2+s^2)^2}, \quad B = \frac{4(-2+s^2)U}{s(2+s^2)^2}, \quad K = -\frac{64U^2}{s^2(2+s^2)^2(4+s^2)},$$

$$M = \frac{8(-2+s^2)U^2}{(2+s^2)^2(4+s^2)}, \quad N = -\frac{32U^2}{s(2+s^2)^2(4+s^2)}.$$

Легко проверить, что при этом $B_3(x) = 0$, т.е. это многообразие принадлежит многообразию центра системы (15). Это случай п. $k)$ теоремы 2. Теорема 2 доказана.

3. Цикличность центров системы Куклеса в семействе систем Куклеса. Будем рассматривать систему Куклеса при возмущениях, не выводящих её за пределы семейства систем

$$\dot{x} = -y + \lambda x, \quad \dot{y} = x + \lambda y + \sum_{i+j=2}^{3} a_{i,j} x^i y^j. \tag{23}$$

Явные выражения параметров системы (15) в случаях центра в формулировке теоремы 2 позволяют легко найти цикличности этих центров.

Обозначим $\Lambda = (K, M, N, U, A, B)$. Будем считать Λ точкой в шестимерном аффинном пространстве A^* параметров системы (15). Точку $\Lambda_0 \in A^*$ будем называть *центром* (*фокусом*), если соответствующая система (15) имеет центр (фокус) в особой точке $(x, y) = (0, 0)$.

Введём вектор-функцию
$$F(\Lambda) = (L_1, L_2, \ldots, L_m), \tag{24}$$
где L_i $(i = \overline{1,m})$ – постоянные Ляпунова системы (15). Точку $\Lambda_0 \in A^*$ будем называть *фокусом n-го порядка*, если выполняются соотношения
$$F(\Lambda_0) = (0, 0, \ldots, 0, L_n(\Lambda_0), \ldots), \quad L_n(\Lambda_0) \neq 0.$$
Точку $\Lambda_0 \in A^*$ будем называть *центром n-го порядка*, если в любой достаточно малой её окрестности в пространстве A^* имеется фокус n-го порядка.

Пусть Λ_0 – центр или фокус n-го порядка. Будем говорить, что Λ_0 имеет *цикличность*, равную n, если для любой достаточно малой ε-окрестности точки $(x,y) = (0,0)$ существует δ-окрестность точки $\Lambda_0 \in A^*$, в которой есть фокус, имеющий n предельных циклов, расположенных в ε-окрестности точки $(x,y) = (0,0)$.

Для вычисления цикличности центров системы Куклеса в семействе систем (24) справедлива следующая

Теорема Кристофера [13]. *Предположим, что c – точка на многообразии центров в пространстве параметров и первые L_1, ..., L_k ляпуновские величины имеют независимые линейные части (относительно их разложения по всем параметрам возмущения). Тогда точка c лежит на компоненте многообразия центров коразмерности не менее $k+1$, добавляя параметр следа L_0, и существуют бифуркации, которые порождают k предельных циклов локально из центра, соответствующего значению параметра c.*

Замечание 2. Если в теореме Кристофера не требовать, чтобы многообразия центров имели коразмерность, в точности равную $k+1$, то условие строгой последовательности линейно независимых по линейным частям ляпуновских величин несущественно. Можно, например, начинать её формулировку следующим образом: если якобиан первых n ляпуновских величин в точке c имеет ранг k, $k \leqslant n$, то точка c лежит на компоненте многообразия центров коразмерности не менее $k+1$.

Обозначим через λ_1, ..., λ_k линейно независимые линейные части первых n ляпуновских величин. Потребуем для последовательности λ_0, λ_1, ..., λ_k, где λ_0 – параметр линейной части системы (см. (23)), выполнения условий:

1) она должна быть знакочередующейся;

2) $|\lambda_0| \ll |\lambda_1| \ll |\lambda_2| \ll \ldots \ll |\lambda_k|$.

Здесь $\ll$ означает "много меньше". Эти условия гарантируют существование вокруг особой точки $O(0,0)$ возмущённой системы $k+1$ замкнутых кривых без контакта, внутри которых имеется k малоамплитудных предельных циклов.

Используя замечание 2, можно утверждать следующее. Пусть c – точка на многообразии центров в пространстве параметров. Так как многообразие идеала и многообразие, задаваемое уравнениями $g = 0$, где g – базис Грёбнера идеала, одно и то же, то ранг якобиана образующих базиса Грёбнера, вычисленный в точке c, также как и ранг якобиана образующих идеала, определяет оценку снизу коразмерности многообразия центров, на котором лежит эта точка. Следовательно, справедлива

Теорема 3. *Предположим, что c – точка на многообразии центров в пространстве параметров. Если якобиан образующих базиса Грёбнера идеала ляпуновских величин в точке c имеет ранг k, то точка c лежит на компоненте многообразия центров коразмерности не менее $k+1$, добавляя параметр следа L_0, и существуют бифуркации, которые порождают k предельных циклов локально из центра, соответствующего значению параметра c.*

В статье [14] авторы, комментируя теорему Кристофера, замечают, что фактически существуют аналогичные предыдущие результаты, полученные С. Чиконе и М. Джейкобсом [15, 16], а также М. Хан [17] применяет их для системы Льенара. Со своей стороны заметим, что этот метод применён ещё раньше в работе [18] (лемма 1 и теорема 5).

Теорема 4. *В случае выполнения условий теоремы 2 соответствующий центр системы Куклеса (15) имеет в классе систем Куклеса (23) цикличность k не меньше чем:*

a) $k = 3$, *если* $AMU(-AM + A^2U + 2MU - 2AU^2 + U^3) \neq 0$;

b) $k = 4$, *если* $BKM \neq 0$;

c), d) $k = 5$, *если* $U \neq 0$;
e) $k = 4$, *если* $BU \neq 0$;
f), g) $k = 4$, *если* $Bs \neq 0$;
h) $k = 4$, *если* $BU(A^3 + 2AB^2 - 3A^2U - 4B^2U + 3AU^2 - U^3) \neq 0$;
i) $k = 4$, *если* $Bs(2Bs + Bs^3 - 2U)U \neq 0$;
k) $k = 5$, *если* $U \neq 0$.

Доказательство. Через $DF(\Lambda)$ обозначим матрицу Якоби вектор-функции (24). Если $\Lambda = \{K, M, N, U, A, B\}$ – вектор параметров нелинейных частей системы (15), Λ_0 – центр и $\operatorname{rank}(DF(\Lambda)) = n$ при значениях $\Lambda = \Lambda_0$, то Λ_0 имеет цикличность не менее $n+1$ в классе систем (23). На самом деле, в силу теоремы Кристофера условие $\operatorname{rank}(DF(\Lambda_0)) = n$ гарантирует рождение n малоамплитудных предельных циклов, ещё один дополнительный предельный цикл рождается при возмущении первой постоянной Ляпунова $L+N$ (см. формулы (13), (15)), функционально независимой от других постоянных Ляпунова.

Легко вычислить матрицу Якоби $DF(\Lambda)$ вектор-функции $F(\Lambda)$, $\Lambda = \{K, M, N, U, A, B\}$, параметры которой состоят из образующих идеала J ляпуновских величин системы (15):

$$DF(\Lambda) = \{\{AB - 3N + 7BU, -AB - N + 3BU, -6B^2 - 3K - M - 2AU - 3U^2,$$
$$2A^2B + 6B^3 + 7BK + 3BM - 2AN + 6ABU - 6NU, BK - BM + 4ABU - 2NU + 3BU^2,$$
$$AK - AM - 12BN + 2A^2U + 18B^2U + 7KU + 3MU + 3AU^2\}, \ldots\}.$$

Подставив сюда последовательно значения параметров из условий теоремы 2 (вычислив миноры максимального порядка, не равные тождественно нулю) и условия, при которых хотя бы один из них ненулевой, получим условия теоремы 2. Теорема 4 доказана.

Теорема 3 даёт возможность при вычислении цикличности избежать громоздких вычислений, которые появляются при использовании теоремы Кристофера. Вычислим цикличность центров системы Куклеса (15), если $UB \neq 0$, используя базис g_2. Из полиномов g_2, учитывая, что $b = B^2$, и возвращаясь к старым переменным, а также используя преобразования (17), (20), получаем полиномы

$$\langle (B^2K + ABN - N^2)(A^2N^2 - 2A^2BNU + 5AN^2U + A^2B^2U^2 - 4ABNU^2 + 4N^2U^2),$$
$$(B^2K + ABN - N^2)(-BKN - AN^2 + B^2KU + ABNU - N^2U),$$
$$(B^2K + ABN - N^2)(AK + A^2U + 4KU),$$
$$-AB^2K + AB^2M - 3A^2BN - 3BKN - 2BMN + 3AN^2 + A^2B^2U - B^2KU - 4ABNU + 3N^2U,$$
$$B^2KM - 2ABKN + 3KN^2 + MN^2 + 2AB^2KU + A^2BNU - 2BKNU - AN^2U,$$
$$(-N + BU)(A^2B + 2B^3 + 2BK + BM - AN + ABU - NU),$$
$$A^2B^2K + 2B^4K + 2B^2K^2 + ABKN - 3KN^2 - MN^2 + A^3B^2U + 2AB^4U + 2AB^2KU + A^2BNU +$$
$$+ 4BKNU + 2BMNU - 2AN^2U - A^2B^2U^2 - 2B^4U^2 - B^2KU^2 - B^2MU^2 + 4ABNU^2 -$$
$$- 3N^2U^2 - AB^2U^3 + BNU^3\rangle.$$

Заметим, что многообразие идеала, построенное на этих полиномах, совпадает с многообразием идеала J, если $UB \neq 0$. Вычисляя их якобиан по всем переменным и подставляя в него последовательно значения параметров из пп. $e)$, $h)$, $i)$, $k)$, а также учитывая, что ещё один дополнительный предельный цикл рождается при возмущении первой постоянной Ляпунова $L+N$, получаем, что соответствующий центр системы Куклеса (15) имеет в классе систем (23) цикличность не меньшую чем:
$e)$ $k = 4$, если $BU \neq 0$;
$h)$ $k = 4$, если $BU(A^3 + 2AB^2 - 3A^2U - 4B^2U + 3AU^2 - U^3) \neq 0$;
$i)$ $k = 4$, если $Bs(2Bs + Bs^3 - 2U)U \neq 0$;
$k)$ $k = 5$, если $(-2 + s^2)U \neq 0$,

как и в теореме 4. Заметим, что расхождение в дополнительном условии в п. $k)$ объясняется тем, что если $-2+s^2=0$, то из условий п. $k)$ имеем $B=0$, что было исключено при построении базиса g_2.

4. Цикличность фокуса седьмого порядка в классе систем Куклеса. В статье [5] А.П. Садовский рассмотрел систему Куклеса при возмущениях, не выводящих её за пределы семейства систем (23), и доказал существование системы с порядком фокуса равным семи, из которого рождается семь малоамплитудных предельных циклов. Цикличность особых точек он доказывал возмущением коэффициентов интеграла Ляпунова невозмущённой системы и построением топографической системы, состоящей из замкнутых кривых без контакта.

Рассмотрим систему (21) и идеал J_1 её ляпуновских величин. Известно [5], что система Куклеса имеет фокус седьмого порядка при четырнадцати различных значениях параметров системы. Для системы (21) при условии $U=1$ они вычисляются решением полиномиальных уравнений, полученных из базиса Грёбнера G идеала, образованного первыми пятью членами идеала J_1. Если вычислить G в порядке переменных $\{B,M,K,N,A\}$ и исключить случаи $K+AN-N^2=0$, $A^2-4AN-2A^2N+4N^2+5AN^2+A^2N^2=0$ (они рассмотрены в пп. 2.2.2.1 и 2.2.2.2), то первый его член есть многочлен от переменной A степени, равной 92. Можно говорить о семи различных действительных значениях многообразия этого идеала, поскольку остальные семь отличаются только знаком параметра B. Для одного из них с точностью до 60 знаков после запятой имеем

$$\Lambda_0=\{U=1,\quad A=7.990822516433026126692544037552789373404880787563321705746 4,$$

$$N=1.311311834320567515558543364582287741313228856132666723897 2,$$

$$K=-5.868895161924373615294451709140148751275176880716304666621 7,$$

$$M=-0.064690137717140503111614220134728583138682900807320316078 3,$$

$$B=5.775436183264984869742767746476364346262215773438739091614 8\}. \tag{25}$$

Подставляя эти значения в J_1, получим

$$J_1=\{0.\cdot10^{-56},0.\cdot10^{-53},0.\cdot10^{-49},0.\cdot10^{-46},0.\cdot10^{-43},$$

$$6944017.8535466603795156186841580511746802742 8\},$$

это подтверждает, что Λ_0 – фокус седьмого порядка. Напомним, что первая постоянная Ляпунова равна нулю в силу условия (12).

Следующая теорема справедлива для любых полиномиальных систем с чисто мнимыми корнями характеристического уравнения.

Теорема 5. *Если Λ_0 – фокус порядка n в аффинном пространстве параметров системы, $F(\Lambda)$ – вектор-функция (24), состоящая из первых $n-1$ ляпуновских величин и $\operatorname{rank}(DF(\Lambda))=n-1$ при значениях $\Lambda\Lambda_0$, то Λ_0 имеет цикличность, в точности равную $n-1$ в классе систем с такими же параметрами (без возмущения параметров линейной части), и цикличность, в точности равную n в классе систем, полученных добавлением к этим параметрам параметра λ_0 линейной части системы.*

Доказательство. В статье [18] рассматривается рождение предельных циклов из особых точек системы с однородными нелинейностями третьей степени и доказана теорема (лемма 1 и теорема 5), сформулированная для этой системы, но доказательство которой не нарушает общности, и её можно применить к полиномиальным системам с нелинейностями любой степени. Хотя она сформулирована с употреблением ранга линейно независимых линейных частей ляпуновских величин возмущённой системы, очевидно, что вместо этого можно применить ранг матрицы Якоби ляпуновских величин системы.

Теорема 6 [18]. *Если Λ_0 – фокус порядка n в аффинном пространстве параметров системы A^*, $F(\Lambda)$ – вектор-функция, состоящая из первых $n-1$ ляпуновских величин системы и $\operatorname{rank}(DF(\Lambda))=n-1$ при значениях $\Lambda=\Lambda_0$, то для любой достаточно малой окрестности* *точки $O(0,0)$ существует сколь угодно малое возмущение значений точки Λ_0 в пространстве A^* (без возмущения линейной части) такое, что в этой окрестности имеется не менее $n-1$ предельных циклов возмущённой системы.*

Очевидно,что если возмутить и линейную часть этой системы, то можно получить не менее n малоамплитудных предельных циклов возмущённой системы.

С другой стороны, цикличность фокуса Λ_0 не может быть больше n согласно теореме о рождении предельных циклов из сложного фокуса.

Теорема 7 [19, с. 264]. *Если $O(0,0)$ – сложный фокус кратности n динамической системы (A) класса $N \geqslant 2n+1$ или аналитической, то существуют числа ε, δ такие, что всякая система $(\overline{A})$, δ-близкая до ранга $2n+1$ к системе (A), имеет не более n предельных циклов, расположенных в ε-окрестности точки $O(0,0)$.*

Теорема 5 доказана.

Теорема 8. *Фокус (25) системы (21) имеет цикличность, в точности равную семи в классе систем (23).*

Доказательство. Вычислим матрицу Якоби вектор-функции $F(\Lambda)$, $\Lambda=\{U,A,N,K,M,B\}$, параметры которой состоят из образующих идеала J_1 ляпуновских величин системы (21):

$$DF(\Lambda) = \{\{2A^2+6B^2+7K+3M-2AN+6AU-6NU, K-M+4AU-2NU+3U^2,$$

$$-6B^2-3K-M-2AU-3U^2, A-3N+7U, -A-N+3U, -12B(N-U)\},\ldots\}.$$

Левый верхний минор пятого порядка этой матрицы при значениях (25) равен

$$-7.87769127520645398995945367801899487432474682013432267\cdot 10^{16},$$

т.е. $\operatorname{rank}(DF(\Lambda_0))=5$. Если к вектор-функции $F(\Lambda)$ добавить первую компоненту $L+NB$, функционально не зависящую от других (см. формулы (12), (14), (20)), а к значениям (25) добавить соответствующее значение параметра $L=-NB$, то получим вектор-функцию $F(\Lambda)$ и значения параметров $\Lambda_0=\{L_0,U_0,B_0,M_0,K_0,N_0,A_0\}$, для которых $\operatorname{rank}(DF(\Lambda_0))=6$. По утверждению теоремы 5 это гарантирует рождение ровно семи малоамплитудных предельных циклов, расположенных в окрестности особой точки $O(0,0)$ системы (23).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Куклес И.С.* О некоторых случаях отличия фокуса от центра // Докл. АН СССР. 1944. Т. 42. № 5. С. 208–211.
2. *Gine J.* Center conditions for generalized polynomial Kukles systems // Commun. Pure Appl. Anal. 2017. V. 16. № 2. P. 417–426.
3. *Lloyd N.G., Pearson J.M.* Computing centre conditions for certain cubic systems // J. Comp. Appl. Math. 1992. V. 40. № 3. P. 323–336.
4. *Садовский А.П.* Решение проблемы центра и фокуса для кубической системы нелинейных колебаний // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33. № 2. С. 236–244.
5. *Садовский А.П.* Кубические системы нелинейных колебаний с семью предельными циклами // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39. № 4. С. 472–481.
6. *Pearson J.M., Lloyd N.G.* Kukles revisited: advances in computing techniques // Comput. Math. Appl. 2010. V. 60. № 10. P. 2797–2805.
7. *Christopher C.I., Lloyd N.Ci.* On the paper of Jin and Wang cont cerning the conditions for a centre in certain cubic systems // Bull. London Math. Soc. 1990. V. 22. P. 5–12.
8. *Lloyd N.G., Pearson J.M.* Conditions for a centre and the bifurcation of limit cycles in a class of cubic systems // Bifurcations of Planar Vector Fields. Lect. Notes in Math. 1990. V. 1455. P. 230–242.
9. *Садовский А.П.* Полиномиальные идеалы и многообразия. Минск, 2008.
10. *Садовский А.П., Маковецкая Т.В., Чергинец Д.Н.* Радикал идеала фокусных величин комплексной системы Куклеса // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. 2017. № 2. С. 4–11.
11. *Отроков Н.Ф.* Аналитические интегралы и предельные циклы. Горький, 1972.
12. *Руденок А.Е., Шуба А.С.* Базис Гребнера идеала ляпуновских величин системы Куклеса // Материалы Междунар. науч. конф. “Шестые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям”. 7–10 декабря 2015 г. Минск, 2015. Ч. 1. С. 86–87.

13. *Christopher C.* Estimating limit cycle bifurcations from centers // Differential Equations with Symbolic Computation. Trends in Mathematics. Birkhäuser Basel, 2005. P. 23–35.
14. *Cruz L., Romanovski V.G., Torregrosa J.* The center and cyclicity problems for quartic linear-like reversible systems // Nonlin. Anal. 2020. V. 190. P. 1–19.
15. *Chicone C., Jacobs M.* Bifurcation of critical periods for plane vector fields // Trans. Amer. Math. Soc. 1989. V. 312. № 2. P. 433–486.
16. *Chicone C., Jacobs M.* Bifurcation of limit cycles from quadratic isochrones // J. Differ. Equat. 1991. V. 91. № 2. P. 268–326.
17. *Han M.* Liapunov constants and Hopf cyclicity of Liénard systems // Ann. Differ. Equat. 1999. V. 15. № 2. P. 113–126.
18. *Руденок А.Е.* О предельных циклах двумерной автономной системы с нелинейностями третьей степени // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23. № 5. С. 825–834.
19. *Андронов А.А., Леонтович Е.А., Гордон И.И., Майер А.Г.* Теория бифуркаций динамических систем на плоскости. М., 1967.

Белорусский государственный университет,
г. Минск

Поступила в редакцию 22.11.2022 г.
После доработки 22.11.2022 г.
Принята к публикации 20.01.2023 г.