## УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956

# КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЁРТОГО ПОРЯДКА С МЛАДШИМИ ЧЛЕНАМИ

 Ю. П. Апаков, С. М. Мамажонов

Рассмотрена первая краевая задача в прямоугольной области для неоднородного дифференциального уравнения четвёртого порядка с младшими членами. Доказана единственность решения поставленной задачи. Решение получено в явном виде с помощью построенной функции Грина.

DOI: 10.31857/S037406412302005X, EDN: PULUDA

**Введение.** Решение многих задач газовой динамики, теории упругости, теории пластин и оболочек приводит к рассмотрению дифференциальных уравнений в частных производных высоких порядков. С точки зрения физических приложений представляют большой интерес и дифференциальные уравнения четвёртого порядка (см. [1–4]). Их классификации и решению краевых задач для этих уравнений посвящена книга [5]. В статьях [6–11] изучен ряд корректных краевых задач для уравнений третьего порядка с кратными характеристиками.

В работе [12] рассмотрена задача с краевыми условиями для неоднородного уравнения четвёртого порядка с кратными характеристиками с одним младшим членом. Начально-граничная задача для уравнения колебания балки решена в статье [13]. В [14] изучена краевая задача для уравнения высокого порядка с кратными характеристиками методом построения функции Грина. Задача для уравнения четвёртого порядка с кратными характеристиками, имеющего сингулярный коэффициент, исследована в работе [15].

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим уравнение

$$U_{xxxx}(x,y)-U_{yy}(x,y)+A_1(x)U_{xxx}(x,y)+A_2(x)U_{xx}(x,y)+$$
$$+A_3(x)U_x(x,y)+A_4(x)U(x,y)+A_5(x)U_y(x,y)=F(x,y),$$

где $A_i(x)$, $i=\overline{1,5}$, и $F(x,y)$ – заданные достаточно гладкие функции.

С помощью замены

$$U(x,y)=u(x,y)\exp\left(-\frac{1}{4}\int\limits_0^x A_1(\xi)\,d\xi+\frac{A_5(x)}{2}y\right)$$

это уравнение приводится к уравнению

$$L[u]\equiv u_{xxxx}+a_1(x)u_{xx}+a_2(x)u_x+a_3(x)u-u_{yy}=f(x,y), \tag{1}$$

где

$$a_1(x)=A_2(x)-\frac{3A_1'(x)}{2}-\frac{3(A_1(x))^2}{8},\quad a_2(x)=\frac{(A_1(x))^3}{8}-\frac{A_1(x)A_2(x)}{2}-A_1''(x)+A_3(x),$$

$$a_3(x)=\frac{3(A_1(x))^2A_1'(x)}{16}-\frac{A_1'''(x)}{4}+\frac{3(A_1'(x))^2}{16}-\frac{3(A_1'(x))^3}{32}-\frac{3(A_1(x))^4}{256}-$$
$$-\frac{A_1'(x)A_2(x)}{4}+\frac{(A_1(x))^2A_2(x)}{16}-\frac{A_1(x)A_3(x)}{4}+\frac{(A_5(x))^2}{4}+A_4(x),$$

$$f(x,y)=F(x,y)\exp\left(\frac{1}{4}\int\limits_0^x A_1(\xi)\,d\xi-\frac{A_5(x)}{2}y\right).$$

**Задача (1)–(4).** Требуется найти функцию $u(x,y)$ из класса $C^{4,2}_{x,y}(\Omega)\bigcap C^{3,1}_{x,y}(\bar\Omega)$, удовлетворяющую уравнению (1) в области $\Omega=\{(x,y):\,0<x<p,\ \ 0<y<q\}$ и следующим краевым условиям:

$$u(x,0)=0,\quad u(x,q)=0,\quad 0\leqslant x\leqslant p, \tag{2}$$

$$u(0,y)=\psi_1(y),\quad u(p,y)=\psi_2(y),\quad u_{xx}(0,y)=\psi_3(y),\quad u_{xx}(p,y)=\psi_4(y),\quad 0\leqslant y\leqslant q, \tag{3}$$

где $\psi_i(y)\in C^3[0,q]$, $i=\overline{1,4}$, $f(x,y)\in C^{0,1}_{x,y}(\bar\Omega)$ – заданные функции, причём

$$\psi_i(0)=\psi_i(q)=\psi_i''(0)=\psi_i''(q)=0,\quad i=\overline{1,4},\quad f(x,0)=f(x,q)=0. \tag{4}$$

Отметим, что уравнение (1) рассмотрено в работе [12] при $a_1=a_2=0$, $a_3=-c(x,t)$, а в статьях [13–15] при $a_1=a_2=a_3=0$. В этих работах рассмотрен случай, когда $\psi_i(x)=0$ и начальные условия отличны от нуля.

**2. Основные результаты.**

**Теорема 1.** *Если задача (1)–(4) имеет решение, то при выполнении условий* $a_1(x)\leqslant 0$, $2a_3(x)+a_1''(x)-a_2'(x)\geqslant 0$ *оно единственно.*

**Доказательство.** Предположим обратное. Пусть задача (1)–(4) имеет два решения: $u_1(x,y)$ и $u_2(x,y)$. Тогда функция $u(x,y)=u_1(x,y)-u_2(x,y)$ удовлетворяет однородному уравнению (1) и однородным краевым условиям. Докажем, что $u(x,y)\equiv 0$ в $\bar\Omega$.

В области $\Omega$ справедливо тождество

$$uL[u]\equiv 0$$

или

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(uu_{xxx}-u_xu_{xx}+a_1(x)uu_x-\frac12a_1'(x)u^2+\frac12a_2(x)u^2\right)-\frac{\partial}{\partial y}(uu_y)+$$
$$+u_{xx}^2-a_1(x)u_x^2+\left(a_3(x)+\frac12a_1''(x)-\frac12a_2'(x)\right)u^2+u_y^2=0. \tag{5}$$

Проинтегрировав равенство (5) по области $\Omega$, с учётом однородных краевых условий получим

$$\int\limits_0^p\int\limits_0^q u_{xx}^2\,dx\,dy-\int\limits_0^p\int\limits_0^q a_1(x)u_x^2\,dx\,dy+\int\limits_0^p\int\limits_0^q u_y^2\,dx\,dy+\int\limits_0^p\int\limits_0^q\left(a_3(x)+\frac12a_1''(x)-\frac12a_2'(x)\right)u^2\,dx\,dy=0,$$

откуда следует, что $u(x,y)\equiv 0$, $(x,y)\in\bar\Omega$. Теорема доказана.

**Теорема 2.** *Если выполняется неравенство*

$$C<\frac{\mu_1^3(1-e^{-2\mu_1p})^2}{p(2\mu_1^2+3\mu_1(1+e^{-4\mu_1p})+3)},$$

*в котором* $\mu_1=\sqrt{\pi/(2q)}$, $C=\max\limits_{\xi\in[0,p]}\{|a_i(\xi)|,|a_i'(\xi)|,|a_1''(\xi)|\}$, $i=1,2,3$, *то решение задачи (1)–(4) существует.*

**Доказательство.** Решение задачи (1)–(4) ищем в виде

$$u(x,y)=v(x,y)+w(x,y),$$

где функция $v(x,y)$ является решением задачи

$$L[v] \equiv v_{xxxx} + a_1(x)v_{xx} + a_2(x)v_x + a_3(x)v - v_{yy} = 0,$$

$$v(x,0) = v(x,q) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant p,$$
$$v(0,y) = \psi_1(y), \quad v(p,y) = \psi_2(y),$$
$$v_{xx}(0,y) = \psi_3(y), \quad v_{xx}(p,y) = \psi_4(y), \quad 0 \leqslant y \leqslant q, \tag{6}$$

а функция $w(x,y)$ – решением задачи

$$L[w] \equiv w_{xxxx} + a_1(x)w_{xx} + a_2(x)w_x + a_3(x)w - w_{yy} = f(x,y),$$

$$w(x,0) = w(x,q) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant p,$$
$$w(0,y) = w(p,y) = w_{xx}(0,y) = w_{xx}(p,y) = 0, \quad 0 \leqslant y \leqslant q. \tag{7}$$

Решение задачи (6) ищем в виде

$$v(x,y) = X(x)Y(y). \tag{8}$$

После подстановки (8) в (6) и разделения переменных получим относительно функции $Y(y)$ следующую спектральную задачу:

$$Y''(y) + \lambda Y(y) = 0, \quad Y(0) = Y(q) = 0. \tag{9}$$

Известно [16, с. 200], что нетривиальное решение задачи (9) существует при собственных значениях

$$\lambda = \lambda_n = \left(\frac{\pi n}{q}\right)^2, \quad n \in \mathbb{N},$$

которым соответствуют собственные функции

$$Y_n(y) = \sin\left(\frac{\pi n}{q}y\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Подставив (8) в (6), получим относительно функции $X(x)$ задачу

$$X^{(4)} + a_1(x)X'' + a_2(x)X' + a_3(x)X + \lambda_n X = 0,$$

$$X(0) = \psi_{1n}, \quad X(p) = \psi_{2n}, \quad X''(0) = \psi_{3n}, \quad X''(p) = \psi_{4n}, \tag{10}$$

где $\psi_{in} = (2/q)\int_0^q \psi_i(\eta)\sin(\pi n\eta/q)\,d\eta$, $i = \overline{1,4}$.

Введём обозначение

$$V(x) = X(x) - \rho(x), \tag{11}$$

$$\rho_n(x) = \psi_{1n} + \left(\frac{\psi_{2n} - \psi_{1n}}{p} - \frac{2\psi_{3n} + \psi_{4n}}{6}p\right)x + \frac{\psi_{3n}}{2}x^2 + \frac{\psi_{4n} - \psi_{3n}}{6p}x^3, \tag{12}$$

с помощью которого задача (10) принимает вид

$$V_n^{(4)} + \lambda_n V_n = \lambda_n g_n(x) - a_1(x)V_n'' - a_2(x)V_n' - a_3(x)V_n,$$

$$V_n(0) = V_n(p) = V_n''(0) = V_n''(p) = 0, \tag{13}$$

здесь

$$g_n(x) = \left(\frac{x-p}{p} + \frac{a_2(x) - pa_3(x) + xa_3(x)}{\lambda_n p}\right)\psi_{1n} - \left(\frac{x}{p} + \frac{a_2(x) + xa_3(x)}{\lambda_n p}\right)\psi_{2n} +$$

$$+\left(\frac{2xp^2-3px^2+x^3}{6p}-\frac{3px^2a_3(x)+x^3a_3}{6\lambda_n p}\right)\psi_{3n}+$$

$$+\frac{6xa_1(x)+2p^2a_2(x)-6pxa_2(x)-6pa_1(x)+3x^2a_2(x)+2p^2xa_3(x)}{6\lambda_n p}\psi_{3n}+$$

$$+\left(\frac{xp^2-x^3}{6p}+\frac{p^2a_2(x)-6xa_1(x)-3x^2a_2(x)+xp^2a_3(x)-x^3a_3(x)}{6\lambda_n p}\right)\psi_{4n}.$$

Согласно теореме Гильберта [17, с. 224] решение задачи (13) определяется по формуле

$$V_n(x)=\lambda_n\int\limits_0^p G_n(x,\xi)g_n(\xi)\,d\xi-\int\limits_0^p G_n(x,\xi)(a_1(\xi){V_n}''(\xi)+a_2(\xi){V_n}'(\xi)+a_3(\xi)V_n(\xi))\,d\xi, \qquad (14)$$

где функция Грина

$$G_n(x,\xi)=\begin{cases}G_n^1(x,\xi), & 0\leqslant x<\xi,\\ G_n^2(x,\xi), & \xi<x\leqslant p,\end{cases}$$

$$G_n^1(x,\xi)=\frac{1}{2\mu_n^3\Delta}\{[\cos(\mu_n p)\,\mathrm{sh}\,(\mu_n p)(\cos(\mu_n(\xi-p))\,\mathrm{sh}\,(\mu_n(\xi-p))-\sin(\mu_n(\xi-p))\,\mathrm{ch}\,(\mu_n(\xi-p)))+$$
$$+\sin(\mu_n p)\,\mathrm{ch}\,(\mu_n p)(\cos(\mu_n(\xi-p))\,\mathrm{sh}\,(\mu_n(\xi-p))+\sin(\mu_n(\xi-p))\,\mathrm{ch}\,(\mu_n(\xi-p)))]\cos(\mu_n x)\,\mathrm{sh}\,(\mu_n x)+$$
$$+[\sin(\mu_n p)\,\mathrm{ch}\,(\mu_n p)(\cos(\mu_n(\xi-p))\,\mathrm{sh}\,(\mu_n(\xi-p))-\sin(\mu_n(\xi-p))\,\mathrm{ch}\,(\mu_n(\xi-p)))-$$
$$-\cos(\mu_n p)\,\mathrm{sh}\,(\mu_n p)(\cos(\mu_n(\xi-p))\,\mathrm{sh}\,(\mu_n(\xi-p))-\sin(\mu_n(\xi-p))\,\mathrm{ch}\,(\mu_n(\xi-p)))]\sin(\mu_n x)\,\mathrm{ch}\,(\mu_n x)\},$$

$$G_n^2(x,\xi)=\frac{1}{2\mu_n^3\Delta}\{[\cos(\mu_n p)\,\mathrm{sh}\,(\mu_n p)(\cos(\mu_n\xi)\,\mathrm{sh}\,(\mu_n\xi)-\sin(\mu_n\xi)\,\mathrm{ch}\,(\mu_n\xi))+$$
$$+\sin(\mu_n p)\,\mathrm{ch}\,(\mu_n p)(\cos(\mu_n\xi)\,\mathrm{sh}\,(\mu_n\xi)+\sin(\mu_n\xi)\,\mathrm{ch}\,(\mu_n\xi))]\cos(\mu_n(x-p))\,\mathrm{sh}\,(\mu_n(x-p))+$$
$$+[\sin(\mu_n p)\,\mathrm{ch}\,(\mu_n p)(\cos(\mu_n\xi)\,\mathrm{sh}\,(\mu_n\xi)-\sin(\mu_n\xi)\,\mathrm{ch}\,(\mu_n\xi))-$$
$$-\cos(\mu_n p)\,\mathrm{sh}\,(\mu_n p)(\cos(\mu_n\xi)\,\mathrm{sh}\,(\mu_n\xi)+\sin(\mu_n\xi)\,\mathrm{ch}\,(\mu_n\xi))]\sin(\mu_n(x-p))\,\mathrm{ch}\,(\mu_n(x-p))\}.$$

Здесь

$$\mu_n=\sqrt{\frac{\pi n}{2q}},\quad \Delta=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}\end{vmatrix},$$

$$a_{11}=\cos(\mu_n(\xi-p))\,\mathrm{sh}\,(\mu_n(\xi-p)),\quad a_{12}=\sin(\mu_n(\xi-p))\,\mathrm{ch}\,(\mu_n(\xi-p)),\quad a_{13}=-\cos(\mu_n\xi)\,\mathrm{sh}\,(\mu_n\xi),$$
$$a_{14}=-\sin(\mu_n\xi)\,\mathrm{ch}\,(\mu_n\xi),\quad a_{21}=\cos(\mu_n(\xi-p))\,\mathrm{ch}\,(\mu_n(\xi-p))-\sin(\mu_n(\xi-p))\,\mathrm{sh}\,(\mu_n(\xi-p)),$$
$$a_{22}=\cos(\mu_n(\xi-p))\,\mathrm{ch}\,(\mu_n(\xi-p))+\sin(\mu_n(\xi-p))\,\mathrm{sh}\,(\mu_n(\xi-p)),$$
$$a_{23}=\sin(\mu_n\xi)\,\mathrm{sh}\,(\mu_n\xi)-\cos(\mu_n\xi)\,\mathrm{ch}\,(\mu_n\xi),\quad a_{24}=-\cos(\mu_n\xi)\,\mathrm{ch}\,(\mu_n\xi)-\sin(\mu_n\xi)\,\mathrm{sh}\,(\mu_n\xi),$$
$$a_{31}=-\sin(\mu_n(\xi-p))\,\mathrm{ch}\,(\mu_n(\xi-p)),\quad a_{32}=\cos(\mu_n(\xi-p))\,\mathrm{sh}\,(\mu_n(\xi-p)),\quad a_{33}=\sin(\mu_n\xi)\,\mathrm{ch}\,(\mu_n\xi),$$
$$a_{34}=-\cos(\mu_n\xi)\,\mathrm{sh}\,(\mu_n\xi),\quad a_{41}=-\cos(\mu_n(\xi-p))\,\mathrm{ch}\,(\mu_n(\xi-p))-\sin(\mu_n(\xi-p))\,\mathrm{sh}\,(\mu_n(\xi-p)),$$
$$a_{42}=\cos(\mu_n(\xi-p))\,\mathrm{ch}\,(\mu_n(\xi-p))-\sin(\mu_n(\xi-p))\,\mathrm{sh}\,(\mu_n(\xi-p)),$$
$$a_{43}=\cos(\mu_n\xi)\,\mathrm{ch}\,(\mu_n\xi)+\sin(\mu_n\xi)\,\mathrm{sh}\,(\mu_n\xi),\quad a_{44}=\sin(\mu_n\xi)\,\mathrm{sh}\,(\mu_n\xi)-\cos(\mu_n\xi)\,\mathrm{ch}\,(\mu_n\xi).$$

Вычислив определитель $\Delta$, имеем

$$\Delta=-e^{2\mu_n p}\bar{\Delta},$$

где $\bar{\Delta}$ определяется по формуле

$$\bar{\Delta} = \frac{1+e^{-4\mu_n p}}{2} - \cos(2\mu_n p)e^{-2\mu_n p}$$

и для него справедлива оценка снизу

$$|\bar{\Delta}| \geqslant \frac{1}{2}(1-e^{-2\mu_1 p})^2 = \delta > 0.$$

Проинтегрировав по частям равенство (14), получим

$$V_n(x) = \lambda_n \int\limits_0^p G_n(x,\xi)g_n(\xi)\,d\xi +$$

$$+\int\limits_0^p (-G_{n\xi\xi}a_1(\xi) + (a_2(\xi)-2a_1'(\xi))G_{n\xi} + (a_2'(\xi)-a_1''(\xi)-a_3(\xi))G_n)V_n\,d\xi. \qquad (15)$$

Для удобства в дальнейших вычислениях введём обозначения

$$V_{0n}(x) = \lambda_n \int\limits_0^p G_n(x,\xi)g_n(\xi)\,d\xi,$$

$$\bar{G_n}(x,\xi) = -a_1(\xi)G_{n\xi\xi} + (a_2(\xi)-2a_1'(\xi))G_{n\xi} + (a_2'(\xi)-a_1''(\xi)-a_3(\xi))G_n,$$

в результате чего равенство (15) примет вид

$$V_n(x) = V_{0n}(x) + \int\limits_0^p \bar{G}_n(x,\xi)V_n(\xi)\,d\xi \qquad (16)$$

– интегрального уравнения Фредгольма второго рода. Запишем решение (16) с помощью резольвенты

$$V_n(x) = V_{0n}(x) + \int\limits_0^p R_n(x,\xi)V_{0n}(\xi)\,d\xi, \qquad (17)$$

где

$$R_n(x,\xi) = \bar{G}_{1n}(x,\xi) + \sum_{m=2}^{\infty} \bar{G}_{mn}(x,\xi),$$

$$\bar{G}_{mn}(x,\xi) = \int\limits_0^p \bar{G}_{1n}(x,s)\bar{G}_{(m-1)n}(s,\xi)ds, \quad m=2,3,\ldots, \quad \bar{G}_{1n}(x,\xi) = \bar{G}_n(x,\xi).$$

Оценим функции $G_n(x,\xi)$, $G_{n\xi}(x,\xi)$ и $G_{n\xi\xi}(x,\xi)$:

$$|G_n(x,\xi)| \leqslant \frac{K}{\mu_n^3}, \quad |G_{n\xi}(x,\xi)| \leqslant \frac{K}{\mu_n^2}(1+e^{-4\mu_n p}), \quad |G_{n\xi\xi}(x,\xi)| \leqslant \frac{2K}{\mu_n},$$

здесь $K = 1/(2\delta) = (1-e^{-2\mu_1 p})^{-2}$. Тогда для функции $\bar{G}_n(x,\xi)$ справедлива оценка

$$|\bar{G}_n(x,\xi)| \leqslant CK\left(\frac{2}{\mu_n} + \frac{3}{\mu_n^2}(1+e^{-4\mu_n p}) + \frac{3}{\mu_n^3}\right).$$

Оценим теперь решение (17). Имеем неравенство

$$|R_n(x,\xi)| \leqslant |\bar{G}_{1n}(x,\xi)| + |\bar{G}_{2n}(x,\xi)| + \ldots + |\bar{G}_{mn}(x,\xi)| + \ldots,$$

для правой части которого составим мажорирующий ряд. Введём обозначение

$$J = CK\left(\frac{2}{\mu_1} + \frac{3}{\mu_1^2}(1 + e^{-4\mu_1 p}) + \frac{3}{\mu_1^3}\right)$$

и найдём

$$|\bar{G}_{1n}(x,\xi)| \leqslant |\bar{G}_n(x,\xi)| \leqslant J,$$

$$|\bar{G}_{mn}(x,\xi)| \leqslant \int\limits_0^p |\bar{G}_{1n}(x,s)||\bar{G}_{(m-1)n}(s,\xi)|ds \leqslant J^m p^{m-1}, \quad i = 2, 3, \ldots$$

Тогда мажорирующий ряд имеет вид

$$\frac{1}{p}\sum_{m=1}^{\infty} (Jp)^m. \tag{18}$$

Условие теоремы 2 можно записать в виде

$$CKp\left(\frac{2}{\mu_1} + \frac{3}{\mu_1^2}(1 + e^{-4\mu_1 p}) + \frac{3}{\mu_1^3}\right) < 1,$$

откуда следует неравенство $Jp < 1,$ ввиду которого ряд (18) является бесконечно убывающей геометрической прогрессией. В этом случае резольвента равномерно сходится и её оценка имеет вид

$$|R_n(x,\xi)| \leqslant \frac{J}{1 - Jp}. \tag{19}$$

В каждом из интервалов $0 \leqslant \xi < x$ и $x < \xi \leqslant p$ функция $G_n(x,\xi),$ рассматриваемая как функция от переменной $\xi,$ является решением уравнения

$$G_{n\xi\xi\xi\xi}(x,\xi) + \lambda_n G_n(x,\xi) = 0.$$

Подставив $G_n(x,\xi) = -G_{n\xi\xi\xi\xi}(x,\xi)/\lambda_n$ в $V_{0n}(x),$ имеем

$$V_{0n}(x) = -\int\limits_0^x G^2_{n\xi\xi\xi\xi}(x,\xi)g_n(\xi)\,d\xi - \int\limits_x^p G^1_{n\xi\xi\xi\xi}(x,\xi)g_n(\xi)\,d\xi.$$

Учитывая равенство $G^1_{n\xi\xi\xi}(x,x) - G^2_{n\xi\xi\xi}(x,x) = 1,$ интегрируем по частям $V_{0n}(x)$ один раз и находим

$$V_{0n}(x) = g_n(x) + g_n(0)G^2_{n\xi\xi\xi}(x,0) - g_n(p)G^1_{n\xi\xi\xi}(x,p) + \int\limits_0^p G_{n\xi\xi\xi}(x,\xi)g_n'(\xi)\,d\xi.$$

С учётом условий (4) интегрируем по частям $\psi_{in}$ три раза:

$$\psi_{in} = -\frac{q^3}{\pi^3 n^3}\,\frac{2}{q}\int\limits_0^q \psi_i'''(\eta)\cos\left(\frac{\pi n}{q}\eta\right)d\eta = -\left(\frac{q}{\pi}\right)^3\frac{\Psi_{in}}{n^3}, \quad i = \overline{1,4},$$

где $\Psi_{in} = (2/q)\int_0^q \psi_i'''(\eta)\cos(\pi n\eta/q)\,d\eta$, $i=\overline{1,4}$. Отсюда получим следующие неравенства:

$$|\psi_{in}| \leqslant \left(\frac{q}{\pi}\right)^3 \frac{|\Psi_{in}|}{n^3}, \quad i=\overline{1,4}.$$

В результате имеем оценку

$$|V_{0n}(x)| \leqslant \frac{M_1}{n^3}(|\Psi_{1n}|+|\Psi_{2n}|+|\Psi_{3n}|+|\Psi_{4n}|), \tag{20}$$

здесь $M_1>0$ – известное число.

Согласно (19), (20) запишем

$$|V_n(x)| \leqslant \frac{1}{n^3}(|\Psi_{1n}|+|\Psi_{2n}|+|\Psi_{3n}|+|\Psi_{4n}|)\frac{M_1}{1-Jp}. \tag{21}$$

В силу формул (8), (11) и (12) решение задачи (6) имеет вид

$$v(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}(V_n(x)+\rho_n(x))\sin\left(\frac{\pi n}{q}y\right).$$

Исследуем полученный ряд на сходимость. С учётом (21) и неравенства

$$|\rho_n(x)| \leqslant \frac{M_2}{n^3}(|\Psi_{1n}|+|\Psi_{2n}|+|\Psi_{3n}|+|\Psi_{4n}|),$$

где $M_2>0$ – известное число, получим оценку

$$|v(x,y)| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}(|\Psi_{1n}|+|\Psi_{2n}|+|\Psi_{3n}|+|\Psi_{4n}|)\left(\frac{M_1}{1-Jp}+M_2\right) < \infty.$$

Теперь покажем равномерную сходимость $v_{xxxx}(x,y)$. После некоторых вычислений находим оценку

$$|v_{xxxx}(x,y)| \leqslant M_3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(|\Psi_{1n}|+|\Psi_{2n}|+|\Psi_{3n}|+|\Psi_{4n}|),$$

где $M_3>0$ – известное число.

Для того чтобы показать сходимость правой части этого неравенства, используем неравенства Коши–Буняковского и Бесселя:

$$|v_{xxxx}(x,y)| \leqslant M_3\left(\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}|\Psi_{1n}|^2}+\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}|\Psi_{2n}|^2}+\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}|\Psi_{3n}|^2}+\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}|\Psi_{4n}|^2}\right)\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}} \leqslant$$

$$\leqslant M_3(\|\psi_1'''(y)\|+\|\psi_2'''(y)\|+\|\psi_3'''(y)\|+\|\psi_4'''(y)\|)\sqrt{\frac{\pi^2}{6}} < \infty,$$

где

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\Psi_{in}|^2 \leqslant \|\psi_i'''(y)\|^2_{L_2(0,q)}, \quad i=\overline{1,4}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

Учитывая неравенство

$$|v_{yy}(x,y)| \leqslant |v_{xxxx}(x,y)|+|a_1(x)||v_{xx}(x,y)|+|a_2(x)||v_x(x,y)|+|a_3(x)||v(x,y)|,$$

заключаем, что и $v_{yy}$ тоже сходится.

Теперь решение задачи (7) ищем в виде

$$w(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\chi_n(x)\sin\left(\frac{\pi n}{q}y\right).$$

Разложим функцию $f(x,y)$ в ряд Фурье

$$f(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)\sin\left(\frac{\pi n}{q}y\right),$$

коэффициенты которого определяются по формуле

$$f_n(x)=\frac{2}{q}\int\limits_0^q f(x,\eta)\sin\left(\frac{\pi n}{q}\eta\right)d\eta.$$

В результате получим задачу

$$\chi_n^4(x)+\lambda_n\chi_n(x)=f_n(x)-a_1(x)\chi_n''(x)-a_2(x)\chi_n'(x)-a_3(x)\chi_n(x),$$

$$\chi_n(0)=\chi_n(p)=\chi_n''(0)=\chi_n''(p)=0,$$

решение которой имеет вид

$$\chi_n(x)=\int\limits_0^p G_n(x,\xi)f_n(\xi)\,d\xi-\int\limits_0^p G_n(x,\xi)(a_1(\xi)\chi_n''(\xi)+a_2(\xi)\chi_n'(\xi)+a_3(\xi)\chi_n(\xi))\,d\xi.$$

Проинтегрировав по частям второй интеграл, находим

$$\chi_n(x)=\int\limits_0^p G_n(x,\xi)f_n(\xi)\,d\xi+$$

$$+\int\limits_0^p(-G_{n\xi\xi}a_1(\xi)+(a_2(\xi)-2a_1'(\xi))G_{n\xi}+(a_2'(\xi)-a_1''(\xi)-a_3(\xi))G_n)\chi_n(\xi)\,d\xi.$$

Введём обозначения

$$\chi_{0n}(x)=\int\limits_0^p G_n(x,\xi)f_n(\xi)\,d\xi,$$

$$\bar G_n(x,\xi)=-a_1(\xi)G_{n\xi\xi}+(a_2(\xi)-2a_1'(\xi))G_{n\xi}+(a_2'(\xi)-a_1''(\xi)-a_3(\xi))G_n,$$

в результате получим

$$\chi_n(x)=\chi_{0n}(x)+\int\limits_0^p\bar G_n(x,\xi)\chi_n(\xi)\,d\xi$$

– интегральное уравнение Фредгольма второго рода, решение которого определяется по формуле

$$\chi_n(x)=\chi_{0n}(x)+\int\limits_0^p R_n(x,\xi)\chi_{0n}(\xi)\,d\xi.$$

С учётом условий (4) интегрируем по частям $f_n(x)$:

$$f_n(x) = \frac{q}{\pi n}\Phi_n(x),$$

где $\Phi_n(x) = (2/q)\int_0^q f_\eta(x,\eta)\cos(\pi n\eta/q)\,d\eta$.

Учитывая

$$G_n(x,\xi) = -\frac{G_{n\xi\xi\xi\xi}(x,\xi)}{\lambda_n},$$

находим выражение

$$\chi_{0n}(x) = -\frac{1}{\lambda_n}\int\limits_0^p G_{n\xi\xi\xi\xi}(x,\xi)f_n(\xi)\,d\xi,$$

проинтегрировав которое по частям один раз, с учётом $G^1_{n\xi\xi\xi}(x,x) - G^2_{n\xi\xi\xi}(x,x) = 1$ получим

$$\chi_{0n}(x) = \frac{1}{\lambda_n}\left(f_n(x) + f_n(0)G^2_{n\xi\xi\xi}(x,0) - f_n(p)G^1_{n\xi\xi\xi}(x,p) + \int\limits_0^p G_{n\xi\xi\xi}(x,\xi)f_n'(\xi)\,d\xi\right).$$

В результате имеем неравенство

$$|\chi_{0n}(x)| \leqslant \frac{M_4}{n^3}(|\Phi_n(x)| + |\Phi_n(0)| + |\Phi_n(p)| + |\Phi_n'(x)|), \tag{22}$$

где $M_4 > 0$ – известное число. В силу (19) и (22) находим оценку

$$|\chi_n(x)| \leqslant \frac{1}{n^3}(|\Phi_n(x)| + |\Phi_n(0)| + |\Phi_n(p)| + |\Phi_n'(x)|)\frac{M_4}{1-Jp}.$$

Таким образом, справедливы соотношения

$$|w(x,y)| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}(|\Phi_n(x)| + |\Phi_n(0)| + |\Phi_n(p)| + |\Phi_n'(x)|)\frac{M_4}{1-Jp} < \infty,$$

откуда следует, что решение задачи (7) сходится.

Покажем равномерную сходимость $w_{xxxx}(x,y)$. После некоторых вычислений находим

$$|w_{xxxx}(x,y)| \leqslant M_5\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(|\Phi_n(x)| + |\Phi_n(0)| + |\Phi_n(p)| + |\Phi_n'(x)|),$$

где $M_5 > 0$ – известное число.

Для правой части этого неравенства используем неравенства Коши–Буняковского и Бесселя:

$$|w_{xxxx}(x,y)| \leqslant M_5\left(\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}|\Phi_n(x)|^2} + \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}|\Phi_n(0)|^2} + \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}|\Phi_n(p)|^2} + \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}|\Phi_n'(x)|^2}\right) \times$$

$$\times\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}} \leqslant M_5(\|f_y(x,y)\| + \|f_y(0,y)\| + \|f_y(p,y)\| + \|f_{xy}(x,y)\|)\sqrt{\frac{\pi^2}{6}} < \infty,$$

здесь

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\Phi_n(x)|^2 \leqslant \|f_y(x,y)\|^2_{L_2(0,q)}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}|\Phi_n(0)|^2 \leqslant \|f_y(0,y)\|^2_{L_2(0,q)},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\Phi_n(p)|^2 \leqslant \|f_y(p,y)\|^2_{L_2(0,q)}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}|\Phi'_n(x)|^2 \leqslant \|f_{xy}(x,y)\|^2_{L_2(0,q)}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

Учитывая оценку

$$|w_{yy}(x,y)| \leqslant |w_{xxxx}(x,y)| + |a_1(x)||w_{xx}(x,y)| + |a_2(x)||w_x(x,y)| + |a_3(x)||w(x,y)| + |f(x,y)|,$$

заключаем, что и $w_{yy}$ тоже сходится. Теорема доказана.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Турбин М.В.* Исследование начально-краевой задачи для модели движения жидкости Гершел–Балкли // Вестн. Воронежского гос. ун-та. Сер. Физика. Математика. 2013. № 2. С. 246–257.
2. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. М., 1977.
3. *Шабров С.А.* Об оценках функций влияния одной математической модели четвёртого порядка // Вестн. Воронежского гос. ун-та. Сер. Физика. Математика. 2015. № 2. С. 168–179.
4. *Benney D.J., Luke J.C.* Interactions of permanent waves of finite amplitude // J. Math. Phys. 1964. V. 43. P. 309–313.
5. *Джураев Т.Д., Сопуев А.* К теории дифференциальных уравнений в частных производных четвёртого порядка. Ташкент, 2000.
6. *Джураев Т.Д., Апаков Ю.П.* К теории уравнения третьего порядка с кратными характеристиками, содержащего вторую производную по времени // Укр. мат. журн. 2010. Т. 62. № 1. С. 40–51.
7. *Apakov Yu.P., Rutkauskas S.* On a boundary problem to third order PDE with multiple characteristics // Nonlin. Anal.: Modeling and Control. 2011. V. 16. № 3. P. 255–269.
8. *Апаков Ю.П.* О решении краевой задачи для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками // Укр. мат. журн. 2012. Т. 64. № 1. Р. 3–13.
9. *Апаков Ю.П., Иргашев Б.Ю.* Краевая задача для вырождающегося уравнения высокого нечётного порядка // Укр. мат. журн. 2014. Т. 66. № 10. Р. 1318–1331.
10. *Апаков Ю.П., Жураев А.Х.* Третья краевая задача для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками // Укр. мат. журн. 2018. Т. 70. № 9. Р. 1274–1281.
11. *Apakov Yu.P.* On unique solvability of boundary-value problem for a viscous transonic equation // Lobachevskii J. of Math. 2020. V. 41. № 9. P. 1754–1761.
12. *Аманов Д., Мурзамбетова М.Б.* Краевая задача для уравнения четвёртого порядка с младшим членом // Вестн. Удмуртского ун-та. Математика. Механика. Компьют. науки. 2013. Вып. 1. С. 3–10.
13. *Сабитов К.Б., Фадеева О.В.* Начально-граничная задача для уравнения вынужденных колебаний консольной балки // Вестн. Самарского гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2021. Т. 25. № 1. С. 51–66.
14. *Иргашев Б.Ю.* Краевая задача для одного вырождающегося уравнения высокого порядка с младшими членами // Бюлл. Ин-та математики. 2019. № 6. С. 23–29.
15. *Urinov A.K., Azizov M.S.* Boundary value problems for a fourth order partial equation with an unknown right-hand part // Lobachevskii J. of Math. 2021. V. 42. № 3. P. 632–640.
16. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М., 1966.
17. *Hilbert D.* Nachrichten von der Konigl Gesellschaft der Wissenschaften zu Gottingem. Mathematisch-physikalische Klasse. Gottingem, 1904.


Институт математики имени В.И. Романовского
АН Республики Узбекистан, г. Ташкент,
Наманганский инженерно-строительный институт,
Узбекистан

Поступила в редакцию 22.12.2021 г.
После доработки 07.09.2022 г.
Принята к публикации 20.01.2023 г.