ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 2, с. 193–207

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.4

О ФУНДАМЕНТАЛЬНОМ РЕШЕНИИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ДИНИ-НЕПРЕРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

© 2023 г. Е. А. Бадерко, К. В. Семенов

Рассматривается параболическое уравнение с одной пространственной переменной с Дини-непрерывными коэффициентами. Для этого уравнения доказывается существование классического фундаментального решения и приводятся оценки. Условие на характер непрерывности старшего коэффициента уравнения является точным для существования фундаментального решения.

DOI: 10.31857/S0374064123020061, EDN: PUMUJR

Введение. Хорошо известно, что для равномерно-параболического уравнения с коэффициентами, удовлетворяющими условию Гёльдера, существует классическое фундаментальное решение, которое строится методом Леви (см., например, [1, с. 404]).

В работе [2] доказано существование фундаментального решения для параболического уравнения произвольного порядка с одной пространственной переменной в случае Дини-непрерывных коэффициентов уравнения, если соответствующий модуль непрерывности ω_0 удовлетворяет условию Дини "дважды", а именно, если

$$\widetilde{\widetilde{\omega}}_0(z) = \int\limits_0^z y^{-1}\,dy \int\limits_0^y \omega_0(\xi)\xi^{-1}\,d\xi < +\infty, \quad z > 0.$$

В дальнейшем этот результат был обобщен на случай параболических систем второго порядка с одной пространственной переменной (см. [3]). В статье [4] доказано существование классического фундаментального решения для одного уравнения со многими пространственными переменными при приведённом выше условии "дважды"-Дини. Во всех этих работах используется классический метод Леви.

С другой стороны, в статье [5] показано, что в случае, когда старший коэффициент уравнения не удовлетворяет условию Дини (см. ниже (1)), а именно, если не выполнено условие сходимости соответствующего интеграла, классическое фундаментальное решение может не существовать.

До сих пор оставался открытым вопрос, можно ли построить фундаментальное решение для параболического уравнения с Дини-непрерывными коэффициентами, если модуль непрерывности удовлетворяет только условию Дини (см. ниже (1)). Сложность построения фундаментального решения в этом случае заключается в том, что прямое использование классического метода Леви не позволяет отказаться от условия "дважды"-Дини, приведённого выше.

В настоящей работе доказано существование классического фундаментального решения для параболического уравнения с одной пространственной переменной при условии Дини (см. ниже (1)), т.е., как следует из [5], при точных условиях на характер гладкости старшего коэффициента уравнения. Для этого предложен метод, который можно назвать *модифицированным методом Леви.* Отличие от классического метода заключается в конструкции интегрального слагаемого (объёмного потенциала) в представлении фундаментального решения, а именно в этом потенциале используется ядро специального вида (параметрикс), которое строится с помощью регуляризованных коэффициентов уравнения.

Кроме того, в настоящей статье допускается определённый рост младших коэффициентов уравнения при $t \to 0+$.

Статья состоит из четырёх пунктов. В п. 1 приводятся необходимые сведения и формулируется основная теорема. В п. 2 строится параметрикс Γ_0. Фундаментальное решение для параболического уравнения, в котором отсутствует младший член, строится в п. 3. В п. 4 приводится доказательство основной теоремы.

1. Необходимые сведения и формулировка основного результата. Функцию $\omega : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ называем *модулем непрерывности*, если (см. [6, с. 147]): $\omega(0)=0$; ω не убывает; ω непрерывна на $[0,+\infty)$; ω *полуаддитивна*, т.е. $\omega(z_1+z_2) \leqslant \omega(z_1)+\omega(z_2)$.

Если ω – модуль непрерывности, то

$$\frac{\omega(x)}{x} \leqslant 2\frac{\omega(y)}{y}, \quad x \geqslant y > 0.$$

Для модуля непрерывности справедливо неравенство (см. [7])

$$\omega(|x|)\exp(-|x|^2/t) \leqslant C\omega(t^{1/2})\exp(-c|x|^2/t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t>0,$$

при некоторых постоянных $C, c > 0$. Говорят, что модуль непрерывности ω *удовлетворяет условию Дини*, если

$$\tilde{\omega}(x) = \int\limits_0^x \frac{\omega(z)}{z}dz < +\infty, \quad x > 0. \tag{1}$$

В этом случае функция $\tilde{\omega}$ также является модулем непрерывности, причём $\omega(x) \leqslant 2\tilde{\omega}(x)$.

Пусть $D = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : 0 < t \leqslant T\}$. В полосе D рассматривается равномерно-параболический оператор

$$Lu = \frac{\partial u}{\partial t} - a(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} + c(x,t)u.$$

Предполагаем, что коэффициенты оператора L – вещественнозначные функции, при этом коэффициент a задан в $\bar{D}$, коэффициенты b и c заданы в D, и выполнены условия:

(a) $\delta \leqslant a(x,t) \leqslant A$, $(x,t) \in \bar{D}$, для некоторых $\delta, A > 0$;

(b) функция a непрерывна в $\bar{D}$, причём имеет место оценка

$$|\Delta_x a(x,t)| \leqslant \omega_0(|\Delta x|), \quad (x,t),(x+\Delta x,t) \in \bar{D},$$

где ω_0 – модуль непрерывности, удовлетворяющий условию Дини, функции b и c непрерывны в D и

$$|b(x,t)| \leqslant \frac{\omega_0(t^{1/2})}{t^{1/2}}, \quad |\Delta_x b(x,t)| \leqslant \frac{\omega_0(|\Delta x|)}{t^{1/2}},$$

$$|c(x,t)| \leqslant \frac{\omega_0(t^{1/2})}{t}, \quad |\Delta_x c(x,t)| \leqslant \frac{\omega_0(|\Delta x|)}{t},$$

$(x,t),(x+\Delta x,t) \in D$.

Здесь и далее для любой функции $f(x,t)$ обозначаем $\Delta_x f(x,t) = f(x+\Delta x,t) - f(x,t)$.

Положим $D^* = \{(x,t;\xi,\tau) \in \bar{D} \times \bar{D} : t > \tau\}$. Функцию $\Gamma(x,t;\xi,\tau)$, $(x,t;\xi,\tau) \in D^*$, называем *фундаментальным решением* уравнения $Lu = 0$, если:

1) функции Γ, $\partial\Gamma/\partial t$, $\partial\Gamma/\partial x$, $\partial^2\Gamma/\partial x^2$ непрерывны в D^*;

2) при любых фиксированных (ξ,τ) из $\mathbb{R} \times [0,T)$ функция $\Gamma(x,t;\xi,\tau)$ удовлетворяет уравнению $Lu = 0$ по переменным $(x,t) \in \mathbb{R} \times (\tau,T]$;

3) для любой непрерывной финитной функции $h(x)$, $x \in \mathbb{R}$, и для любого $\tau \in [0,T)$ интеграл (потенциал Пуассона)

$$u(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(x,t;\xi,\tau)h(\xi)\,d\xi, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \tau \leqslant t \leqslant T,$$

является ограниченным решением задачи Коши

$$Lu = 0 \text{ в } \mathbb{R} \times (\tau, T], \quad u(x,\tau) = h(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Из единственности решения задачи Коши (см., например, [1, с. 29]) следует, что фундаментальное решение уравнения $Lu = 0$ единственно.

Пусть $\rho \in C^\infty(\mathbb{R})$ – функция, определённая равенствами $\rho(x) = C\exp(1/(x^2-1))$ при $|x| < 1$ и $\rho \equiv 0$ при $|x| \geqslant 1$, где постоянная C выбирается из условия

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \rho(y)\,dy = 1.$$

Введём обозначения

$$\hat{a}(x,t;s) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} a(x-sy,t)\rho(y)\,dy = \frac{1}{s}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} a(y,t)\rho\biggl(\frac{x-y}{s}\biggr)\,dy, \quad (x,t) \in \bar{D}, \quad s \geqslant 0,$$

и

$$Q(x,t,\tau;r) = \int\limits_{\tau}^{t} \hat{a}(x,\theta;r^{1/4})\,d\theta, \quad x \in \mathbb{R}, \quad 0 \leqslant \tau < t \leqslant T, \quad r \geqslant 0.$$

Рассмотрим функцию

$$Z(x,t;z,\tau;r) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\sigma}\exp(-Q(z,t,\tau;r)\sigma^2)\,d\sigma =$$

$$= \frac{1}{(2\pi Q(z,t,\tau;r))^{1/2}}\exp\biggl(-\frac{x^2}{4Q(z,t,\tau;r)}\biggr),$$

$x, z \in \mathbb{R}$, $0 \leqslant \tau < t \leqslant T$, $r \geqslant 0$, и положим (см. [8, с. 17])

$$Z_1(x,t;\xi,\tau) \equiv Z(x,t;\xi,\tau;0) = \frac{1}{(2\pi Q(\xi,t,\tau;0))^{1/2}}\exp\biggl(-\frac{x^2}{4Q(\xi,t,\tau;0)}\biggr), \quad (x,t;\xi,\tau) \in D^*.$$

Основным результатом работы является следующая

Теорема. *Пусть для коэффициентов оператора L выполнены условия (a) и (b). Тогда для уравнения $Lu = 0$ существует фундаментальное решение $\Gamma(x,t;\xi,\tau)$, $(x,t;\xi,\tau) \in D^*$, и для него выполнены оценки*

$$\biggl|\frac{\partial^{k+l}\Gamma}{\partial t^l \partial x^k}(x,t;\xi,\tau)\biggr| \leqslant C(t-\tau)^{-(1+2l+k)/2}\exp\biggl(-c\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\biggr), \tag{2}$$

при этом для разности

$$W(x,t;\xi,\tau) \equiv \Gamma(x,t;\xi,\tau) - Z_1(x-\xi,t;\xi,\tau)$$

справедливы неравенства

$$\biggl|\frac{\partial^{k+l}W}{\partial t^l \partial x^k}(x,t;\xi,\tau)\biggr| \leqslant C\tilde{\omega}_0((t-\tau)^{1/2})(t-\tau)^{-(1+2l+k)/2}\exp\biggl(-c\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\biggr), \tag{3}$$

$(x,t;\xi,\tau) \in D^*$, $0 \leqslant 2l + k \leqslant 2$.

Здесь и далее через C и c обозначены положительные постоянные, зависящие от коэффициентов a, b, c и числа T, конкретный вид которых для нас не важен.

2. Параметрикс $\boldsymbol{\Gamma_0(x-\xi,t;x,\tau)}$. Функции $\hat{a}(x,t;s)$ обладают свойствами

$$\delta\leqslant\hat{a}(x,t;s)\leqslant A,\quad |\hat{a}(x,t;s)-a(x,t)|\leqslant\omega_0(s),$$

$$\left|\frac{\partial^k\hat{a}}{\partial x^k}(x,t;s)\right|\leqslant\frac{C_k}{s^k},\quad \left|\Delta_x\frac{\partial^k\hat{a}}{\partial x^k}(x,t;s)\right|\leqslant\frac{C_k}{s^k}\omega_0(|\Delta x|),$$

где $(x,t),(x+\Delta x,t)\in\bar{D}$, $s>0$, $k\in\mathbb{N}\bigcup\{0\}$.

Из этих свойств следуют неравенства

$$\delta(t-\tau)\leqslant Q(x,t,\tau;r)\leqslant A(t-\tau),\quad x\in\mathbb{R},\quad 0\leqslant\tau<t\leqslant T,\quad r\geqslant 0,$$

$$|Q(x,t,\tau;r)-Q(x,t,\tau;0)|\leqslant C\omega_0(r^{1/4})(t-\tau),$$

$$\left|\frac{\partial^k Q}{\partial x^k}(x,t,\tau;r)\right|\leqslant C_k(t-\tau)(r^{-1/4})^k,$$

$$\left|\Delta_x\frac{\partial^k Q}{\partial x^k}(x,t,\tau;r)\right|\leqslant C_k\omega_0(|\Delta x|)(t-\tau)(r^{-1/4})^k,$$

здесь $x\in\mathbb{R}$, $0\leqslant\tau<t\leqslant T$, $r>0$, $k\in\mathbb{N}$.

Функция $Z(x-\xi,t;z,\tau;r)$ является фундаментальным решением уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)-\hat{a}(z,t;r^{1/4})\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)=0$$

с коэффициентом, зависящим от параметров $z\in\mathbb{R}$, $r\geqslant 0$, и обладает свойствами

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}Z(x-\xi,t;z,\tau;r)\,d\xi=1,\tag{4}$$

$$\left|\frac{\partial^{l+k}Z}{\partial t^l\partial x^k}(x-\xi,t;z,\tau;r)\right|\leqslant C_{k,l}(t-\tau)^{-(1+2l+k)/2}\exp\biggl(-c\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\biggr),\tag{5}$$

$$\left|\frac{\partial^k Z}{\partial x^k}(x-\xi,t;z,\tau;r)-\frac{\partial^k Z}{\partial x^k}(x-\xi,t;z,\tau;0)\right|\leqslant$$

$$\leqslant C_k\omega_0(r^{1/4})(t-\tau)^{-(1+k)/2}\exp\biggl(-c\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\biggr),$$

$$\left|\Delta_z\frac{\partial^{l+k}Z}{\partial t^l\partial x^k}(x-\xi,t;z,\tau;r)\right|\leqslant C_{k,l}\frac{\omega_0(|\Delta z|)}{(t-\tau)^{(1+2l+k)/2}}\exp\biggl(-c\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\biggr),$$

$x,\xi,z\in\mathbb{R}$, $0\leqslant\tau<t\leqslant T$, $r\geqslant 0$, $k,l\geqslant 0$.

Кроме того, для полных производных функции $Z(x-\xi,t;x,\tau;r)$ по переменной x справедливы неравенства

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial x^k}Z(x-\xi,t;x,\tau;r)\right|\leqslant\frac{C}{(t-\tau)^{(k+1)/2}}\exp\biggl(-c\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\biggr)\sum_{l=0}^{k}\frac{(t-\tau)^{l/2}}{r^{l/4}},\tag{6}$$

$x,\xi\in\mathbb{R}$, $0\leqslant\tau<t\leqslant T$, $r>0$, $k=0,1,2,3$.

Положим

$$Z_0(r,t)=\frac{1}{(2\pi t)^{1/2}}\exp\biggl(-\frac{r^2}{4t}\biggr),\quad r\geqslant 0,\quad t>0,$$

и рассмотрим функцию

$$\Gamma_0(x,t;z;\tau) = 2\int\limits_0^{+\infty} Z_0(r,t-\tau)Z(x,t;z,\tau;r)\,dr, \quad x,\xi,z\in\mathbb{R}, \quad 0\leqslant\tau<t\leqslant T. \tag{7}$$

Из (4)–(6) следуют равенство

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Gamma_0(x-\xi,t;x,\tau)\,d\xi = 1 \tag{8}$$

и оценки

$$\left|\frac{\partial^{k+l}}{\partial t^l\partial x^k}\Gamma_0(x-\xi,t;x,\tau)\right| \leqslant C(t-\tau)^{-(1+2l+k)/2}\exp\biggl(-c\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\biggr), \tag{9}$$

$(x,t;\xi,\tau)\in D^*$, $0\leqslant 2l+k\leqslant 2$.

Заметим, что поскольку

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{\partial Z_0}{\partial t}(r,t-\tau)\,dr = \int\limits_0^{+\infty}\frac{\partial^2 Z_0}{\partial r^2}(r,t-\tau)\,dr = 0, \quad t>\tau,$$

то справедливо представление

$$\int\limits_0^{+\infty}\biggl(\frac{\partial Z_0}{\partial t}(r,t-\tau)\biggr)Z(x-\xi,t;x,\tau;r)\,dr =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty}\biggl(\frac{\partial Z_0}{\partial t}(r,t-\tau)\biggr)(Z(x-\xi,t;x,\tau;r)-Z(x-\xi,t;x,\tau;0))\,dr, \quad (x,t;\xi,\tau)\in D^*. \tag{10}$$

Рассмотрим параболический оператор L_1 с коэффициентами a, b, удовлетворяющими условиям (a) и (b):

$$L_1u = \frac{\partial u}{\partial t} - a(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}.$$

Пусть

$$K(x,t;\xi,\tau) = L_{1x,t}\Gamma_0(x-\xi,t;x,\tau) =$$

$$= (a(\xi,t)-a(x,t))\frac{\partial^2\Gamma_0}{\partial x^2}(x-\xi,t;x,\tau) + b(x,t)\frac{\partial\Gamma_0}{\partial x}(x-\xi,t;x,\tau), (x,t;\xi,\tau)\in D^*. \tag{11}$$

Обозначим $\omega_1(x) = \omega_0(x^{1/4})$, $x\geqslant 0$. Из (8) и (9)–(11) следуют равенство

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}K(x,t;\xi,\tau)\,d\xi = 0, \quad x\in\mathbb{R}, \quad 0\leqslant\tau<t\leqslant T, \tag{12}$$

и оценки

$$|K(x,t;\xi,\tau)| \leqslant C\frac{\omega_1((t-\tau)^{1/2})}{(t-\tau)^{3/2}}\exp\biggl(-c\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\biggr), \tag{13}$$

$$|\Delta_x K(x,t;\xi,\tau)| \leqslant C\frac{\omega_1(|\Delta x|)}{(t-\tau)^{3/2}}\biggl(\exp\biggl(-c\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\biggr)+\exp\biggl(-c\frac{(x+\Delta x-\xi)^2}{t-\tau}\biggr)\biggr), \tag{14}$$

$(x,t;\xi,\tau),(x+\Delta x,t;\xi,\tau)\in D^*$.

Пусть функция μ непрерывна в D^* и удовлетворяет условиям

$$|\mu(x,t;\xi,\tau)| \leqslant \frac{\omega((t-\tau)^{1/2})}{(t-\tau)^{3/2}} \exp\biggl(-c\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\biggr),$$

$$|\Delta_x \mu(x,t;\xi,\tau)| \leqslant \frac{\omega(|\Delta x|)}{(t-\tau)^{3/2}} \biggl(\exp\biggl(-c\frac{(x+\Delta x-\xi)^2}{t-\tau}\biggr) + \exp\biggl(-c\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\biggr)\biggr),$$

$(x,t;\xi,\tau), (x+\Delta x,t;\xi,\tau) \in D^*$, где ω – некоторый модуль непрерывности, удовлетворяющий условию Дини (1). Рассмотрим *объёмный потенциал*

$$V\mu(x,t;\xi,\tau) = \int\limits_{\tau}^{t} d\eta \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_0(x-y,t;x,\eta)\mu(y,\eta;\xi,\tau)\,dy, \quad (x,t;\xi,\tau) \in D^*,$$

где функция Γ_0 задана формулой (7). Из (8) и (9) следует, что потенциал $V\mu$ имеет непрерывные в D^* производные

$$\frac{\partial V\mu}{\partial x}(x,t;\xi,\tau) = \int\limits_{\tau}^{t} d\eta \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x}\Gamma_0(x-y,t;x,\eta)\mu(y,\eta;\xi,\tau)\,dy, \tag{15}$$

$$\frac{\partial^2 V\mu}{\partial x^2}(x,t;\xi,\tau) = \int\limits_{\tau}^{t} d\eta \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\Gamma_0(x-y,t;x,\eta)\mu(y,\eta;\xi,\tau)\,dy =$$

$$= \int\limits_{\tau}^{t} d\eta \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\Gamma_0(x-y,t;x,\eta)[\mu(y,\eta;\xi,\tau) - \mu(x,\eta;\xi,\tau)]\,dy, \tag{16}$$

$$\frac{\partial V\mu}{\partial t}(x,t;\xi,\tau) = \mu(x,t;\xi,\tau) + \int\limits_{\tau}^{t} d\eta \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \Gamma_0}{\partial t}(x-y,t;x,\eta)\mu(y,\eta;\xi,\tau)\,dy =$$

$$= \mu(x,t;\xi,\tau) + \int\limits_{\tau}^{t} d\eta \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \Gamma_0}{\partial t}(x-y,t;x,\eta)[\mu(y,\eta;\xi,\tau) - \mu(x,\eta;\xi,\tau)]\,dy, \tag{17}$$

и справедливы оценки

$$\biggl|\frac{\partial^{k+l} V\mu}{\partial t^l \partial x^k}(x,t;\xi,\tau)\biggr| \leqslant C\frac{\tilde\omega((t-\tau)^{1/2})}{(t-\tau)^{(1+2l+k)/2}} \exp\biggl(-c\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\biggr), \tag{18}$$

$(x,t;\xi,\tau) \in D^*$, $0 \leqslant 2l+k \leqslant 2$. Из (15)–(17) следует равенство

$$L_{1x,t}V\mu(x,t;\xi,\tau) = \mu(x,t;\xi,\tau) + \int\limits_{\tau}^{t} d\eta \int\limits_{-\infty}^{+\infty} K(x-y,t;x,\eta)\mu(y,\eta;\xi,\tau)\,dy, \quad (x,t;\xi,\tau) \in D^*. \tag{19}$$

3. Фундаментальное решение для оператора L_1.

Лемма 1. *Пусть ω – модуль непрерывности, удовлетворяющий условию Дини и*

$$J_{\lambda,\omega}(t) = \int\limits_0^t \frac{\omega(\tau^{1/2})}{\tau} e^{-\lambda\tau}\, d\tau, \quad t \geqslant 0, \quad \lambda > 0.$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует число $\lambda = \lambda(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех $\lambda \geqslant \lambda(\varepsilon)$ выполняется неравенство

$$J_{\lambda,\omega}(t) \leqslant \varepsilon, \quad t \geqslant 0.$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно. Фиксируем $t_0 > 0$ так, что $J_{\lambda,\omega}(t_0) \leqslant 2\tilde{\omega}(\sqrt{t_0}) < \varepsilon/2$. Из этой оценки сразу следует утверждение леммы для $t \in (0, t_0]$. Если $t > t_0$, то имеют место неравенства

$$J_{\lambda,\omega}(t) \leqslant J_{\lambda,\omega}(t_0) + 2\frac{\omega({t_0}^{1/2})}{{t_0}^{1/2}} \int\limits_{t_0}^t \frac{e^{-\lambda\tau}}{\tau^{1/2}}\, d\tau \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + C\frac{1}{\lambda^{1/2}},$$

откуда, выбирая λ достаточно большúм, получаем утверждение леммы.

В этом и только в этом пункте зафиксируем постоянную c из оценок (13), (14) и через H обозначим линейное пространство непрерывных в D^* функций μ, для которых конечна величина

$$\|\mu\|_H = \sup_{D^*}\bigg(|\mu(x,t;\xi,\tau)| \frac{(t-\tau)^{3/2}}{\omega_1((t-\tau)^{1/2})} \exp\bigg(\frac{c}{4}\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\bigg)\bigg) +$$
$$+ \sup_{D^*}\bigg(|\Delta_x\mu(x,t;\xi,\tau)| \frac{(t-\tau)^{3/2}}{\omega_1(|\Delta x|)} \bigg(\exp\bigg(-\frac{c}{4}\frac{(x+\Delta x-\xi)^2}{t-\tau}\bigg) + \exp\bigg(-\frac{c}{4}\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\bigg)\bigg)^{-1}\bigg).$$

Отметим, что H – банахово пространство с нормой $\|\mu\|_H$.

Лемма 2. *Для любой функции $F \in H$ интегральное уравнение*

$$\mu(x,t;\xi,\tau) + \int\limits_\tau^t d\eta \int\limits_{-\infty}^{+\infty} K(x-y,t;x,\eta)\mu(y,\eta;\xi,\tau)\, dy = F(x,t;\xi,\tau), \quad (x,t;\xi,\tau) \in D^*, \tag{20}$$

имеет единственное решение $\mu \in H$ и справедливо неравенство

$$\|\mu\|_H \leqslant C\|F\|_H. \tag{21}$$

Доказательство. Умножим обе части уравнения (20) на $e^{-\lambda(t-\tau)}$, где $\lambda > 0$ будет выбрано ниже. Тогда получим эквивалентное (20) уравнение

$$\mu^*(x,t;\xi,\tau) + \int\limits_\tau^t d\eta \int\limits_{-\infty}^{+\infty} K^{(\lambda)}(x-y,t;x,\eta)\mu^*(y,\eta;\xi,\tau)\, dy = F^{(\lambda)}(x,t;\xi,\tau), \quad (x,t;\xi,\tau) \in D^*, \tag{22}$$

где $K^{(\lambda)}(x-y,t;x,\eta) = K(x-y,t;x,\eta)e^{-\lambda(t-\eta)}$, $F^{(\lambda)}(x,t;\xi,\tau) = F(x,t;\xi,\tau)e^{-\lambda(t-\tau)}$, $\mu^*(x,t;\xi,\tau) = \mu(x,t;\xi,\tau)e^{-\lambda(t-\tau)}$.

Через $A^{(\lambda)}$ обозначим линейный оператор, действующий на функции $\mu \in H$ по формуле

$$A^{(\lambda)}\mu(x,t;\xi,\tau) = \int\limits_\tau^t d\eta \int\limits_{-\infty}^{+\infty} K^{(\lambda)}(x-y,t;x,\eta)\mu(y,\eta;\xi,\tau)\, dy, \quad (x,t;\xi,\tau) \in D^*.$$

Докажем, что для достаточно большого $\lambda > 0$ оператор $A^{(\lambda)}: H \to H$ является сжимающим.

Установим сначала, что существует $\lambda_1>0$ такое, что для любой функции $\mu\in H$ и для любых $\lambda\geqslant\lambda_1$ справедливо неравенство

$$|A^{(\lambda_1)}\mu(x,t;\xi,\tau)|\leqslant\frac{1}{4}\|\mu\|_H\frac{\omega_1((t-\tau)^{1/2})}{(t-\tau)^{3/2}}\exp\biggl(-\frac{c}{4}\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\biggr),\quad (x,t;\xi,\tau)\in D^*. \tag{23}$$

Имеем (см. оценку (13)) соотношения

$$|A^{(\lambda)}\mu|\leqslant C\|\mu\|_H\int\limits_\tau^t e^{-\lambda(t-\eta)}\frac{\omega_1((t-\eta)^{1/2})}{(t-\eta)^{3/2}}\frac{\omega_1((\eta-\tau)^{1/2})}{(\eta-\tau)^{3/2}}\,d\eta\,\times$$

$$\times\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp\biggl(-\frac{c}{4}\frac{(x-y)^2}{t-\eta}\biggr)\exp\biggl(-\frac{c}{4}\frac{(y-\xi)^2}{\eta-\tau}\biggr)\,dy=$$

$$=C\|\mu\|_H\frac{1}{(t-\tau)^{1/2}}\exp\biggl(-\frac{c}{4}\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\biggr)\int\limits_\tau^t e^{-\lambda(t-\eta)}\frac{\omega_1((t-\eta)^{1/2})}{t-\eta}\frac{\omega_1((\eta-\tau)^{1/2})}{\eta-\tau}\,d\eta.$$

Но выполняется оценка

$$\biggl(\int\limits_\tau^{(t+\tau)/2}+\int\limits_{(t+\tau)/2}^t\biggr)\frac{\omega_1((t-\eta)^{1/2})}{t-\eta}\frac{\omega_1((\eta-\tau)^{1/2})}{\eta-\tau}e^{-\lambda(t-\eta)}\,d\eta\leqslant C\frac{\omega_1((t-\tau)^{1/2})}{t-\tau}J_{\lambda,\omega_1}(t),$$

поэтому

$$|A^{(\lambda)}\mu(x,t;\xi,\tau)|\leqslant C\|\mu\|_H\frac{\omega_1((t-\tau)^{1/2})}{(t-\tau)^{3/2}}\exp\biggl(-\frac{c}{4}\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\biggr)J_{\lambda,\omega_1}(t)$$

и, следовательно (см. лемму 1), существует $\lambda_1>0$ такое, что для любых $\lambda\geqslant\lambda_1$ верно неравенство (23).

Покажем далее, что существует число $\lambda_2>0$ такое, что для любой функции $\mu\in H$ и для любых $\lambda\geqslant\lambda_2$ справедлива оценка

$$|\Delta_xA^{(\lambda)}\mu(x,t;\xi,\tau)|\leqslant\frac{1}{4}\|\mu\|_H\frac{\omega_1(|\Delta x|)}{(t-\tau)^{3/2}}\biggl(\exp\biggl(-\frac{c}{4}\frac{(x+\Delta x-\xi)^2}{t-\tau}\biggr)+\exp\biggl(-\frac{c}{4}\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\biggr)\biggr), \tag{24}$$

$(x,t;\xi,\tau),(x+\Delta x,t;\xi,\tau)\in D^*$.

В случае $2|\Delta x|^2\geqslant t-\tau$ неравенство (24) сразу следует из (23). Пусть $2|\Delta x|^2\leqslant t-\tau$. В этом случае в силу (12) справедливо представление

$$\Delta_xA^{(\lambda)}\mu(x,t;\xi,\tau)=\int\limits_{t-|\Delta x|^2}^t d\eta\int\limits_{-\infty}^{+\infty}K^{(\lambda)}(x+\Delta x-y,t;x+\Delta x,\eta)[\mu(y,\eta;\xi,\tau)-\mu(x+\Delta x,\eta;\xi,\tau)]\,dy\,-$$

$$-\int\limits_{t-|\Delta x|^2}^t d\eta\int\limits_{-\infty}^{+\infty}K^{(\lambda)}(x-y,t;x,\eta)[\mu(y,\eta;\xi,\tau)-\mu(x,\eta;\xi,\tau)]\,dy\,+$$

$$+\int\limits_{(t+\tau)/2}^{t-|\Delta x|^2}d\eta\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(\mu(y,\eta;\xi,\tau)-\mu(x,\eta;\xi,\tau))\Delta_xK^{(\lambda)}(x-y,t;x,\eta)\,dy\,+$$

$$+\int\limits_{\tau}^{(t+\tau)/2} d\eta \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Delta_x K^{(\lambda)}(x-y,t;x,\eta)\mu(y,\eta;\xi,\tau)\,dy \equiv I_1 - I_2 + I_3 + I_4.$$

Оценим интеграл I_1:

$$|I_1| \leqslant C\|\mu\|_H \int\limits_{t-|\Delta x|^2}^{t} d\eta \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\omega_1((t-\eta)^{1/2})}{(t-\eta)^{3/2}} e^{-\lambda(t-\eta)} \exp\biggl(-c\frac{(x+\Delta x-y)^2}{t-\eta}\biggr) \times$$

$$\times \frac{\omega_1(|x+\Delta x-y|)}{(\eta-\tau)^{3/2}} \biggl(\exp\biggl(-\frac{c}{4}\frac{(y-\xi)^2}{\eta-\tau}\biggr) + \exp\biggl(-\frac{c}{4}\frac{(x+\Delta x-\xi)^2}{\eta-\tau}\biggr)\biggr)\,dy \leqslant$$

$$\leqslant C\|\mu\|_H \frac{\omega_1(|\Delta x|)}{(t-\tau)^{3/2}} \exp\biggl(-\frac{c}{4}\frac{(x+\Delta x-\xi)^2}{t-\tau}\biggr) \int\limits_{t-|\Delta x|^2}^{t} \frac{\omega_1((t-\eta)^{1/2})}{t-\eta} e^{-\lambda(t-\eta)}\,d\eta \leqslant$$

$$\leqslant C\|\mu\|_H \frac{\omega_1(|\Delta x|)}{(t-\tau)^{3/2}} \exp\biggl(-\frac{c}{4}\frac{(x+\Delta x-\xi)^2}{t-\tau}\biggr) J_{\lambda,\omega_1}(t).$$

Аналогично для I_2 получаем оценку

$$|I_2| \leqslant C\|\mu\|_H \frac{\omega_1(|\Delta x|)}{(t-\tau)^{3/2}} \exp\biggl(-\frac{c}{4}\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\biggr) J_{\lambda,\omega_1}(t).$$

Оценим I_3, пользуясь неравенством $(a-b)^2 \geqslant a^2/2 - b^2$, $a,b \in \mathbb{R}$:

$$|I_3| \leqslant C\|\mu\|_H \int\limits_{(t+\tau)/2}^{t-|\Delta x|^2} d\eta \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda(t-\eta)} \frac{\omega_1(|\Delta x|)}{(t-\eta)^{3/2}} \exp\biggl(-\frac{c}{2}\frac{(x-y)^2}{t-\eta}\biggr) \times$$

$$\times \frac{\omega_1(|x-y|)}{(\eta-\tau)^{3/2}} \biggl(\exp\biggl(-\frac{c}{4}\frac{(y-\xi)^2}{\eta-\tau}\biggr) + \exp\biggl(-\frac{c}{4}\frac{(x-\xi)^2}{\eta-\tau}\biggr)\biggr)\,dy \leqslant$$

$$\leqslant C\|\mu\|_H \frac{\omega_1(|\Delta x|)}{(t-\tau)^{3/2}} \exp\biggl(-\frac{c}{4}\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\biggr) \int\limits_{(t+\tau)/2}^{t-|\Delta x|^2} \frac{\omega_1((t-\eta)^{1/2})}{t-\eta} e^{-\lambda(t-\eta)}\,d\eta \leqslant$$

$$\leqslant C\|\mu\|_H \frac{\omega_1(|\Delta x|)}{(t-\tau)^{3/2}} \exp\biggl(-\frac{c}{4}\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\biggr) J_{\lambda,\omega_1}(t).$$

Наконец, оценим I_4:

$$|I_4| \leqslant C\|\mu\|_H \int\limits_{\tau}^{(t+\tau)/2} d\eta \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\omega_1(|\Delta x|)}{(t-\eta)^{3/2}} \exp\biggl(-\frac{c}{2}\frac{(x-y)^2}{t-\eta}\biggr) \times$$

$$\times \frac{\omega_1((\eta-\tau)^{1/2})}{(\eta-\tau)^{3/2}} \exp\biggl(-\frac{c}{4}\frac{(y-\xi)^2}{\eta-\tau}\biggr) e^{-\lambda(t-\eta)}\,dy \leqslant$$

$$\leqslant C\|\mu\|_H \frac{\omega_1(|\Delta x|)}{(t-\tau)^{3/2}} \exp\biggl(-\frac{c}{4}\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\biggr) \int\limits_{\tau}^{(t+\tau)/2} \frac{\omega_1((\eta-\tau)^{1/2})}{\eta-\tau} e^{-\lambda(\eta-\tau)}\,d\eta \leqslant$$

$$\leqslant C\|\mu\|_H \frac{\omega_1(|\Delta x|)}{(t-\tau)^{3/2}} \exp\biggl(-\frac{c}{4}\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\biggr) J_{\lambda,\omega_1}(t).$$

Из оценок для интегралов I_1, I_2, I_3, I_4 и из леммы 1, выбрав достаточно большое $\lambda_2 > 0$, получаем (24).

Полагая $\lambda_0 = \max(\lambda_1, \lambda_2)$, заключаем, что для оператора $A^{(\lambda_0)} : H \to H$ выполняется неравенство $\|A^{(\lambda_0)}\| \leqslant 1/2$, и, следовательно, оператор $A^{(\lambda_0)} : H \to H$ является сжимающим. Поэтому интегральное уравнение (22) для $\lambda = \lambda_0$ имеет единственное решение $\mu^* \in H$. Возвращаясь к уравнению (20), приходим к выводу, что функция $\mu(x,t;\xi,\tau) = \mu^*(x,t;\xi,\tau)e^{\lambda_0(t-\tau)}$ является единственным решением уравнения (20) из пространства H и справедливо неравенство (21). Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть коэффициенты уравнения $L_1 u = 0$ удовлетворяют условиям (a) и (b). Тогда для уравнения $L_1 u = 0$ существует фундаментальное решение $\Gamma_1(x,t;\xi,\tau)$, $(x,t;\xi,\tau) \in \in D^*$. Оно имеет вид*

$$\Gamma_1(x,t;\xi,\tau) = Z_1(x-\xi,t;\xi,\tau) + W_0(x,t;\xi,\tau), \tag{25}$$

где

$$W_0(x,t;\xi,\tau) = \int\limits_\tau^t d\eta \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_0(x-y,t;x,\eta)\mu(y,\eta;\xi,\tau)\,dy, \tag{26}$$

$\mu \in H$ – решение интегрального уравнения

$$\mu(x,t;\xi,\tau) + \int\limits_\tau^t d\eta \int\limits_{-\infty}^{+\infty} K(x-y,t;x,\eta)\mu(y,\eta;\xi,\tau)\,dy =$$

$$= -L_{1x,t} Z_1(x-\xi,t;\xi,\tau), (x,t;\xi,\tau) \in D^*, \tag{27}$$

и справедливы оценки

$$\left|\frac{\partial^{k+l}\Gamma_1}{\partial t^l \partial x^k}(x,t;\xi,\tau)\right| \leqslant C(t-\tau)^{-(1+2l+k)/2} \exp\biggl(-\frac{c}{4}\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\biggr), \tag{28}$$

причём

$$\left|\frac{\partial^{k+l}W_0}{\partial t^l \partial x^k}(x,t;\xi,\tau)\right| \leqslant C\frac{\tilde\omega_1((t-\tau)^{1/2})}{(t-\tau)^{(1+2l+k)/2}} \exp\biggl(-\frac{c}{4}\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\biggr), \tag{29}$$

$(x,t;\xi,\tau) \in D^*$, $0 \leqslant 2l+k \leqslant 2$.

Доказательство. Ищем фундаментальное решение уравнения $L_1 u = 0$ в виде

$$\Gamma_1(x,t;\xi,\tau) = Z_1(x-\xi,t;\xi,\tau) + \int\limits_\tau^t d\eta \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_0(x-y,t;x,\eta)\mu(y,\eta;\xi,\tau)\,dy, \tag{30}$$

$(x,t;\xi,\tau) \in D^*$, где $\mu \in H$ – функция, подлежащая определению.

Потребуем, чтобы функция Γ_1 для любых фиксированных $\xi \in \mathbb{R}$ и $\tau \in [0,T)$ удовлетворяла уравнению $L_1 u = 0$ по переменным x и t:

$$L_{1x,t}\Gamma_1(x,t;\xi,\tau) = 0.$$

Тогда (см. (19)) для отыскания функции $\mu \in H$ получаем интегральное уравнение (27). В силу свойств функции Z_1 правая часть (27) принадлежит пространству H и, следовательно, в силу леммы 2 уравнение (27) имеет единственное решение $\mu \in H$. Подставляя это решение в (30), определяем функцию Γ_1.

Из (5) и (18) следует, что определённая таким образом функция Γ_1 непрерывна в D^* вместе со своими производными $\partial\Gamma_1/\partial t$, $\partial\Gamma_1/\partial x$, $\partial^2\Gamma_1/\partial x^2$ и справедливы оценки (28) и (29).

Кроме того, в силу (4) для любой непрерывной и ограниченной функции $h(x)$, $x \in \mathbb{R}$, справедливо соотношение

$$\lim_{(x,t)\to(x_0,\tau+0)} \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_1(x,t;\xi,\tau)h(\xi)\,d\xi = h(x_0), \quad x_0 \in \mathbb{R}, \quad 0 \leqslant \tau < T.$$

Таким образом, функция Γ_1 из (25) является фундаментальным решением уравнения $L_1 u = 0$. Лемма доказана.

Замечание. Из единственности решения задачи Коши следует равенство

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_1(x,t;\xi,\tau)\,d\xi = 1, \quad x \in \mathbb{R}, \quad 0 \leqslant \tau < t \leqslant T. \tag{31}$$

Уточним теперь оценку (29).

Лемма 4. *Пусть выполнены условия леммы 3 и* Γ_1 *– фундаментальное решение уравнения* $L_1 u = 0$. *Тогда для функции* W_0 *из (26) справедливы представление*

$$W_0(x,t;\xi,\tau) = -\int_\tau^t d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_1(x,t;y,\eta) L_{1y,\eta} Z_1(y-\xi,\eta,\xi,\tau)\,dy$$

и оценки

$$\left|\frac{\partial^{k+l} W_0}{\partial t^l \partial x^k}(x,t;\xi,\tau)\right| \leqslant C \frac{\tilde{\omega}_0((t-\tau)^{1/2})}{(t-\tau)^{(1+2l+k)/2}} \exp\left(-\frac{c}{4}\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\right), \tag{32}$$

$(x,t;\xi,\tau) \in D^*$, $0 \leqslant 2l + k \leqslant 2$.

Доказательство. Положим

$$\nu(x,t;\xi,\tau) = L_{1x,t} Z_1(x-\xi,t;\xi,\tau) = (a(\xi,t) - a(x,t))\frac{\partial^2 Z_1}{\partial x^2}(x-\xi,t;\xi,\tau) + b(x,t)\frac{\partial Z_1}{\partial x}(x-\xi,t;\xi;\tau)$$

и

$$W_1(x,t;\xi,\tau) = -\int_\tau^t d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_1(x,t;y,\eta) L_{1y,\eta} Z_1(y-\xi,\eta,\xi,\tau)\,dy, \quad (x,t;\xi,\tau) \in D^*.$$

Функция $\nu \in H$, поэтому потенциал W_1 имеет непрерывные в D^* производные (см. (31))

$$\frac{\partial W_1}{\partial x}(x,t;\xi,\tau) = -\int_\tau^t d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \Gamma_1}{\partial x}(x,t;y,\eta)\nu(y,\eta;\xi,\tau)\,dy, \tag{33}$$

$$\frac{\partial^2 W_1}{\partial x^2}(x,t;\xi,\tau) = -\int_\tau^t d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 \Gamma_1}{\partial x^2}(x,t;y,\eta)\nu(y,\eta;\xi,\tau)\,dy =$$

$$= -\int_\tau^t d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 \Gamma_1}{\partial x^2}(x,t;y,\eta)[\nu(y,\eta;\xi,\tau) - \nu(x,\eta;\xi,\tau)]\,dy, \tag{34}$$

$$\frac{\partial W_1}{\partial t}(x,t;\xi,\tau) = -\nu(x,t;\xi,\tau) - \int_\tau^t d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \Gamma_1}{\partial t}(x,t;y,\eta)\nu(y,\eta;\xi,\tau)\,dy =$$

$$= -\nu(x,t;\xi,\tau) - \int\limits_{\tau}^{t} d\eta \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \Gamma_1}{\partial t}(x,t;y,\eta)[\nu(y,\eta;\xi,\tau) - \nu(x,\eta;\xi,\tau)]\, dy. \qquad (35)$$

Отсюда, в частности, следует равенство

$$L_{1x,t} W_1(x,t;\xi,\tau) = -\nu(x,t;\xi,\tau) - \int\limits_{\tau}^{t} d\eta \int\limits_{-\infty}^{+\infty} L_{1x,t}\Gamma_1(x,t;y,\eta)\nu(y,\eta;\xi,\tau)\, dy = -\nu(x,t;\xi,\tau). \quad (36)$$

Из (33)–(35) и того, что $\nu \in H$, получаем оценки

$$\left| \frac{\partial^{k+l} W_1}{\partial t^l \partial x^k}(x,t;\xi,\tau) \right| \leqslant C \frac{\tilde{\omega}_0((t-\tau)^{1/2})}{(t-\tau)^{(1+2l+k)/2}} \exp\left(-\frac{c}{4} \frac{(x-\xi)^2}{t-\tau} \right), \qquad (37)$$

$(x,t;\xi,\tau) \in D^*$, $0 \leqslant 2l + k \leqslant 2$.

Из равенства (36) заключаем, что сумма $Z_1(x-\xi,t;\xi,\tau) + W_1(x,t;\xi,\tau)$ также является фундаментальным решением уравнения $L_1 u = 0$ и, следовательно, совпадает с $\Gamma_1(x,t;\xi,\tau)$. Отсюда делаем вывод, что $W_1 \equiv W_0$ в D^* и (см. (37)) справедливы оценки (32). Лемма доказана.

4. Доказательство основной теоремы. Пусть Γ_1 – фундаментальное решение уравнения $L_1 u = 0$, существование которого доказано в лемме 3. Для Γ_1 имеют место оценки

$$\left| \frac{\partial^{k+l} \Gamma_1}{\partial t^l \partial x^k}(x,t;\xi,\tau) \right| \leqslant C(t-\tau)^{-(1+2l+k)/2} \exp\left(-c_1 \frac{(x-\xi)^2}{t-\tau} \right), \qquad (38)$$

$(x,t;\xi,\tau) \in D^*$, $0 \leqslant 2l + k \leqslant 2$.

В этом и только в этом пункте зафиксируем постоянную c_1 из неравенства (38).

Пусть H_1 – множество непрерывных функций $\nu : D^* \to \mathbb{R}$, для которых конечна величина

$$\|\nu\|_{H_1} = \sup_{D^*} \frac{t^{1/2}(t-\tau)}{\omega_0((t-\tau)^{1/2})} \exp\left(c_1 \frac{(x-\xi)^2}{t-\tau} \right) |\nu(x,t;\xi,\tau)|.$$

Заметим, что H_1 – банахово пространство с нормой $\|\nu\|_{H_1}$.

Лемма 5. *Пусть* Γ_1 *– фундаментальное решение уравнения* $L_1 u = 0$. *Тогда интегральное уравнение*

$$\nu(x,t;\xi,\tau) + \int\limits_{\tau}^{t} d\eta \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Big(c(x,t)\Gamma_1(x,t;y,\eta) \Big) \nu(y,\eta;\xi,\tau)\, dy = F_1(x,t;\xi,\tau), \quad (x,t;\xi,\tau) \in D^*, \quad (39)$$

где $F_1(x,t;\xi,\tau) = -c(x,t)\Gamma_1(x,t;\xi,\tau)$, *имеет единственное решение* $\nu \in H_1$. *Для этого решения справедлива оценка*

$$|\Delta_x \nu(x,t;\xi,\tau)| \leqslant C \frac{\omega_0(|\Delta x|)}{t^{1/2}(t-\tau)} \left(\exp\left(-c \frac{(x+\Delta x-\xi)^2}{t-\tau} \right) + \exp\left(-c \frac{(x-\xi)^2}{t-\tau} \right) \right), \qquad (40)$$

$(x,t;\xi,\tau), (x+\Delta x,t;\xi,\tau) \in D^*$.

Доказательство. Заметим, что в силу условия (b) и оценок (38) функция $F_1 \in H_1$. Умножим обе части уравнения (39) на $e^{-\lambda(t-\tau)}$, где $\lambda > 0$ будет выбрано ниже. Тогда получим эквивалентное (39) интегральное уравнение

$$\nu^*(x,t;\xi,\tau) + \int\limits_{\tau}^{t} d\eta \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda(t-\eta)} (c(x,t)\Gamma_1(x,t;y,\eta)) \nu^*(y,\eta;\xi,\tau)\, dy = F_1^*(x,t;\xi,\tau), \qquad (41)$$

где $\nu^*(x,t;\xi,\tau) = \nu(x,t;\xi,\tau)e^{-\lambda(t-\tau)}$, $F_1^*(x,t;\xi,\tau) = F_1(x,t;\xi,\tau)e^{-\lambda(t-\tau)}$.

Через $B^{(\lambda)}$ обозначим линейный оператор, действующий на функции $\nu \in H_1$ по формуле

$$B^{(\lambda)}\nu(x,t;\xi,\tau) = \int\limits_\tau^t d\eta \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda(t-\eta)}(c(x,t)\Gamma_1(x,t;y,\eta))\nu(y,\eta;\xi,\tau)\,dy, \quad (x,t;\xi,\tau) \in D^*.$$

Докажем, что существует число $\lambda_1 > 0$ такое, что оператор $B^{(\lambda_1)} : H_1 \to H_1$ – сжимающий. В самом деле, имеем (см. условие (b) для коэффициента c)

$$|B^{(\lambda)}\nu| \leqslant C\|\nu\|_{H_1}\frac{\omega_0(t^{1/2})}{t}\frac{1}{(t-\tau)^{1/2}}\exp\biggl(-c_1\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\biggr)\int\limits_\tau^t e^{-\lambda(t-\eta)}\frac{\omega_0((\eta-\tau)^{1/2})}{\eta^{1/2}(\eta-\tau)^{1/2}}\,d\eta \leqslant$$

$$\leqslant C\|\nu\|_{H_1}\frac{\omega_0((t-\tau)^{1/2})}{t^{1/2}(t-\tau)}\exp\biggl(-c_1\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\biggr)\int\limits_\tau^t e^{-\lambda(t-\eta)}\frac{\omega_0((\eta-\tau)^{1/2})}{\eta-\tau}\,d\eta \leqslant$$

$$\leqslant C\|\nu\|_{H_1}\frac{\omega_0((t-\tau)^{1/2})}{t^{1/2}(t-\tau)}\exp\biggl(-c_1\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\biggr)J_{\lambda,\omega_0}(t).$$

В силу свойств интеграла $J_{\lambda,\omega_0}(t)$ (см. лемму 1) выбираем $\lambda_1 > 0$ таким, что $CJ_{\lambda,\omega_0}(t) < 1/2$ при любых $\lambda \geqslant \lambda_1$. Тогда для любой функции $\nu \in H_1$ получаем оценку

$$|B^{(\lambda)}\nu| \leqslant \frac{1}{2}\|\nu\|_{H_1}\frac{\omega_0((t-\tau)^{1/2})}{t^{1/2}(t-\tau)}\exp\biggl(-c_1\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\biggr), \quad (x,t;\xi,\tau) \in D^*,$$

если $\lambda \geqslant \lambda_1$. Таким образом, имеем

$$\|B^{(\lambda_1)}\nu\|_{H_1} \leqslant \frac{1}{2}\|\nu\|_{H_1}.$$

Следовательно, интегральное уравнение (41) при $\lambda = \lambda_1$ имеет единственное решение $\nu^* \in H_1$. Отсюда, полагая $\nu = \nu^* e^{\lambda_1(t-\tau)}$, делаем вывод, что $\nu \in H_1$ – единственное решение уравнения (39).

Докажем неравенство (40). В случае $t-\tau \leqslant |\Delta x|^2$ оценка (40) сразу следует из того, что $\nu \in H_1$.

Пусть $t-\tau > |\Delta x|^2$. Положим

$$B\nu(x,t;\xi,\tau) = \int\limits_\tau^t d\eta \int\limits_{-\infty}^{+\infty} c(x,t)\Gamma_1(x,t;y,\eta)\nu(y,\eta;\xi,\tau)\,dy, \quad (x,t;\xi,\tau) \in D^*,$$

и рассмотрим $\Delta_x B\nu$. Имеем

$$|\Delta_x B\nu(x,t;\xi,\tau)| \leqslant \int\limits_\tau^t d\eta \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\Gamma_1(x,t;y,\eta)\Delta_x c(x,t)\nu(y,\eta;\xi,\tau)|\,dy +$$

$$+ \int\limits_\tau^t d\eta \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |c(x+\Delta x,t)\Delta_x\Gamma_1(x,t;y,\eta)\nu(y,\eta;\xi,\tau)|\,dy \leqslant$$

$$\leqslant C\frac{\omega_0(|\Delta x|)}{t(t-\tau)^{1/2}}\exp\biggl(-c\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\biggr)\int\limits_\tau^t \frac{\omega_0((\eta-\tau)^{1/2})}{\eta-\tau}\,d\eta + C\frac{\omega_0(t^{1/2})}{t}\frac{|\Delta x|}{(t-\tau)^{1/2}} \times$$

$$\times \left(\exp\left(-c\frac{(x-\xi)^2}{t-\eta}\right) + \exp\left(-c\frac{(x+\Delta x-\xi)^2}{t-\eta}\right)\right) \int\limits_\tau^t \frac{1}{(t-\eta)^{1/2}} \frac{\omega_0((\eta-\tau)^{1/2})}{\eta-\tau}\, d\eta \leqslant$$

$$\leqslant C\frac{\omega_0(|\Delta x|)}{t^{1/2}(t-\tau)}\left(\exp\left(-c\frac{(x-\xi)^2}{t-\eta}\right) + \exp\left(-c\frac{(x+\Delta x-\xi)^2}{t-\eta}\right)\right), \tag{42}$$

$(x,t;\xi,\tau), (x+\Delta x,t;\xi,\tau) \in D^*$.

Оценим $|\Delta_x F_1(x,t;\xi,\tau)|$ в случае $t-\tau \leqslant |\Delta x|^2$:

$$|\Delta_x F_1(x,t;\xi,\tau)| \leqslant |\Delta_x c(x,t)\Gamma_1(x,t;\xi,\tau)| + |c(x+\Delta x,t)\Delta_x\Gamma_1(x,t;\xi,\tau)| \leqslant$$

$$\leqslant C\frac{\omega_0(|\Delta x|)}{t}\frac{1}{(t-\tau)^{1/2}}\exp\left(-c\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\right) +$$

$$+ C\frac{\omega_0(t^{1/2})}{t}\frac{|\Delta x|}{t-\tau}\left(\exp\left(-c\frac{(x+\Delta x-\xi)^2}{t-\tau}\right) + \exp\left(-c\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\right)\right) \leqslant$$

$$\leqslant C\frac{\omega_0(|\Delta x|)}{t^{1/2}(t-\tau)}\left(\exp\left(-c\frac{(x+\Delta x-\xi)^2}{t-\tau}\right) + \exp\left(-c\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\right)\right).$$

Отсюда, учитывая (42), получаем окончательно оценку (40). Лемма доказана.

Пусть $\nu \in H_1$ – решение интегрального уравнения (39). Тогда справедливы неравенства

$$|\nu(x,t;\xi,\tau)| \leqslant C\frac{\omega_0((t-\tau)^{1/2})}{(t-\tau)^{3/2}}\exp\left(-c\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\right)$$

и

$$|\Delta_x\nu(x,t;\xi,\tau)| \leqslant C\frac{\omega_0(|\Delta x|)}{(t-\tau)^{3/2}}\left(\exp\left(-c\frac{(x+\Delta x-\xi)^2}{t-\tau}\right) + \exp\left(-c\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\right)\right),$$

$(x,t;\xi,\tau), (x+\Delta x,t;\xi,\tau) \in D^*$.

Из этих оценок, равенства (31) и оценок (38) следует, что для функции

$$W_2(x,t;\xi,\tau) = \int\limits_\tau^t d\eta \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_1(x,t;y,\eta)\nu(y,\eta;\xi,\tau)\, dy \tag{43}$$

справедливы неравенства

$$\left|\frac{\partial^{k+l} W_2}{\partial t^l \partial x^k}(x,t;\xi,\tau)\right| \leqslant C\tilde\omega_0((t-\tau)^{1/2})(t-\tau)^{-(1+2l+k)/2}\exp\left(-c_1\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\right), \tag{44}$$

$(x,t;\xi,\tau) \in D^*$, $0 \leqslant 2l+k \leqslant 2$.

Доказательство теоремы. Пусть $\nu \in H_1$ – решение интегрального уравнения (39), существование которого доказано в лемме 5, и функция W_2 задана формулой (43). Тогда из свойств функции Γ_1 и оценок (44) получаем, что функция

$$\Gamma(x,t;\xi,\tau) = \Gamma_1(x,t;\xi,\tau) + W_2(x,t;\xi,\tau), \quad (x,t;\xi,\tau) \in D^*,$$

является фундаментальным решением уравнения $Lu = 0$ и выполнены оценки (2).

Кроме того, из представления (25) следует равенство

$$\Gamma(x,t;\xi,\tau) = Z_1(x-\xi,t;\xi,\tau) + W_0(x,t;\xi,\tau) + W_2(x,t;\xi,\tau), \quad (x,t;\xi,\tau) \in D^*,$$

из которого, учитывая оценки (32) и (44), получаем неравенства (3). Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М., 1967.
2. *Бадерко Е.А.* О потенциалах для $2p$-параболических уравнений // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19. № 1. С. 9–18.
3. *Зейнеддин М.* Гладкость потенциала простого слоя для параболической системы второго порядка в классах Дини // Деп. ВИНИТИ РАН. 16.04.92. № 1294–В92.
4. *Zhenyakova I.V., Cherepova M.F.* The Cauchy problem for a multi-dimensional parabolic equation with Dini-continuous coefficients // J. of Math. Sci. 2022. V. 264. № 5. P. 581–602.
5. *Ильин А.М.* О фундаментальном решении параболического уравнения // Докл. АН СССР. 1962. Т. 147. № 4. С. 768–771.
6. *Дзядык В.К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. М., 1977.
7. *Камынин Л.И.* О гладкости тепловых потенциалов в пространстве Дини–Гёльдера // Сиб. мат. журн. 1970. Т. 11. № 5. С. 1017–1045.
8. *Эйдельман С.Д.* Параболические системы. М., 1964.

Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова,
Московский центр фундаментальной
и прикладной математики

Поступила в редакцию 22.09.2022 г.
После доработки 22.09.2022 г.
Принята к публикации 20.01.2023 г.