ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 2, с. 208–222

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.958

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДВУМЕРНОГО ЯДРА РЕЛАКСАЦИИ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

© 2023 г. Д. К. Дурдиев, Ж. Ш. Сафаров

Рассматривается многомерная обратная задача определения ядра интегрального члена интегро-дифференциального волнового уравнения. В прямой задаче требуется найти функцию смещения из начально-краевой задачи, в обратной – определить ядро интегрального члена, зависящего как от временно́й, так и от одной пространственной переменных. Доказывается локальная однозначная разрешимость поставленной задачи в классе функций, непрерывных по одной из переменных и аналитических по другой, на основе метода шкал банаховых пространств вещественных аналитических функций.

DOI: 10.31857/S0374064123020073, EDN: PUSIWP

Введение. Рассмотрим интегро-дифференциальное уравнение

$$u_{tt} = \Delta u + \int\limits_0^t k(x,\alpha)u(x,z,t-\alpha)\,d\alpha, \quad x \in \mathbb{R}, \quad z \in (0,l), \quad t > 0, \tag{1}$$

с начальными условиями

$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad z \in (0,l), \tag{2}$$

и граничными условиями

$$u_z|_{z=0} = \psi(x,t), \quad u_z|_{z=l} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0. \tag{3}$$

Здесь $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial z^2$ – оператор Лапласа, $\psi(x,t)$ – заданная достаточно гладкая функция; $l > 0$ – некоторое фиксированное вещественное число.

Нахождение функции $u(x,t)$ из задачи (1)–(3) при известной $k(x,t)$ называется *прямой задачей*.

Обратная задача заключается в определении ядра $k(x,t)$ интегро-дифференциального уравнения (1), если относительно решения задачи (1)–(3) известно, что

$$u(x,0,t) = f(x,t), \quad t \geqslant 0,$$

где $f(x,t)$ – заданная функция.

В обратных задачах для интегро-дифференциальных уравнений гиперболического типа, когда ядро интеграла зависит только от одной переменной, во многих случаях имеют место теоремы глобальной однозначной разрешимости [1–4]. Для многомерных обратных задач известны только специальные случаи, для которых установлена разрешимость. Функции, непрерывные по одной из переменных и аналитические по другим переменным, относятся классу функций, в которых имеет место разрешимость. Идея применения метода шкал банаховых пространств аналитических функций к многомерным обратным задачам, развитая в работах Л.В. Овсянникова [5] и Л. Ниренберга [6], принадлежит В.Г. Романову. В своих работах [7–9] он применил этот метод (с некоторыми модификациями) к вопросам локальной разрешимости многомерных обратных задач. В статьях [10–13] на его основе исследованы многомерные обратные задачи определения свёрточного ядра в гиперболических интегро-дифференциальных уравнениях второго порядка. Задача, которая исследуется в данной работе, относится к числу многомерных обратных задач для интегро-дифференциальных уравнений.

Следуя работам [7] и [14, с. 92], введём понятие шкалы банаховых пространств аналитических функций одного вещественного аргумента.

Пусть $h(x)$, $x \in \mathbb{R}$, является вещественной функцией, для которой имеет место следующее соотношение:

$$\|h\|_s(r) := \sup_{|x|\leqslant r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s^n}{n!} \left| \frac{d^n}{dx^n} h(x) \right| < \infty,$$

где $r > 0$, $s > 0$ – некоторые параметры. Множество функций $h(x)$, для которых выполнено неравенство $\|h\|_s(r) < \infty$, является *банаховым пространством аналитических функций* и обозначается $A_s(r)$. Далее параметр r будет считаться фиксированным, а s рассматриваться как переменный параметр. Так как параметр r фиксирован, будем в дальнейшем для сокращения записей опускать его и использовать обозначения $\|h\|_s$, A_s вместо $\|h\|_s(r)$, $A_s(r)$. Совокупность пространств A_s для $s \in (0, s_0)$, $s_0 > 0$, образует *шкалу банаховых пространств.* При этом если $h(x) \in A_s$, то $h(x) \in A_{s'}$ для всех $s' \in (0, s)$, следовательно, $A_s \subset A_{s'}$, если $s' < s$ и имеет место неравенство [14, с. 92]

$$\left\| \frac{d^n}{dx^n} h \right\|_{s'} \leqslant n^n \frac{\|h\|_s}{(s - s')^n} \tag{4}$$

для любого положительного целого числа n.

Будем считать, что векторная функция принадлежит пространству A_s, если все её компоненты являются элементами A_s. Нормой в A_s назовём максимальную из норм в A_s (компонент этой функции).

Ниже рассматриваются функции, которые являются аналитическими по $x \in \mathbb{R}$ и зависят от переменных $(z, t) \in \Omega$, где Ω – некоторая компактная область с кусочно-гладкой границей. В связи с этим нам потребуется

Определение. Функция $\omega = \omega(x, z, t) \in C(A_s, \Omega)$, если $\omega \in A_s$ для всех $(z, t) \in \Omega$, непрерывна в Ω как элемент пространства A_s и, кроме того, удовлетворяет условию

$$\|\omega\|_{C(A_s,\Omega)} := \sup_{(z,t)\in\Omega} \|\omega\|_s(z, t) < \infty.$$

Очевидно, что $C(A_s, \Omega)$ – банахово пространство.

1. Исследование прямой задачи. Рассмотрим задачу (1)–(3) в области $\mathbb{B} = \mathbb{B}_1 \bigcup \mathbb{B}_2$, в которой

$$\mathbb{B}_1 = \mathbb{R} \times G_1, \quad G_1 = \{(z, t) : 0 < z < l, \ \ 0 < t < z\},$$

$$\mathbb{B}_2 = \mathbb{R} \times G_2, \quad G_2 = \{(z, t) : 0 < z < l, \ \ z < t < 2l - z\}.$$

Лемма. *Пусть* $(k(x, t), \psi(x, t)) \in C(A_s, [0, T])$. *Тогда решение* $u(x, z, t)$ *уравнения (1) при условиях (2), (3):*

1) в области $\mathbb{B}_1$ *тождественно равно нулю;*

2) в области $\mathbb{B}_2$ *удовлетворяет следующему интегро-дифференциальному уравнению:*

$$u(x,z,t) = -\int\limits_0^{t-z} \psi(x,\tau)\,d\tau - \int\limits_0^{t-z}\int\limits_0^{\tau/2} \left[u_{xx}(x,\xi,\tau-\xi) + \int\limits_0^{\tau-2\xi} k(x,\alpha) u(x,\xi,-\xi+\tau-\alpha)\,d\alpha \right] d\xi\,d\tau -$$

$$-\int\limits_{t-z}^{t} \int\limits_{\tau-t+z}^{(2\tau-t+z)/2} \left[u_{xx}(x,\xi,-\xi+2\tau-t+z) + \int\limits_0^{-2\xi+2\tau-t+z} k(x,\alpha) u(x,\xi,-\xi+2\tau-t+z-\alpha)\,d\alpha \right] d\xi\,d\tau, \tag{5}$$

причём справедливы равенства

$$u(x,z,z+0)=0,\quad u_t(x,z,z+0)=-\psi(x,0),\quad u_{tt}(x,z,z+0)=-\psi_t(x,0)-\frac{1}{2}\psi_{xx}(x,0)z=:g(x,z).$$

Доказательство. В области $\mathbb{B}_0\subset\mathbb{B}_1$ согласно формуле Даламбера получим интегро-дифференциальное уравнение

$$u(x,z,t)=\frac{1}{2}\iint\limits_{\triangle(z,t)}\Big[u_{xx}(x,\xi,\tau)+\int\limits_0^\tau k(x,\alpha)u(x,\xi,\tau-\alpha)\,d\alpha\Big]\,d\xi\,d\tau, \tag{6}$$

где $\triangle(z,t)=\{(\xi,\tau):z-t+\tau\leqslant\xi\leqslant z+t-\tau,\ 0\leqslant\tau\leqslant t\}$, $\mathbb{B}_0=\mathbb{R}\times G_0$, а $G_0=\{(z,t):0\leqslant z\leqslant l,$ $0\leqslant t\leqslant l/2-|z-l/2|\}$.

Докажем, что уравнение (6) имеет только нулевое решение в классе функций, принадлежащих пространству $C(A_s,\mathbb{B}_0)$.

Рассмотрим область $\triangle(z_1,t_1)$ с произвольной фиксированной точкой $(z_1,t_1)\in G_0$. Пусть $k(x,t)\in C(A_{s_0},[0,l])$, $s_0>0$. Введём обозначения

$$K:=\max_{0\leqslant t\leqslant t_1}\|k(t)\|_{s_0},\quad U(t):=\max_{z_1-t_1+t\leqslant t\leqslant z_1+t_1-t}\|u(z,t)\|_{s_0}.$$

Тогда, использовав формулу (4) при $n=2$, из (6) получим неравенство

$$U(t)\leqslant\frac{t_1}{2}\int\limits_0^t\Big[\frac{4}{(s(\tau)-s)^2}+t_1K\Big]U(\tau)\,d\tau,\quad t\in(0,t_1),\quad s\in(0,s_0).$$

Здесь в качестве функции $s(\tau)$ можно взять $s(\tau)=[s+s_0(1-\tau/t_1)]/2$. Тогда для $(t,s)\in$ $\in(0,t_1)\times(0,s_0)$ переменная точка $(\tau,s(\tau))\in(0,t_1)\times(0,s_0)$ при любом $\tau\in(0,t)$. Из (4) следует оценка

$$U(t)\leqslant\frac{t_1(4+t_1s_0K)}{2}\int\limits_0^t\frac{1}{(s(\tau)-s)^2}U(\tau)\,d\tau,\quad t\in(0,t_1),\quad s\in(0,s_0).$$

Отсюда, согласно неравенству Гроноулла, имеем, что $U(t)=0$, $t\in(0,t_1)$. Так как (z_1,t_1) – произвольная точка области G_0, то $u\equiv0$ в области $\mathbb{B}_0$. Лемма доказана.

Замечание. Следует отметить, что доказательство тождества $u(x,z,t)\equiv0$ для $(x,z,t)\in$ $\in\mathbb{B}_0$ может быть проведено с использованием формулы Пуассона, дающей решение задачи Коши для двумерного волнового уравнения. Применение этой формулы в области $\mathbb{B}_0$ к уравнению (1) с нулевыми начальными данными (2) приведёт к интегральному уравнению вольтеровского типа первого рода относительно функции u, которое имеет только нулевое решение.

Продолжим доказательство первой части леммы. Возьмём произвольную точку $(x,z,t)\in$ $\in\mathbb{B}_1\backslash\mathbb{B}_0$. В уравнении (1) перенесём u_{zz} в левую часть и представим волновой оператор $(\partial^2/\partial t^2-\partial^2/\partial z^2)$ в виде $(\partial/\partial t+\partial/\partial z)(\partial/\partial t-\partial/\partial z)$. Проинтегрировав полученное равенство вдоль характеристики $dz/dt=1$ от точки $(x,z-t,0)$ до точки (x,z,t), как и в работе [2] получим

$$(u_t-u_z)(x,z,t)-(u_t-u_z)(x,z-t,0)=\int\limits_0^t\Big[u_{xx}(x,z,\tau)+\int\limits_0^\tau k(x,\tau-\alpha)u(x,\tau-t+x,\alpha)\,d\alpha\Big]\,d\tau.$$

Использовав данные (2), запишем последнее соотношение в виде

$$(u_t-u_x)|_{x=l}=\int\limits_{t/2}^t\Big[u_{xx}(x,z,\tau)+\int\limits_0^\tau k(x,\tau-\alpha)u(x,\tau-t+x,\alpha)\,d\alpha\Big]\,d\tau,\quad t\in(0,l).$$

Далее, с помощью граничного условия (3) при $z = l$ отсюда находим

$$u(x,l,t) = \int_0^t \int_{\tau/2}^{\tau} \left[u_{xx}(x,\tau,\theta) + \int_0^{\theta} k(x,\theta-\alpha)u(x,\theta-\tau+l,\alpha)\,d\alpha \right] d\theta\,d\tau.$$

Если сделать замену переменных θ на ξ во внутреннем интеграле по формуле $\theta - \tau + l = \xi$, то последнее уравнение принимает вид

$$u(x,l,t) = \int_0^t \int_{l-\tau/2}^{l} \left[u_{xx}(x,\tau-l+\xi,\tau) + \int_0^{\tau-l+\xi} k(x,\tau-l+\xi-\alpha)u(x,\xi,\alpha)\,d\alpha \right] d\xi\,d\tau. \qquad (7)$$

Проинтегрировав уравнение (1) вдоль характеристики $dz/dt = 1$ от точки $(x, z-t, 0)$ до точки (x,z,t), получим

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z}\right)u(x,z,t) = \int_{(l+z-t)/2}^{z} \left[u_{xx}(x,\xi,t) + \int_0^{\xi+t-z} k(x,\xi+t-z-\alpha)u(x,\xi,\alpha)\,d\alpha \right] d\xi.$$

Далее, интегрируя это равенство вдоль характеристики $dz/dt = -1$ от точки (x,z,t) до точки $(x,l,t+z-l)$ и используя формулу (7), находим уравнение для $u(x,z,t)$ в области $\mathbb{B}_1 \backslash \mathbb{B}_0$:

$$u(x,z,t) = \int_0^{t+z-l} \int_{l-\tau/2}^{l} \left[u_{xx}(x,\xi,\tau) + \int_0^{\xi+\tau-l} k(x,\xi+\tau-l-\alpha)u(\xi,\alpha,\tau)\,d\alpha \right] d\xi\,d\tau +$$

$$+ \int_{t+z-l}^{t} \int_{(l+z-t-2\tau)/2}^{-\tau+z+t} \left[u_{xx}(x,\xi,\tau) + \int_0^{\xi+2\tau-z-t} k(x,\xi+2\tau-z-t-\alpha)u(\xi,\alpha,\tau)\,d\alpha \right] d\xi\,d\tau,$$

где $(x,z,t) \in \mathbb{B}_1 \backslash \mathbb{B}_0$. Тот факт, что это уравнение имеет только нулевое решение в классе функций, принадлежащих пространству $C(A_s, \mathbb{B}_1 \backslash \mathbb{B}_0)$, доказывается так же, как и для уравнения (6).

В области $\mathbb{B}_2$ проинтегрируем уравнение (1) вдоль характеристики $dz/dt = -1$ и получим равенство

$$(u_t + u_x)(x,0,t) = -\int_0^{t/2} \left[u_{xx}(x,\xi,t-\xi) + \int_0^{-2\xi+t} k(x,\alpha)u(x,\xi,-\xi+t-\alpha)\,d\alpha \right] d\xi.$$

С учётом граничного условия (3) из этого соотношения получим

$$u(x,0,t) = -\int_0^t \psi(x,\tau)\,d\tau - \int_0^t \int_0^{\tau/2} \left[u_{xx}(x,\xi,\tau-\xi) + \int_0^{\tau-2\xi} k(x,\alpha)u(x,\xi,-\xi+\tau-\alpha)\,d\alpha \right] d\xi\,d\tau.$$

Используем этот результат и проинтегрируем уравнение (1) при условиях (2), (3) по характеристикам $dz/dt = -1$ и $dz/dt = 1$. Тогда получим уравнение (5) в области $\mathbb{B}_2$. Первая часть леммы доказана.

Из (5) вытекает равенство

$$u(x,z,t)|_{t=z+0} = 0. \qquad (8)$$

Следовательно,

$$f(x,0)=0. \tag{9}$$

Заменим переменную интегрирования τ на β по формуле $t-\tau=\beta$ во внешнем интеграле последнего слагаемого в уравнении (5). Далее, продифференцировав его по переменной t, получим

$$u_t(x,z,t)=-\psi(x,t-z)-\int\limits_0^{(t-z)/2}\Big[u_{xx}(x,\xi,t-\xi-z)+\int\limits_0^{t-z-2\xi}k(x,\alpha)u(x,\xi,-\xi+t-z-\alpha)\,d\alpha\Big]\,d\xi-$$

$$-\int\limits_0^{z}\int\limits_{z-\beta}^{(t-2\beta+z)/2}\Big[u_{xxt}(x,\xi,t-\xi-2\beta+z)+\int\limits_0^{-2\xi+t-2\beta+z}k(x,\alpha)u_t(x,\xi,-\xi+t-2\beta+z-\alpha)\,d\alpha\Big]\,d\xi\,d\beta.$$

Отсюда

$$u_t(x,z,z+0)=-\psi(x,0),$$

$$u_{tt}(x,z,t)=-\psi_t(x,t-z)-\frac{1}{2}\psi_{xx}(x,0)z-$$

$$-\int\limits_0^{(t-z)/2}\Big[u_{xxt}(x,\xi,t-\xi-z)+\int\limits_0^{t-z-2\xi}k(x,\alpha)u(x,\xi,-\xi+t-z-\alpha)\,d\alpha\Big]\,d\xi-$$

$$-\int\limits_0^{z}\int\limits_{z-\beta}^{(t-2\beta+z)/2}\Big[u_{xxtt}(x,\xi,t-\xi-2\beta+z)-\psi(x,0)k(x,t-2\xi-2\beta+z)+$$

$$+\int\limits_0^{-2\xi+t-2\beta+z}k(x,\alpha)u_t(x,\xi,-\xi+t-2\beta+z-\alpha)\,d\alpha\Big]\,d\xi\,d\beta.$$

Следовательно,

$$u_{tt}(x,z,z+0)=-\psi(x,0)-\frac{1}{2}\psi_{xx}(x,0)z.$$

Лемма доказана.

2. Исследование обратной задачи. В области $\mathbb{B}_2$ воспользуемся формулой Даламбера для представления решения уравнения (1) с данными Коши (2) на оси $z=0$:

$$u(x,z,t)=\frac{1}{2}[f(x,t+z)+f(x,t-z)]+\frac{1}{2}\int\limits_{t-z}^{t+z}\psi(x,\tau)\,d\tau-$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_0^{z}\int\limits_{t-z+\xi}^{t+z-\xi}\Big[u_{xx}(x,\xi,\tau)+\int\limits_0^{\tau-\xi}k(x,\alpha)u(x,\xi,\tau-\alpha)\,d\alpha\Big]\,d\tau\,d\xi. \tag{10}$$

В уравнении (10) переходим к пределу при $t\longrightarrow z+0$ с учётом условий (8) и (9):

$$f(x,2z)=-\int\limits_0^{2z}\psi(x,\tau)\,d\tau+\int\limits_0^{z}\int\limits_{\xi}^{2z-\xi}\Big[u_{xx}(x,\xi,\tau)+\int\limits_0^{\tau-\xi}k(x,\alpha)u(x,\xi,\tau-\alpha)\,d\alpha\Big]\,d\tau\,d\xi. \tag{11}$$

Продифференцировав по t уравнение (11), получим равенство

$$\left[f_t(x,t) = -\psi(x,t) + \int\limits_0^{t/2}\left(u_{xx}(x,\xi,t-\xi) + \int\limits_0^{t-2\xi} k(x,\alpha)u(x,\xi,t-\xi-\alpha)\,d\alpha\right)d\xi\right]_{t=2z},$$

из которого следует, что

$$f_t(x,0) = -\psi(x,0),$$

$$\left[f_{tt}(x,t) = -\psi_t(x,t) + \int\limits_0^{t/2}\left(u_{xxt}(x,\xi,t-\xi) + \int\limits_0^{t-2\xi} k(x,\alpha)u_t(x,\xi,t-\xi-\alpha)\,d\alpha\right)d\xi\right]_{t=2z}. \qquad (12)$$

Таким образом,

$$f_{tt}(x,0) = -\psi_t(x,0).$$

Продифференцировав ещё два раза по t уравнение (12) и разрешив полученное соотношение относительно $k(x,z)$, получим

$$k(x,z) = \frac{2}{\psi(x,0)}\Big(g_{xx}(x,z) - f_{tttt}(x,z) - \psi_{ttt}(x,z)\Big) + \frac{2g(x,z)}{\psi(x,0)}\int\limits_0^{z/2} k(x,z-2\xi)\,d\xi +$$

$$+ \frac{2}{\psi(x,0)}\int\limits_0^{z/2}\left[v_{xx}(x,\xi,z-\xi) + \int\limits_0^{z-2\xi} k(x,\alpha)v(x,\xi,z-\xi-\alpha)\,d\alpha\right]d\xi, \qquad (13)$$

где введено обозначение

$$v(x,t,z) := u_{ttt}(x,t,z). \qquad (14)$$

Продифференцировав уравнение (10) три раза по переменной t последовательно, получим равенства

$$u_t(x,z,t) = \frac{1}{2}[f_t(x,t+z) + f_t(x,t-z)] + \frac{1}{2}[\psi(x,t+z) - \psi(x,t-z)] -$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_0^z\left[u_{xx}(x,\xi,t+z-\xi) + \int\limits_0^{t+z-2\xi} k(x,\alpha)u(x,\xi,t+z-\xi-\alpha)\,d\alpha\right]d\xi +$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_0^z\left[u_{xx}(x,\xi,t-z+\xi) + \int\limits_0^{t-z} k(x,\alpha)u(x,\xi,t-z+\xi-\alpha)\,d\alpha\right]d\xi, \qquad (15)$$

$$u_{tt}(x,z,t) = \frac{1}{2}[f_{tt}(x,t+z) + f_{tt}(x,t-z)] + \frac{1}{2}[\psi_t(x,t+z) - \psi_t(x,t-z)] -$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_0^z\left[u_{xxt}(x,\xi,t+z-\xi) + \int\limits_0^{t+z-2\xi} k(x,\alpha)u_t(x,\xi,t+z-\xi-\alpha)\,d\alpha\right]d\xi +$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_0^z\left[u_{xxt}(x,\xi,t-z+\xi) + \int\limits_0^{t-z} k(x,\alpha)u_t(x,\xi,t-z+\xi-\alpha)\,d\alpha\right]d\xi, \qquad (16)$$

$$u_{ttt}(x,z,t) = \frac{1}{2}[f_{ttt}(x,t+z) + f_{ttt}(x,t-z)] + \frac{1}{2}[\psi_{tt}(x,t+z) - \psi_{tt}(x,t-z)] -$$

$$
-\frac{1}{2}\int_0^z\left[u_{xxtt}(x,\xi,t+z-\xi)-\psi(x,0)k(x,t+z-2\xi)+\int_0^{t+z-2\xi}k(x,\alpha)u_{tt}(x,\xi,t+z-\xi-\alpha)\,d\alpha\right]d\xi+
$$

$$
+\frac{1}{2}\int_0^z\left[u_{xxtt}(x,\xi,t-z+\xi)-\psi(x,0)k(x,t+z)+\int_0^{t-z}k(x,\alpha)u_{tt}(x,\xi,t-z+\xi-\alpha)\,d\alpha\right]d\xi. \quad (17)
$$

Уравнения (10), (13), (15)–(17) определяют в области Δ замкнутую систему интегральных уравнений относительно пяти неизвестных функций $u(x,z,t)$, $u_t(x,z,t)$, $u_{tt}(x,z,t)$, $u_{ttt}(x,z,t)$, $k(x,z)$. Если в уравнении (17) выразить функцию $u_{tt}(x,z,t)$ через $u_{ttt}(x,z,t)$ как

$$
u_{tt}(x,z,t)=\int_z^t u_{\tau\tau\tau}(x,z,\tau)\,d\tau+g(x,z) \quad (18)
$$

и подставить в уравнение (17), то количество уравнений можно свести к минимуму, т.е. вместо пяти уравнений можно рассмотреть два уравнения, а именно, (17) и (13) относительно двух неизвестных функций $u_{ttt}(x,z,t)$, $k(x,z)$. Далее по $u_{ttt}(x,z,t)$ можно найти функцию $u_{tt}(x,z,t)$ по формуле (18). Функции $u_t(x,z,t)$ и $u(x,z,t)$ находятся аналогичным образом:

$$
u_t(x,z,t)=\int_z^t u_{\tau\tau}(x,z,\tau)\,d\tau-\psi(x,0), \quad u(x,z,t)=\int_z^t u_\tau(x,z,\tau)\,d\tau.
$$

В дальнейшим будем считать, что в формуле (17) вместо функции $u_{tt}(x,z,t)$ поставлено выражение (18). Таким образом, уравнения (17) и (13) определяют в Δ замкнутую систему интегральных уравнений относительно двух неизвестных функций $u_{ttt}(x,z,t)$, $k(x,z)$.

Воспользовавшись обозначением (14), с учётом (18) запишем уравнение (17) в виде

$$
v(x,z,t)=\frac{1}{2}\left[f_{ttt}(x,t+z)+f_{ttt}(x,t-z)\right]+\frac{1}{2}\left[\psi_{tt}(x,t+z)-\psi_{tt}(x,t-z)\right]+g(x,z)(z-x)z-
$$

$$
-\frac{1}{2}\int_0^z\left[\int_\xi^{t+z-\xi}v_{xx}(x,\xi,\tau)\,d\tau-\psi(x,0)k(x,t+z-2\xi)+\int_0^{t+z-2\xi}\left(k(x,\alpha)\int_\xi^{t+z-\xi-\alpha}v(x,\xi,\tau)\,d\tau\right)d\alpha-\right.
$$

$$
\left.-\int_\xi^{t-z+\xi}v_{xx}(x,\xi,\tau)\,d\tau+\psi(x,0)k(x,t-z)-\int_0^{t-z}\left(k(x,\alpha)\int_\xi^{t-z+\xi-\alpha}v(x,\xi,\tau)\,d\tau\right)d\alpha\right]d\xi. \quad (19)
$$

Теорема 1. *Пусть* $|\psi(x,0)|\geqslant\mu_0>0$, $(f(x,+0),f_t(x,+0),f_{tt}(x,+0))\in A_{s_0}$,

$$
(f(x,t),f_t(x,t),f_{tt}(x,t),f_{ttt}(x,t),f_{tttt}(x,t))\in C_t(A_{s_0},[0,2l],),
$$

$$
(\psi(x,t),\psi_t(x,t),\psi_{tt}(x,t),\psi_{ttt}(x,t))\in C_t(A_{s_0},[0,2l],),
$$

$$
\max\{\|f\|_{s_0}(t),\|f_t\|_{s_0}(t),\|f_{tt}\|_{s_0}(t),\|f_{ttt}\|_{s_0}(t),\|f_{tttt}\|_{s_0}(t)\}\leqslant R_0, \quad t\in[0,2l],
$$

где μ_0 *и* $R_0>0$ *– заданные числа.*

Тогда найдётся такое $a\in(0,l)$, *что для любого* $s\in(0,s_0)$ *в области* $\Gamma_{sl}=B_2\bigcap\{(x,z,t):0\leqslant z\leqslant a(s_0-s)\}$ *существует единственное решение системы уравнений (19), (13), для которого* $v(x,z,t)\in C(A_{s_0},F)$, $k(x,z)\in C(A_{s_0},[0,a(s_0-s)])$, $F=\{(z,t,s):(z,t)\in G_2$, $0<z<a(s_0-s)\}$, *причём имеют место оценки*

$$
\|v-v_0\|_s(z,t)\leqslant R_0, \quad \|k-k_0\|_s(z)\leqslant\frac{R_0}{s_0-s},
$$

где

$$v_0 := \frac{1}{2}l[f_{ttt}(x,t+z)+f_{ttt}(x,t-z)]+\frac{1}{2}[\psi_{tt}(x,t+z)-\psi_{tt}(x,t-z)]+g(x,z)(z-x)z,$$

$$k_0 := \frac{2}{\psi(x,0)}(g_{xx}(x,z)-f_{tttt}(x,z)-\psi_{ttt}(x,z)).$$

Доказательство. Для дальнейших вычислений удобно ввести обозначения

$$\varphi_1(x,z,t) := v(x,z,t), \quad \varphi_2(x,z) := k(x,z),$$

$$\varphi_1^0(x,z,t) := \frac{1}{2}[f_{ttt}(x,t+z)+f_{ttt}(x,t-z)]+\frac{1}{2}[\psi_{tt}(x,t+z)-\psi_{tt}(x,t-z)]+g(x,z)(z-\xi)z,$$

$$\varphi_2^0(x,z) := \frac{2}{\psi(x,0)}\left(\frac{1}{2}g_{xx}(x,z)-f_{tttt}(x,z)-\psi_{ttt}(x,z)\right).$$

Тогда из уравнений (19) и (13) получим равенства

$$\varphi_1(x,z,t) = \varphi_1^0(x,z,t) -$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_0^z\Bigg[\int\limits_\xi^{t+z-\xi}\varphi_{1xx}(x,\xi,\tau)\,d\tau-\psi(x,0)\varphi_2(x,t+z-2\xi)+\int\limits_0^{t+z-2\xi}\Bigg(\varphi_2(x,\alpha)\int\limits_\xi^{t+z-\xi-\alpha}\varphi_1(x,\xi,\tau)\,d\tau\Bigg)\,d\alpha-$$

$$-\int\limits_\xi^{t-z+\xi}\varphi_{1xx}(x,\xi,\tau)\,d\tau+\psi(x,0)\varphi_2(x,t-z)-\int\limits_0^{t-z}\Bigg(\varphi_2(x,\alpha)\int\limits_\xi^{t-z+\xi-\alpha}\varphi_1(x,\xi,\tau)\,d\tau\Bigg)\,d\alpha\Bigg]\,d\xi,$$

$$\varphi_2(x,z) = \varphi_2^0(x,z)+\frac{2g(x,z)}{\psi(x,0)}\int\limits_0^{z/2}\varphi_2(x,z-2\xi)\,d\xi+$$

$$+\frac{2}{\psi(x,0)}\int\limits_0^{z/2}\Bigg[\varphi_{1xx}(x,\xi,z-\xi)+\int\limits_0^{z-2\xi}\varphi_2(x,\alpha)\varphi_1(x,\xi,z-\xi-\alpha)\,d\alpha\Bigg]\,d\xi.$$

Пусть числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$, определяемые рекуррентными соотношениями

$$a_{n+1} = a_n\frac{(n+1)^2}{(n+1)^2+1},$$

образуют убывающую числовую последовательность, и число a является пределом этой последовательности:

$$a = \lim_{n\to\infty}a_n = a_0\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^2}{(n+1)^2+1}.$$

Положительное число $a_0 < l/s_0$ будет выбрано позже. Построим последовательные приближения следующим образом:

$$\varphi_1^{n+1}(x,z,t) = \varphi_1^0(x,z,t) -$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_0^z\Bigg[\int\limits_\xi^{t+z-\xi}\varphi_{1xx}^n(x,\xi,\tau)\,d\tau-\psi(x,0)\varphi_2^n(x,t+z-2\xi)+\int\limits_0^{t+z-2\xi}\Bigg(\varphi_2^n(x,\alpha)\int\limits_\xi^{t+z-\xi-\alpha}\varphi_1^n(x,\xi,\tau)\,d\tau\Bigg)\,d\alpha-$$

$$
-\int\limits_{\xi}^{t-z+\xi}\varphi_{1xx}^{n}(x,\xi,\tau)\,d\tau+\psi(x,0)\varphi_{2}^{n}(x,t-z)-\int\limits_{0}^{t-z}\biggl(\varphi_{2}^{n}(x,\alpha)\int\limits_{\xi}^{t-z+\xi-\alpha}\varphi_{1}^{n}(x,\xi,\tau)\,d\tau\biggr)\,d\alpha\biggr]\,d\xi,
$$

$$
\varphi_{2}^{n+1}(x,z)=\varphi_{2}^{0}(x,z)+\frac{2g(x,z)}{\psi(x,0)}\int\limits_{0}^{z/2}\varphi_{2}^{n}(x,z-2\xi)\,d\xi+
$$

$$
+\frac{2}{\psi(x,0)}\int\limits_{0}^{z/2}\biggl[\varphi_{1xx}^{n}(x,\xi,z-\xi)+\int\limits_{0}^{z-2\xi}\varphi_{2}^{n}(x,\alpha)\varphi_{1}^{n}(x,\xi,z-\xi-\alpha)\,d\alpha\biggr]\,d\xi.
$$

Определим функцию $s_n'(z)$ по формуле

$$
s_n'(z)=\frac{s+\nu^n(z)}{2},\qquad \nu^n(z)=s_0-\frac{z}{a_n}. \tag{20}
$$

Введём обозначение $\omega_i^n:=\varphi_i^{n+1}-\varphi_i^n,\ \ i=1,2.$ При $n=0$ имеют место соотношения

$$
\omega_{1}^{0}(x,z,t)=-\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{z}\biggl[\int\limits_{\xi}^{t+z-\xi}\varphi_{1xx}^{0}(x,\xi,\tau)\,d\tau-\psi(x,0)\varphi_{2}^{0}(x,t+z-2\xi)+
$$

$$
+\int\limits_{0}^{t+z-2\xi}\biggl(\varphi_{2}^{0}(x,\alpha)\int\limits_{\xi}^{t+z-\xi-\alpha}\varphi_{1}^{0}(x,\xi,\tau)\,d\tau\biggr)\,d\alpha-
$$

$$
-\int\limits_{\xi}^{t-z+\xi}\varphi_{1xx}^{0}(x,\xi,\tau)\,d\tau+\psi(x,0)\varphi_{2}^{0}(x,t-z)-\int\limits_{0}^{t-z}\biggl(\varphi_{2}^{0}(x,\alpha)\int\limits_{\xi}^{t-z+\xi-\alpha}\varphi_{1}^{0}(x,\xi,\tau)\,d\tau\biggr)\,d\alpha\biggr]\,d\xi,
$$

$$
\omega_{2}^{0}(x,z)=\frac{2g(x,z)}{\psi(x,0)}\int\limits_{0}^{z/2}\varphi_{2}^{0}(x,z-2\xi)\,d\xi+
$$

$$
+\frac{2}{\psi(x,0)}\int\limits_{0}^{z/2}\biggl[\varphi_{1xx}^{0}(x,\xi,z-\xi)+\int\limits_{0}^{z-2\xi}\varphi_{2}^{0}(x,\alpha)\varphi_{1}^{0}(x,\xi,z-\xi-\alpha)\,d\alpha\biggr]\,d\xi.
$$

При $n=1$ имеем

$$
\omega_{1}^{1}(x,z,t)=-\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{z}\biggl[\int\limits_{\xi}^{t+z-\xi}\omega_{1xx}^{0}(x,\xi,\tau)\,d\tau-\psi(x,0)\omega_{2}^{0}(x,t+z-2\xi)+
$$

$$
+\int\limits_{0}^{t+z-2\xi}\int\limits_{\xi}^{t+z-\xi-\alpha}(\omega_{2}^{0}(x,\alpha)\varphi_{1}^{1}(x,\xi,\tau)+\varphi_{2}^{0}(x,\alpha)\omega_{1}^{0}(x,\xi,\tau))\,d\tau\,d\alpha-\int\limits_{\xi}^{t-z+\xi}\omega_{1xx}^{0}(x,\xi,\tau)\,d\tau+
$$

$$
+\psi(x,0)\omega_{2}^{0}(x,t-z)-\int\limits_{0}^{t-z}\int\limits_{\xi}^{t-z+\xi-\alpha}(\omega_{2}^{0}(x,\alpha)\varphi_{1}^{1}(x,\xi,\tau)+\varphi_{2}^{0}(x,\alpha)\omega_{1}^{0}(x,\xi,\tau))\,d\tau\,d\alpha\biggr]\,d\xi,
$$

$$\omega_2^1(x,z) = \frac{2g(x,z)}{\psi(x,0)} \int\limits_0^{z/2} \omega_2^0(x, z-2\xi)\, d\xi + \frac{2}{\psi(x,0)} \int\limits_0^{z/2} \Bigg[\omega_{1xx}^0(x,\xi,z-\xi) +$$

$$+ \int\limits_0^{z-2\xi} l(\omega_2^0(x,\alpha)\varphi_1^1(x,\xi,z-\xi-\alpha) + \varphi_2^0(x,\alpha)\omega_1^0(x,\xi,z-\xi-\alpha))\, d\alpha \Bigg] d\xi.$$

Таким образом, для любого n получим равенства

$$\omega_1^n(x,z,t) = -\frac{1}{2} \int\limits_0^z \Bigg[\int\limits_\xi^{t+z-\xi} \omega_{1xx}^{n-1}(x,\xi,\tau)\, d\tau - \psi(x,0)\omega_2^{n-1}(x, t+z-2\xi) +$$

$$+ \int\limits_0^{t+z-2\xi} \int\limits_\xi^{t+z-\xi-\alpha} (\omega_2^{n-1}(x,\alpha)\varphi_1^n(x,\xi,\tau) + \varphi_2^{n-1}(x,\alpha)\omega_1^{n-1}(x,\xi,\tau))\, d\tau\, d\alpha - \int\limits_\xi^{t-z+\xi} \omega_{1xx}^{n-1}(x,\xi,\tau)\, d\tau +$$

$$+ \psi(x,0)\omega_2^{n-1}(x,t-z) - \int\limits_0^{t-z} \int\limits_\xi^{t-z+\xi-\alpha} (\omega_2^{n-1}(x,\alpha)\varphi_1^n(x,\xi,\tau) + \varphi_2^{n-1}(x,\alpha)\omega_1^{n-1}(x,\xi,\tau))\, d\tau\, d\alpha \Bigg] d\xi,$$

$$\omega_2^n(x,z) = \frac{2g(x,z)}{\psi(x,0)} \int\limits_0^{z/2} \omega_2^{n-1}(x, z-2\xi)\, d\xi + \frac{2}{\psi(x,0)} \int\limits_0^{z/2} \Bigg[\omega_{1xx}^{n-1}(x,\xi,z-\xi) +$$

$$+ \int\limits_0^{z-2\xi} (\omega_2^{n-1}(x,\alpha)\varphi_1^n(x,\xi,z-\xi-\alpha) + \varphi_2^{n-1}(x,\alpha)\omega_1^{n-1}(x,\xi,z-\xi-\alpha))\, d\alpha \Bigg] d\xi.$$

Дальше покажем, что если выбрать $a_0 \in (0,l)$ подходящим образом, то для любого $n \in \mathbb{N}$ имеют места неравенства

$$\lambda_n = \max\Bigg\{ \sup_{(z,t,s)\in F_n} \bigg[\|\omega_1^n\|_s(z,t) \frac{\nu^n(z)-s}{z} \bigg], \sup_{(z,t,s)\in F_n} \bigg[\|\omega_2^n\|_s(z) \frac{(\nu^n(z)-s)^2}{z} \bigg] \Bigg\} < \infty, \tag{21}$$

$$\|\varphi_1^{n+1} - \varphi_0^{n+1}\|_s(z,t) \leqslant R_0, \quad \|\varphi_2^{n+1} - \varphi_0^{n+1}\|_s(z) \leqslant \frac{R_0}{(s_0-s)^2}, \tag{22}$$

где $F_n = l\{(z,t,s) : (z,t) \in G_2,\ 0 < z < a_n(s_0 - s),\ 0 < s < s_0\}$. Пусть $n = 0$, тогда с учётом (4) получим оценку

$$\|\omega_1^0\|_s(z,t) \leqslant \frac{1}{2} \Bigg| \int\limits_0^z \Bigg[\int\limits_\xi^{t+z-\xi} \|\varphi_{1xx}^0\|_s(\xi,\tau)\, d\tau + |\psi(x,0)| \|\varphi_2^0\|_s(t+z-2\xi) +$$

$$+ \int\limits_0^{t+z-2\xi} \bigg(\|\varphi_2^0\|_s(\alpha) \int\limits_\xi^{t+z-\xi-\alpha} \|\varphi_1^0\|_s(\xi,\tau)\, d\tau \bigg) d\alpha - \int\limits_\xi^{t-z+\xi} \|\varphi_{1xx}^0\|_s(\xi,\tau)\, d\tau + |\psi(x,0)| \|\varphi_2^0\|_s(t-z) -$$

$$- \int\limits_0^{t-z} \bigg(\|\varphi_2^0\|_s(\alpha) \int\limits_\xi^{t-z+\xi-\alpha} \|\varphi_1^0\|_s(\xi,\tau)\, d\tau \bigg) d\alpha \Bigg] d\xi \Bigg| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\int\limits_0^z \Bigg[\int\limits_{\xi}^{t+z-\xi} \frac{4R_0\,d\tau}{(s'(\xi)-s)^2} + 2p_0R_0 + \int\limits_0^{t+z-2\xi} R_0^2(t+z-2\xi-\alpha)\,d\alpha +$$

$$+ \int\limits_{\xi}^{t-z+\xi} \frac{4R_0\,d\tau}{(s'(\xi)-s)^2} + \int\limits_0^{t-z} R_0^2(t-z-2-\alpha)\,d\alpha\Bigg]\,d\xi,$$

где $p_0 = \|\psi(x,0)\|_s$.

Воспользовавшись формулой (20), отсюда имеем

$$\|\omega_1^0\|_s(z,t) \leqslant \int\limits_0^z (z-\xi)\left[\frac{16R_0 l}{(\nu^0(z)-s)^2} + p_0R_0 + 2lR_0^2 t\right] d\xi \leqslant$$

$$\leqslant a_0R_0\left[16l + s_0^2(p_0 + 2l^2R_0)\right]\frac{z}{\nu^0(z)-s}, \quad (z,t,s)\in F_0.$$

Аналогично оцениваем и другую компоненту:

$$\|\omega_2^0\|_s(z) \leqslant \left|\frac{2g(x,z)}{\psi(x,0)}\right| \int\limits_0^{z/2} \|\varphi_2^0\|_s(z-2\xi)\,d\xi +$$

$$+ \frac{2}{\psi(x,0)} \int\limits_0^{z/2} \left[\|\varphi_{1xx}^0\|_s(\xi, z-\xi) + \int\limits_0^{z-2\xi} \|\varphi_2^0\|_s(\alpha)\|\varphi_1^0\|_s(\xi, z-\xi-\alpha)\,d\alpha\right] d\xi \leqslant$$

$$\leqslant \frac{R_0}{\mu_0}\left[24 + s_0^2R_0(1+l)\right]\frac{z}{(\nu^0(z)-s)^2}, \quad (z,t,s)\in F_0.$$

При получении этих неравенств были использованы неравенства

$$\frac{1}{\nu^0(\xi)-s} \leqslant \frac{1}{\nu^0(z)-s}, \quad \nu^0(z)-s < s_0,$$

справедливые для $\xi\in(0,z)$, $s\in(0,s_0)$, $(z,t,s)\in F_0$. Данные оценки показывают верность неравенства (21) при $n=0$. Далее, для $(z,t,s)\in F_1$ находим

$$\|\varphi_1^1-\varphi_0^0\|_s(z,t) = \|\omega_1^0\|_s(z,t) \leqslant \frac{a_0\lambda_0 z}{\nu^0(z)-s} \leqslant a_0\lambda_0,$$

$$\|\varphi_2^1-\varphi_0^0\|_s(z) = \|\omega_2^0\|_s(z) \leqslant \frac{a_0\lambda_0 z}{(\nu^0(z)-s)^2} \leqslant \frac{4a_0\lambda_0}{(s_0-s)}.$$

Таким образом, если выбрать a_0 так, чтобы $4a_0\lambda_0 \leqslant R_0$, то неравенства (22) будут выполняться для $n=0$.

Методом математической индукции покажем, что неравенства (21), (22) имеют место и для других n, если выбрать a_0 подходящем образом. Пусть неравенства (21), (22) справедливы для $n=1,2,\ldots,j$. Тогда для $(z,t,s)\in F_{j+1}$ имеем

$$\|\omega_1^{j+1}\|_s(z,t) \leqslant \frac{1}{2}\Bigg|\int\limits_0^z \Bigg[\int\limits_{\xi}^{t+z-\xi} \|\omega_{1xx}^j\|_s(\xi,\tau)\,d\tau + |\psi(x,0)|\|\omega_2^j\|_s(t+z-2\xi) +$$

$$+\int\limits_0^{t+z-2\xi}\int\limits_\xi^{t+z-\xi-\alpha}(\|\omega_2^j\|_s(\alpha)\|\varphi_1^{j+1}\|_s(\xi,\tau)+\|\varphi_2^j\|_s(\alpha)\|\omega_1^j\|_s(\xi,\tau))\,d\tau\,d\alpha-\int\limits_\xi^{t-z+\xi}\|\omega_{1xx}^j\|_s(\xi,\tau)\,d\tau+$$

$$+|\psi(x,0)|\|\omega_2^j\|_s(t-z)-\int\limits_0^{t-z}\int\limits_\xi^{t-z+\xi-\alpha}(\|\omega_2^j\|_s(\alpha)\|\varphi_1^{j+1}\|_s(\xi,\tau)\|\varphi_2^j\|_s(\alpha)\|\omega_1^j\|_s(\xi,\tau))\,d\tau\,d\alpha\Big]\,d\xi\Big|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\Big|\int\limits_0^z\Big[\int\limits_\xi^{t+z-\xi}\frac{4a_0\lambda_j\xi}{(s'(\xi)-s)^2(\nu^j(\xi)-s)}\,d\tau+\frac{2a_0\lambda_j\xi p_0}{(\nu^j(\xi)-s)^2}+$$

$$+\int\limits_0^{t+z-2\xi}\bigg(\frac{4a_0\lambda_j\xi R_0}{\nu^j(\xi)-s}+\frac{a_0\lambda_j(1+s_0^2)}{(s_0-s)^2}\bigg)(t+z-2\xi-\alpha)\,d\alpha-\int\limits_\xi^{t-z+\xi}\frac{4a_0\lambda_j\xi}{(s'(\xi)-s)^2(\nu^j(\xi)-s)}\,d\tau+$$

$$+\int\limits_0^{t-z}\bigg(\frac{4a_0\lambda_j\xi R_0}{\nu^j(\xi)-s}+\frac{a_0\lambda_j(1+s_0^2)}{(s_0-s)^2}\bigg)(t-z-\alpha)\,d\alpha\Big]\,d\xi\Big|\leqslant$$

$$\leqslant\lambda_ja_0s_0[16l^2R_0s_0+1+s_0^2+2p_0]\frac{z}{\nu^{j+1}(z)-s}=:\lambda_ja_0\eta_1(R_0,l,s_0,p_0)\frac{z}{\nu^{j+1}(z)-s}.$$

Здесь в промежуточных выкладках функция $s'(\xi)$ взята в виде (20) при $n=j$ и использованы оценки

$$\|\varphi_1^{j+1}\|_s(z,t)\leqslant 2R_0,\quad \|\varphi_2^{j+1}\|_s(z)\leqslant R_0\frac{1+s_0^2}{(s_0-s)},$$

справедливые согласно индуктивному предположению, а также очевидные неравенства $a_j\leqslant a_0$ и $\nu^{j+1}(z)<\nu^j(z)$.

Рассуждая аналогично для ω_2^{j+1}, получаем, что

$$\|\omega_2^{j+1}\|_s(z)\leqslant\bigg|\frac{2g(x,z)}{\psi(x,0)}\int\limits_0^{z/2}\omega_2^j(x,z-2\xi)\,d\xi+\frac{2}{\psi(x,0)}\int\limits_0^{z/2}\Big[\omega_{1xx}^j(x,\xi,z-\xi)+$$

$$+\int\limits_0^{z-2\xi}(\omega_2^j(x,\alpha)\varphi_1^{j+1}(x,\xi,z-\xi-\alpha)+\varphi_2^j(x,\alpha)\omega_1^j(x,\xi,z-\xi-\alpha))\,d\alpha\Big]\bigg|\leqslant$$

$$\leqslant\lambda_ja_0\frac{2R_0}{\mu_0}[4l+(4+l+1+s_0^2)s_0]\frac{z}{(\nu^{j+1}(z)-s)^2}=:\lambda_ja_0\eta_2(R_0,\mu_0,l,s_0)\frac{z}{(\nu^{j+1}(z)-s)^2},\quad (z,t,s)\in F_0.$$

Из полученных оценок следуют неравенства

$$\lambda_{j+1}\leqslant\lambda_j\rho,\quad \lambda_{j+1}<\infty,\quad \rho:=a_0\max\{\eta_1,\eta_2\}.$$

Вместе с тем для $(x,t,s)\in F_{j+2}$ имеем

$$\|\varphi_i^{j+2}-\varphi_i^0\|_s(z,t)\leqslant\sum_{n=0}^{j+1}\|\varphi_i^{n+1}-\varphi_i^n\|_s(z,t)=\sum_{n=0}^{j+1}\|\omega_i^n\|_s(z,t)\leqslant\sum_{n=0}^{j+1}\frac{\lambda_nz}{(\nu^n(z)-s)^i}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{(s_0-s)^{i-1}}\sum_{n=0}^{j+1}\frac{\lambda_na_n^ia_{j+2}}{(a_n-a_{j+2})^i}\leqslant\frac{\lambda_0a_0}{(s_0-s)^{i-1}}\sum_{n=0}^{j+1}\rho^n(n+1)^{2i},\quad i=1,2.$$

Выберем $a_0 \in (0, l)$ таким образом, чтобы выполнялись неравенства

$$\rho < 1, \quad \lambda_0 a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n (n+1)^4 \leqslant R_0.$$

Тогда

$$\|\varphi_i^{j+2} - \varphi_i^0\|_s(z,t) \leqslant \frac{R_0}{(s_0-s)^{i-1}}, \quad (x,t,s) \in F_{j+2}, \quad i = 1,2.$$

Так как выбор не зависит от номера приближений, то последовательные приближения φ_i^n, $i = 1,2$, принадлежат пространству $C(A_s, F)$, $F = \bigcap_{n=0}^{\infty} F_n$, и для них имеют место неравенства

$$\|\varphi_i^n - \varphi_i^0\|_s(z,t) \leqslant \frac{R_0}{(s_0-s)^{i-1}}, \quad (x,t,s) \in F, \quad i = 1,2.$$

При $s \in (0, s_0)$ ряды $\sum_{n=1}^{\infty}(\varphi_i^n - \varphi_i^{n-1})$ сходятся равномерно в норме пространства $C(A_s, F)$, поэтому $\varphi_i^n \to \varphi_i$. Предельные функции являются элементами $C(A_s, F)$ и удовлетворяют уравнениям (19) и (13).

Докажем теперь единственность найденного решения. Пусть $\varphi_i^{(1)}$ и $\varphi_i^{(2)}$ – любые два решения, удовлетворяющие неравенствам

$$\|\varphi_i^{(j)} - \varphi_i^0\|_s(z,t) \leqslant R_0, \quad i,j = 1,2, \quad (x,t,s) \in F.$$

Обозначим их разность через $\widetilde{\varphi}_i := \varphi_i^{(1)} - \varphi_i^{(2)}$, $i = 1,2$, и пусть

$$\mu := \max\left\{ \sup_{(z,t,s)\in F} \left[\|\widetilde{\varphi}_1\|_s(z,t) \frac{\nu(z)-s}{z} \right], \sup_{(z,t,s)\in F} \left[\|\widetilde{\varphi}_2\|_s(z) \frac{(\nu(z)-s)^2}{z} \right] \right\} < \infty,$$

где

$$\nu(z) = s_0 - \frac{z}{a}, \quad a = a_0 \prod_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{(n+1)^2+1}.$$

Тогда из уравнений (19) и (13) для функций $\widetilde{\varphi}_i$ можно получить следующие соотношения:

$$\widetilde{\varphi}_1(x,z,t) = -\frac{1}{2}\int_0^z \Bigg[\int_{\xi}^{t+z-\xi} \widetilde{\varphi}_{1xx}(x,\xi,\tau)\,d\tau - \psi(x,0)\widetilde{\varphi}_2(x,t+z-2\xi)p(x,\xi) +$$

$$+ \int_0^{t+z-2\xi} \int_{\xi}^{t+z-\xi-\alpha} (\varphi_2^1(x,\alpha)\widetilde{\varphi}_1(x,\xi,\tau) + \widetilde{\varphi}_2(x,\alpha)\varphi_1^2(x,\xi,\tau))\,d\tau\,d\alpha - \int_{\xi}^{t-z+\xi} \widetilde{\varphi}_{1xx}(x,\xi,\tau)\,d\tau -$$

$$- \psi(x,0)\widetilde{\varphi}_2(x,t-z) - \int_0^{t-z} \int_{\xi}^{t-z+\xi-\alpha} (\varphi_2^1(x,\alpha)\widetilde{\varphi}_1(x,\xi,\tau) + \widetilde{\varphi}_2(x,\alpha)\varphi_1^2(x,\xi,\tau))\,d\tau\,d\alpha \Bigg]\,d\xi,$$

$$\widetilde{\varphi}_2(x,z) = \frac{2g(x,z)}{\psi(x,0)} \int_0^{z/2} \varphi_2(x,z-2\xi)\,d\xi +$$

$$+ \frac{2}{\psi(x,0)} \int_0^{z/2} \Bigg[\varphi_{1xx}(x,\xi,z-\xi) + \int_0^{z-2\xi} (\varphi_2^1(x,\alpha)\widetilde{\varphi}_1(x,\xi,z-\xi-\alpha)\widetilde{\varphi}_2(x,\alpha)\varphi_1^2(x,\xi,z-\xi-\alpha))\,d\alpha \Bigg]\,d\xi.$$

Применив к ним оценки, приведённые выше, находим неравенство $\lambda < \lambda\rho'$, где $\rho' < \rho < 1$. Следовательно, $\lambda = 0$. Поэтому $\varphi_i^{(1)} = \varphi_i^{(2)}$, $i = 1, 2$. Теорема доказана.

3. Оценка устойчивости. Введём в рассмотрение множество $\mathfrak{F}$ пары функций (ψ, f), являющихся элементами $C_t([0, 2l], A_{s_0})$, $s_0 > 0$, для которых выполнены условия теоремы 1 при фиксированных R_0, l, s_0. Имеет место следующая теорема условной устойчивости.

Теорема 2. *Пусть* $(\psi^1, f^1) \in \mathfrak{F}$ *и* $(\psi^2, f^2) \in \mathfrak{F}$. *Тогда для соответствующих решений* (v^1, k^1) *и* (v^2, k^2) *уравнений (19) и (13) имеют место оценки*

$$\|v^1 - v^2\|_s(z,t) \leqslant C\sigma, \quad \|k^1 - k^2\|_s(z) \leqslant \frac{C\sigma}{s_0 - s}, \quad 0 < s < s_0, \tag{23}$$

где C *– некоторая постоянная, зависящая от* R_0, l, s_0,

$$\sigma = \max\Big\{\max\|f^1 - f^2\|_{s_0}(t),\ \max\|\psi^1 - \psi^2\|_{s_0}(t),\ \max\|f^1_t - f^2_t\|_{s_0}(t),\ \max\|\psi^1_t - \psi^2_t\|_{s_0}(t),$$

$$\max\|f^1_{tt} - f^2_{tt}\|_{s_0}(t),\ \max\|\psi^1_{tt} - \psi^2_{tt}\|_{s_0}(t),\ \max\|f^1_{ttt} - f^2_{ttt}\|_{s_0}(t),\ \max\|\psi^1_{ttt} - \psi^2_{ttt}\|_{s_0}(t),$$

$$\max\|f^1_{tttt} - f^2_{tttt}\|_{s_0}(t)\Big\}, \quad t \in [0, 2l].$$

Доказательство. Введём обозначения $\widetilde{v} := v^1 - v^2$, $\widetilde{k} := k^1 - k^2$, $\widetilde{f} := f^1 - f^2$, $\widetilde{\psi} := \psi^1 - \psi^2$, $\widetilde{g} := g^1 - g^2$, как в книге [14, с. 18]. Тогда из соотношений (19) и (13) получим

$$\widetilde{v}(x,z,t) = \frac{1}{2}[\widetilde{f}_{ttt}(x,t+z) + \widetilde{f}_{ttt}(x,t-z)] + \frac{1}{2}[\widetilde{\psi}_{tt}(x,t+z) - \widetilde{\psi}_{tt}(x,t-z)] + \widetilde{g}(x,z)(z-\xi)z -$$

$$- \frac{1}{2}\int\limits_0^z\Bigg[\int\limits_\xi^{t+z-\xi}\widetilde{v}_{xx}(x,\xi,\tau)\,d\tau - \psi(x,0)\widetilde{k}(x,t+z-2\xi) + \int\limits_0^{t+z-2\xi}\Bigg(k^1(x,\alpha)\int\limits_\xi^{t+z-\xi-\alpha}\widetilde{v}(x,\xi,\tau)\,d\tau +$$

$$+ \widetilde{k}(x,\alpha)\int\limits_\xi^{t+z-\xi-\alpha}v^2(x,\xi,\tau)\,d\tau\Bigg)d\alpha - \int\limits_\xi^{t-z+\xi}\widetilde{v}_{xx}(x,\xi,\tau)\,d\tau + \psi(x,0)\widetilde{k}(x,t-z) -$$

$$- \int\limits_0^{t-z}\Bigg(k^1(x,\alpha)\int\limits_\xi^{t-z+\xi-\alpha}\widetilde{v}(x,\xi,\tau)\,d\tau + \widetilde{k}(x,\alpha)\int\limits_\xi^{t-z+\xi-\alpha}v^2(x,\xi,\tau)\,d\tau\Bigg)d\alpha\Bigg]d\xi, \tag{24}$$

$$\widetilde{k}(z,t) = \frac{2}{\psi(x,0)}(\widetilde{g}_{xx}(x,z) - \widetilde{f}_{tttt}(x,z) - \widetilde{\psi}_{ttt}(x,z)) + \frac{2g(x,z)}{\psi(x,0)}\int\limits_0^{z/2}\widetilde{k}(x,z-2\xi)\,d\xi +$$

$$+ \frac{2}{\psi(x,0)}\int\limits_0^{z/2}\Bigg[\widetilde{v}_{xx}(x,\xi,z-\xi) + \int\limits_0^{z-2\xi}(k^1(x,\alpha)\widetilde{v}(x,\xi,z-\xi-\alpha) + \widetilde{k}(x,\alpha)v^2(x,\xi,z-\xi-\alpha))\,d\alpha\Bigg]d\xi, \tag{25}$$

Очевидно, что

$$\|\widetilde{v}_0\|_{s_0}(x,z) \leqslant 2\sigma, \quad \|\widetilde{k}_0\|_{s_0} \leqslant 2\sigma. \tag{26}$$

Из теоремы 1 следуют оценки

$$\|\widetilde{v}\|_s(z,t) \leqslant 2R_0, \quad \|\widetilde{k}\|_s(z) \leqslant R_0\frac{1+s_0^2}{s_0 - s}.$$

Применив к линейной системе уравнений (24), (25) метод последовательных приближений (как при доказательстве теоремы 1), находим при том же выборе постоянной a_0 для решения этой системы справедливые неравенства

$$\|\widetilde{v}-\widetilde{v}_0\|_s \leqslant C_1\sigma, \quad \|\widetilde{k}-\widetilde{k}_0\|_s \leqslant \frac{C_1\sigma}{s_0-s}, \quad (z,t)\in P_{sT}, \quad 0<s<s_0.$$

В этих неравенствах C_1 зависит от R_0, l, s_0. Следовательно, с учётом (26) получим неравенства (23). Теорема доказана.

Заключение. Полученная теорема о локальной однозначной разрешимости двумерной обратной задачи для интегро-дифференциального уравнения дополняет совокупность результатов по исследованию многомерных обратных задач.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Дурдиев Д.К., Тотиева Ж.Д.* Задача об определении одномерного ядра уравнения вязкоупругости // Сиб. журн. индустр. математики. 2013. Т. 16. № 2. С. 72–82.
2. *Дурдиев Д.К., Сафаров Ж.Ш.* Обратная задача об определении одномерного ядра уравнения вязкоупругости в ограниченной области // Мат. заметки. 2015. Т. 97. № 6. С. 855–867.
3. *Сафаров Ж.Ш., Дурдиев Д.К.* Обратная задача для интегро-дифференциального уравнения акустики // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54. № 1. С. 136–144.
4. *Safarov J.Sh.* Global solvability of the one-dimensional inverse problem for the integro-differential equation of acoustics // J. of Siberian Federal Univ. Math. & Phys. 2018. V. 11. № 6. P. 753–763.
5. *Овсянников Л.В.* Нелинейная задача Коши в шкалах банаховых пространств // Докл. АН СССР. 1971. Т. 200. № 4. С. 789–792.
6. *Nirenberg L.* Topics in Nonlinear Functional Analysis. New York, 1974.
7. *Романов В.Г.* О локальной разрешимости некоторых многомерных обратных задач для уравнений гиперболического типа // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25. № 2. С. 275–283.
8. *Романов В.Г.* Вопросы корректности задачи определения скорости звука // Сиб. мат. журн. 1989. Т. 30. № 4. С. 125–134.
9. *Романов В.Г.* О разрешимости обратных задач для гиперболических уравнений в классе функций, аналитических по части переменных // Докл. АН СССР. 1989. Т. 304. № 4. С. 807–811.
10. *Дурдиев Д.К.* Многомерная обратная задача для уравнения с памятью // Сиб. мат. журн. 1994. Т. 35. № 3. С. 574–582.
11. *Дурдиев Д.К., Сафаров Ж.Ш.* Локальная разрешимость задачи определения пространственной части многомерного ядра в интегро-дифференциальном уравнении гиперболического типа // Вестн. Самарского гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2012. Вып. 4 (29). С. 37–47.
12. *Дурдиев Д.К., Тотиева Ж.Д.* Задача об определении многомерного ядра уравнения вязкоупругости // Владикавказ. мат. журн. 2015. Т. 17. № 4. С. 18–43.
13. *Дурдиев Д.К., Тотиева Ж.Д.* О глобальной разрешимости одной многомерной обратной задачи для уравнения с памятью // Сиб. мат. журн. 2021. Т. 62. № 2. С. 269–285.
14. *Романов В.Г.* Устойчивость в обратных задачах. М., 2005.

Институт математики имени В.И. Романовского
АН Республики Узбекистан, г. Ташкент,
Бухарский государственный университет,
Узбекистан,
Diplomat University, г. Ташкент, Узбекистан

Поступила в редакцию 27.11.2021 г.
После доработки 06.12.2022 г.
Принята к публикации 22.12.2022 г.