УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.2

КОРРЕКТНОСТЬ ОБОБЩЁННОЙ ЗАДАЧИ САМАРСКОГО–ИОНКИНА ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ

© 2023 г. А. И. Кожанов, А. В. Дюжева

Исследуется корректность в пространствах Соболева некоторых аналогов нелокальной задачи Самарского–Ионкина для эллиптических уравнений второго порядка. Для изучаемых задач доказываются теоремы существования и единственности регулярных решений – решений, имеющих все обобщённые по Соболеву производные, входящие в соответствующее уравнение. Изучаются некоторые спектральные задачи для эллиптических уравнений с нелокальным условием Самарского–Ионкина.

DOI: 10.31857/S0374064123020085, EDN: PUUISH

Введение. Нелокальными задачами для дифференциальных уравнений называют задачи с условиями, связывающими значения решения и (или) его производных в граничных точках со значениями решения и (или) его производных в точках иных граничных или внутренних многообразий. Важной вехой в развитии теории нелокальных задач, особенно применительно к эллиптическим уравнениям (которым и посвящена настоящая статья), явилась статья А.В. Бицадзе и А.А. Самарского [1], опубликованная в 1969 г. В ней был предложен новый подход к постановке нелокальных краевых задач, с тех пор он активно используется многими авторами. С различными аспектами, связанными с теорией нелокальных краевых задач, прежде всего для эллиптических уравнений, можно ознакомиться в работах [2–17]; в частности, в монографиях [11, 13, 15] можно найти обширную библиографию и примеры задач математического моделирования, приводящих к нелокальным краевым задачам для эллиптических уравнений.

Особую роль для развития теории нелокальных краевых задач для дифференциальных уравнений сыграли работы [18–21] (формально эти работы были связаны с параболическими уравнениями, но предложенные в них постановки задач и использованные методы оказались актуальными и для других классов уравнений). В [18, 19] изучалась нелокальная задача для одномерного уравнения параболического типа второго порядка, возникающая при моделировании некоторых неклассических процессов теплопроводности. Для этой задачи был предложен метод, основанный на разложении решения по специальной биортогональной системе функций, и с его помощью были установлены существование и устойчивость решения. В дальнейшем метод работ [18, 19] успешно применялся в исследованиях близких нелокальных задач для гиперболических уравнений второго порядка, параболических уравнений четвёртого порядка, некоторых других уравнений.

В 1980 г. была опубликована статья А.А. Самарского [20], в которой для параболических уравнений с одной пространственной переменной была также предложена постановка нелокальной по пространственной переменной задачи, включающая постановки как классических начально-краевых задач, так и задачу Н.И. Ионкина (из работ [18, 19]). Исследованию разрешимости нелокальных задач с условием А.А. Самарского посвящены работы Н. Лажетича, А.И. Кожанова, Л.С. Пулькиной и многих других авторов.

Наконец, отметим статью [21], в которой изучена разрешимость задачи Н.И. Ионкина для одномерных параболических уравнений с переменными коэффициентами. Метод исследования отличался от метода работ [18, 19], но в ней разрешимость была установлена в весовых пространствах.

Именно задача Н.И. Ионкина, или, в терминологии последнего времени, задача Самарского–Ионкина, но для эллиптических уравнений с выделенной переменной, и будет предметом исследования в настоящей статье; используемый при этом метод будет отличаться как от метода работ [18, 19], такь и от метода работы [21].

Все построения и рассуждения будем вести с использованием пространств Лебега L_p и Соболева W^l_p. Необходимые определения и описания свойств функций из этих пространств можно найти в монографиях [22–24].

Уточним, что цель работы – исследовать корректности тех или иных задач в классах регулярных решений – решений, имеющих все обобщённые по С.Л. Соболеву производные, входящие в соответствующее уравнение.

В работе изучим нелокальные задачи Самарского–Ионкина для некоторых модельных уравнений. Обобщения полученных результатов на более общие уравнения и на некоторые другие задачи приведём в конце статьи.

1. Постановка задач. Пусть x – точка интервала $(0,1)$, $y=(y_1,\ldots,y_n)$ – точка ограниченной области Ω пространства $\mathbb{R}^n$ с гладкой (для упрощения бесконечно-дифференцируемой) границей, Q – цилиндр $(0,1)\times\Omega$, $S=(0,1)\times\partial\Gamma$ – боковая граница Q. Далее, пусть $c(x,y)$, $f(x,y)$ и $\gamma(y)$ – заданные функции, определённые при $x\in[0,1]$, $y\in\overline{\Omega}$, $\mathcal{L}$ – дифференциальный оператор, действие которого на заданной функции $u(x,y)$ определяется равенством
$$\mathcal{L}u=u_{xx}+\Delta_y u+c(x,y)u$$
(Δ_y – оператор Лапласа по переменным $y_1,\ \ldots,\ y_n$).

Нелокальная задача I. Найти функцию $u(x,y)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения
$$\mathcal{L}u=f(x,y), \tag{1}$$
удовлетворяющую условиям
$$u|_S=0, \tag{2}$$
$$u(0,y)=\gamma(y)u(1,y),\quad u_x(1,y)=0,\quad y\in\Omega. \tag{3}$$

Нелокальная задача II. Найти функцию $u(x,y)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения (1), удовлетворяющую условию (2) и условиям
$$u_x(0,y)=\gamma(y)u_x(1,y),\quad u(1,y)=0,\quad y\in\Omega. \tag{4}$$

Условие (4) в случае $\gamma(y)\equiv 1$ представляет собой нелокальное условие Ионкина из работы [18], и в этом случае нелокальная задача II фактически и будет задачей Самарского–Ионкина для эллиптических уравнений.

Нелокальная задача I, безусловно, имеет самостоятельное значение. Вместе с тем, как будет показано ниже, она тесно связана с нелокальной задачей II.

Наряду с нелокальными задачами I и II, в работе будут изучены и спектральные задачи, связанные с ними, а именно, задачи I и II в случае $c(x,y)\equiv\mathrm{const}$, $\gamma(y)\equiv\mathrm{const}$.

2. Разрешимость нелокальной задачи I. Приведём результаты о существовании и единственности решений нелокальной задачи I в пространстве $W^2_2(Q)$.

Пусть $\phi(y)$ – произвольная функция из пространства $\mathring{W}^1_2(\Omega)$. Имеет место неравенство
$$\int\limits_\Omega \phi^2(y)\,dy\leqslant d_0\sum_{i=1}^n\int\limits_\Omega \phi^2_{y_i}(y)\,dy, \tag{5}$$
в котором постоянная d_0 определяется лишь областью Ω (см. [22–24]).

Далее, пусть $\psi(x)$ – функция из пространства $W^1_2([0,1])$. Имеет место неравенство
$$\psi^2(1)\leqslant\delta^2\int\limits_0^1 x\psi'^2(x)\,dx+\left(2+\frac{1}{\delta^2}\right)\int\limits_0^1 x\psi^2(x)\,dx, \tag{6}$$

где δ – произвольное положительное число. Для доказательства этого неравенства достаточно в тождестве

$$\psi^2(1) = 2\int_0^1 x\psi^2(x)\,dx + 2\int_0^1 x^2\psi(x)\psi'(x)\,dx$$

применить ко второму слагаемому правой части неравенство Юнга.

Неравенства (5) и (6) понадобятся в дальнейших выкладках.

Теорема 1. *Пусть выполняются условия*

$$c(x,y) \in C^1(\overline{Q}), \quad c(x,y) - \frac{1}{d_0} < 0 \quad \text{при} \quad (x,y) \in \overline{Q}, \tag{7}$$

$$\gamma(y) \in C^2(\overline{\Omega}), \quad |\gamma(y)| \leqslant 1 \quad \text{при} \quad y \in \overline{Q}. \tag{8}$$

Тогда для любой функции $f(x,y)$ такой, что $f(x,y) \in L_2(Q)$, $f_x(x,y) \in L_2(Q)$, нелокальная задача I разрешима в пространстве $W_2^2(Q)$ и притом единственным образом.

Доказательство. Пусть выполняется условие

$$|\gamma(y)| \leqslant \gamma_0 < 1 \quad \text{при} \quad y \in \overline{Q}. \tag{9}$$

Для положительного числа ε и для числа λ из отрезка $[0,1]$ рассмотрим краевую задачу: найти функцию $u(x,y)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения

$$\mathcal{L}u - \varepsilon\Delta_y u_{xx} = f(x,y), \tag{10}$$

удовлетворяющую условию (2) и условиям

$$u(0,y) = \lambda\gamma(y)u(1,y), \quad u_x(1,y) = 0, \quad y \in \Omega. \tag{11}$$

Определим банахово пространство V:

$$V = \{v(x,y) : v(x,y) \in W_2^2(Q), \quad v_{xx}(x,y) \in L_2(0,1;W_2^2(\Omega)),$$

$$\|v\|_V = (\|v\|^2_{W_2^2(Q)} + \|v_{xx}\|^2_{L_2(0,1;W_2^2(\Omega))})^{1/2}\}.$$

Покажем, что при фиксированном ε, при всех λ из отрезка $[0,1]$ и при принадлежности функции $f(x,y)$ пространству $L_2(Q)$ краевая задача (10), (2), (11) будет иметь решение $u(x,y)$, принадлежащее пространству V.

Введём функцию $w(x,y) = u(x,y) - \lambda\gamma(y)u(1,y)$. Вследствие условия (9) функцию $u(x,y)$ нетрудно выразить через $w(x,y)$:

$$u(x,y) = w(x,y) + \gamma_1(\lambda,y)w(1,y), \quad \gamma_1(\lambda,y) = \frac{\lambda\gamma(y)}{1-\lambda\gamma(y)}.$$

Далее, краевая задача (10), (2), (11) преобразуется в задачу: найти функцию $w(x,y)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения

$$\mathcal{L}w - \varepsilon\Delta_y w_{xx} + \gamma_1(\lambda,y)\Delta_y w(1,y) + 2\sum_{i=1}^n \gamma_{1y_i}(\lambda,y)w_{y_i}(1,y) + \Delta_y\gamma_1(\lambda,y)w(1,y) = f(x,y), \tag{12}$$

удовлетворяющую условию (2) и условиям

$$w(0,y) = 0, \quad w_x(1,y) = 0, \quad y \in \Omega. \tag{13}$$

Согласно теореме о методе продолжения по параметру [25, гл. III, § 14], краевая задача (12), (2), (13) будет разрешима в пространстве V при фиксированном ε и при принадлежности функции $f(x,y)$ пространству $L_2(Q)$ для всех чисел λ из отрезка $[0,1]$, если: 1) задача (12), (2), (13) разрешима в пространстве V для $\lambda=0$; 2) для всевозможных решений $w(x,y)$ краевой задачи (12), (2), (13) выполняется априорная оценка

$$\|w\|_V \leqslant R_0\|f\|_{L_2(Q)} \tag{14}$$

с постоянной R_0, определяющейся функциями $c(x,y)$ и $\gamma(y)$, а также областью Ω и, быть может, числом ε.

Разрешимость краевой задачи (12), (2), (13) в пространстве V при $\lambda=0$ очевидна. Далее, наличие требуемой оценки (14) установим с помощью техники, которая в дальнейшем будет неоднократно использоваться: искомая оценка будет получена вначале на всевозможных решениях краевой задачи (10), (2), (11), а затем перенесена на решение задачи (12), (2), (13) с помощью представленной выше связи между функциями $u(x,y)$ и $w(x,y)$.

Всюду далее считаем, что ε – число из интервала $(0,\varepsilon_0)$; величину числа ε_0 уточним ниже.

Умножим уравнение (10) на функцию $-xu(x,y)$ и проинтегрируем по цилиндру Q. После несложных преобразований получим равенство

$$\int\limits_Q \left[xu_x^2+\sum_{i=1}^n xu_{y_i}^2 - xcu^2+\varepsilon\sum_{i=1}^n xu_{xy_i}^2\right]dx\,dy+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_\Omega [1-\lambda^2\gamma^2(y)]u^2(1,y)\,dy+\frac{\varepsilon}{2}\int\limits_\Omega [1-\lambda^2\gamma^2(y)]\left(\sum_{i=1}^n u_{y_i}^2(1,y)\right)dy=$$

$$=-\int\limits_Q xfu\,dx\,dy+\varepsilon\lambda^2\sum_{i=1}^n\int\limits_\Omega \gamma(y)\gamma_{y_i}(y)u_{y_i}(1,y)u(1,y)\,dy+\frac{\varepsilon\lambda^2}{2}\sum_{i=1}^n\int\limits_\Omega \gamma_{y_i}^2 u(1,y)\,dy.$$

Используя условия (7) и (9), а также применяя неравенство Юнга и учитывая неравенство (5), нетрудно от данного неравенства перейти к следующему:

$$\int\limits_Q \left[xu_x^2+c_1xu^2+\varepsilon\sum_{i=1}^n xu_{xy_i}^2\right]dx\,dy+\frac{1-\gamma_0^2}{4}\int\limits_\Omega u^2(1,y)\,dy+\frac{\varepsilon(1-\gamma_0^2)}{4}\sum_{i=1}^n\int\limits_\Omega u_{y_i}^2(1,y)\,dy\leqslant$$

$$\leqslant c_2\int\limits_Q f^2\,dx\,dy+\varepsilon c_3\int\limits_\Omega u^2(1,y)\,dy, \tag{15}$$

здесь числа c_1 и c_2 положительны и определяются функцией $c(x,y)$ и областью Ω, а число c_3 определяется лишь функцией $\gamma(y)$. Если теперь число ε_0 принадлежит интервалу $(0,(1-\gamma_0^2)/(4c_3))$, то при $\varepsilon<\varepsilon_0$ из неравенства (15) вытекает априорная оценка

$$\int\limits_Q \left[xu_x^2+xu^2+\sum_{i=1}^n xu_{y_i}^2+\varepsilon\sum_{i=1}^n xu_{xy_i}^2\right]dx\,dy+\int\limits_\Omega u^2(1,y)\,dy+$$

$$+\varepsilon\sum_{i=1}^n\int\limits_\Omega u_{y_i}^2(1,y)\,dy\leqslant M_1\int\limits_Q f^2\,dx\,dy \tag{16}$$

с постоянной M_1, определяющейся функциями $c(x,y)$ и $\gamma(y)$, а также областью Ω.

На следующем шаге умножим уравнение (10) на функцию $x\Delta_y u(x,y)$ и проинтегрируем по цилиндру Q. Повторяя по сути выкладки, с помощью которых была получена оценка (16), но дополнительно учитывая саму оценку (16), получаем, что для решений $u(x,y)$ краевой задачи (10), (2), (11) выполняется априорная оценка

$$\int\limits_Q [xu_{xy_i}^2 + x(\Delta_y u)^2 + \varepsilon x(\Delta_y u_x)^2]\,dx\,dy + \sum_{i=1}^n \int\limits_\Omega u_{y_i}^2(1,y)\,dy +$$

$$+\varepsilon\int\limits_\Omega (\Delta_y u(1,y))^2\,dy \leqslant M_2 \int\limits_Q f^2\,dx\,dy \tag{17}$$

с постоянной M_2, определяющейся функциями $c(x,y)$ и $\gamma(y)$, а также областью Ω.

Умножим теперь уравнение (10) на функцию $-x\Delta_y u_{xx}(x,y)$ и проинтегрируем по цилиндру Q. Действуя аналогично предыдущему, дополнительно используя оценки (16) и (17), получаем, что для решений $u(x,y)$ краевой задачи (10), (2), (11) имеет место третья априорная оценка

$$\int\limits_Q [xu_{xxy_i}^2 + x(\Delta_y u_x)^2 + \varepsilon x(\Delta_y u_{xx})^2]\,dx\,dy + \int\limits_\Omega (\Delta_y u(1,y))^2\,dy \leqslant M_3 \int\limits_Q f^2\,dx\,dy \tag{18}$$

с постоянной M_3, определяющейся функциями $c(x,y)$ и $\gamma(y)$, а также областью Ω.

Умножим уравнение (10) на функцию $u_{xx}(x,y)$ и проинтегрируем по цилиндру Q. Используя формулу интегрирования по частям, оценку (18), оценку в $L_2(\Omega)$ для функции $\Delta_y u(0,y)$ (являющуюся следствием первого условия (11)), неравенство (5), условие (7), неравенство

$$\int\limits_\Omega u_x^2(0,y)\,dy \leqslant \int\limits_Q u_{xx}^2\,dx\,dy,$$

а также применяя неравенство Юнга, получаем, что для решений $u(x,y)$ краевой задачи (10), (2), (11) справедлива оценка

$$\int\limits_Q \left[u_{xx}^2 + \sum_{i=1}^n (u_{xy_i}^2 + u^2)\right] dx\,dy + \varepsilon \sum_{i=1}^n \int\limits_Q u_{xxy_i}^2\,dy \leqslant M_4 \int\limits_Q f^2\,dx\,dy \tag{19}$$

с постоянной M_4, определяющейся функциями $c(x,y)$ и $\gamma(y)$, а также областью Ω и числом ε.

На следующем шаге умножим уравнение (10) на функцию $-\varepsilon\Delta_y u_{xx}(x,y)$. Интегрируя по цилиндру Q и повторяя предыдущие рассуждения, получаем, что для решений $u(x,y)$ краевой задачи (10), (2), (11) имеет место оценка

$$\int\limits_Q \left[\sum_{i=1}^n u_{xxy_i}^2 + (\Delta_y u_x)^2 + \varepsilon(\Delta_y u_{xx})^2\right] dx\,dy \leqslant M_5 \int\limits_Q f^2\,dx\,dy \tag{20}$$

с постоянной M_5, вновь определяющейся функциями $c(x,y)$ и $\gamma(y)$, а также областью Ω и числом ε.

Из оценок (19) и (20) очевидным образом вытекает суммарная оценка

$$\|u\|_V \leqslant M_0 \|f\|_{L_2(Q)}^2 \tag{21}$$

с постоянной M_0, определяющейся вновь функциями $c(x,y)$ и $\gamma(y)$, областью Ω, а также числом ε.

Учитывая, что функция $w(x,y)$ представляется через функцию $u(x,y)$ соотношением $w(x,y) = u(x,y) - \lambda\gamma(y)u(1,y)$, получаем, что для функции $w(x,y)$ имеет место искомая оценка (14). Как уже упоминалось выше, из этой оценки следует, что краевая задача (12), (2), (13) разрешима в пространстве V при всех λ из отрезка $[0,1]$. Но тогда и краевая задача (10), (2), (11) будет разрешима в пространстве V при всех λ из отрезка $[0,1]$, в том числе и при $\lambda=1$.

Для осуществления процедуры предельного переход по ε в уравнении (10) необходимо установить наличие априорных оценок, равномерных по ε.

Прежде всего заметим, что равномерными по ε будут априорные оценки (16) и (17). Далее в равенстве, полученном после умножения уравнения (10) на функцию $-x\Delta_y u_{xx}(x,y)$ и интегрирования по Q, преобразуем правую часть:

$$-\int\limits_Q xf\Delta_y u_{xx}\,dx\,dy=\int\limits_Q (xf)_x\Delta_y u_x\,dx\,dy.$$

Применив неравенство Юнга, получим, что для решения $u(x,y)$ краевой задачи (10), (2), (11) (при $\lambda=1$) выполняется оценка

$$\int\limits_Q\left[\sum_{i=1}^n xu_{xxy_i}+x(\Delta_y u_x)^2+\varepsilon x(\Delta_y u_{xx})^2\right]dx\,dy+\int\limits_\Omega[\Delta_y u(1,y)]^2\,dy\leqslant M_6\int\limits_Q(f^2+f_x^2)\,dx\,dy \quad (22)$$

с постоянной M_6, определяющейся лишь функциями $c(x,y)$ и $\gamma(y)$, а также областью Ω.

Повторяя далее действия, которые привели к оценкам (19) и (20), но при этом учитывая оценку (22), получаем, что для функции $u(x,t)$ выполняется оценка

$$\int\limits_Q\left[u_{xx}^2+\sum_{i=1}^n u_{xy_i}^2+\varepsilon^2(\Delta_y u_{xx})^2\right]dx\,dy\leqslant M_7\int\limits_Q(f^2+f_x^2)\,dx\,dy, \quad (23)$$

постоянная M_7 в которой определяется лишь функциями $c(x,y)$ и $\gamma(y)$, а также областью Ω.

Последняя требуемая оценка

$$\int\limits_Q(\Delta_y u)^2\,dx\,dy\leqslant M_8\int\limits_Q(f^2+f_x^2)\,dx\,dy \quad (24)$$

очевидным образом вытекает из оценок (19), (20), (22) и (23).

Полученных оценок уже вполне достаточно для осуществления процедуры предельного перехода. Действительно, выберем последовательность $\{\varepsilon_m\}_{m=1}^\infty$ чисел из интервала $(0,\varepsilon_0)$, сходящуюся к нулю. Далее, из семейства $\{u_m(x,y)\}_{m=1}^\infty$ решений краевых задач (10), (2), (11) в случае $\lambda=1$, $\varepsilon=\varepsilon_m$ выберем подсемейство $\{u_{m_k}(x,y)\}_{m=1}^\infty$ такое, что для некоторой функции $u(x,y)$ имеют место сходимости при $k\to\infty$: $u_{m_k}(x,y)\to u(x,y)$ слабо в $W_2^2(Q)$, $\varepsilon_{m_k}\Delta_y u_{m_k xx}(x,y)\to 0$ слабо в $L_2(Q)$, $u_{m_k}(0,y)\to u(0,y)$ слабо в $W_2^2(\Omega)$, $u_{m_k}(1,y)\to u(1,y)$ слабо в $W_2^2(\Omega)$ (вследствие свойства рефлексивности гильбертова пространства это возможно). Очевидно, что предельная функция $u(x,y)$ и будет искомым решением краевой задачи I при выполнении условия (9).

Пусть теперь выполняется более общее условие (8). Рассмотрим краевую задачу: найти функцию $u(x,y)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения (10) и удовлетворяющую условию (2) и условиям

$$u(0,y)=(1-\varepsilon)\gamma(y)u(1,y),\quad u_x(1,y)=0,\quad y\in\Omega.$$

Согласно доказанному выше, эта задача при $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$ имеет решение $u(x,y)$, принадлежащее пространству V. Повторяя рассуждения и выкладки, проведённые выше, но дополнительно используя неравенство (6) (с фиксированными числом δ), получаем, что для функции $u(x,y)$ имеет место оценка

$$\int\limits_Q [u_{xx}^2 + \sum_{i=1}^n u_{xy_i}^2 + (\Delta_y u)^2 + \varepsilon^2(\Delta_y u_{xx})^2]\,dx\,dy +$$

$$+\sum_{i=1}^n \int\limits_\Omega u_{y_i}^2(0,y)\,dy + \sum_{i=1}^n \int\limits_\Omega u_{y_i}^2(1,y)\,dy \leqslant M_9 \int\limits_Q (f^2 + f_x^2)\,dx\,dy$$

с постоянной M_9, определяющейся лишь функциями $c(x,y)$ и $\gamma(y)$, а также областью Ω. Данной оценки вполне достаточно для выбора соответствующей сходящейся к искомому решению $u(x,y)$ нелокальной задачи I последовательности.

Единственность в пространстве $W_2^2(Q)$ решения нелокальной задачи I очевидным образом вытекает из оценки

$$\int\limits_Q (xu_x^2 + xu^2)\,dx\,dy \leqslant M \int\limits_Q f^2\,dx\,dy,$$

справедливой при выполнении как условия (9), так и условия (8). Из этой оценки и из неравенства (6) вытекает, что для решения $u(x,y)$ нелокальной задачи I в случае $f(x,y)\equiv 0$ выполняется условие $u(0,y)=0$. Другими словами, функция $u(x,y)$ будет решением однородной смешанной краевой задачи из пространства $W_2^2(Q)$ для эллиптического уравнения. Как хорошо известно [23], данное решение – тождественно нулевая функция, а это и означает единственность решения нелокальной задачи I. Теорема доказана.

Пусть γ_0 и γ_1 – фиксированные числа такие, что $0 \leqslant \gamma_0 \leqslant 1 \leqslant \gamma_1$.

Теорема 2. *Пусть выполняются условия*

$$\gamma(y) \in C^2(\overline{\Omega}), \quad \gamma_0 \leqslant \gamma(y) \leqslant \gamma_1 \quad \textit{при} \quad y \in \overline{\Omega}; \tag{25}$$

$$c(x,y) \in C^1(\overline{Q}), \quad c(x,y) - \frac{1}{d_0} + 2\gamma_1^2(\gamma_1^2 - 1) < 0 \quad \textit{при} \quad (x,y) \in \overline{Q}. \tag{26}$$

Тогда для любой функции $f(x,y)$ такой, что $f(x,y) \in L_2(Q)$, $f_x(x,y) \in L_2(Q)$, нелокальная задача I разрешима в пространстве $W_2^2(Q)$ и при том единственным образом.

Доказательство. Вновь воспользуемся методом регуляризации и методом продолжения по параметру. Изучим сначала случай $\gamma_0 > 0$.

Для положительного числа ε и для чисел λ из отрезка $[0,1]$ рассмотрим задачу: найти функцию $u(x,y)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения (10) и удовлетворяющую условию (2) и условиям

$$u(0,y) - \gamma_0 u(1,y) = \lambda[\gamma(y) - \gamma_0]u(1,y), \quad u_x(1,y) = 0, \quad y \in \Omega. \tag{27}$$

Поскольку $\gamma_0 \leqslant 1$, то краевая задача (10), (2), (27) при $\lambda = 0$, при фиксированном ε и при принадлежности функции $f(x,y)$ пространству $L_2(Q)$ будет разрешима в пространстве V (см. доказательство теоремы 1). Для доказательства разрешимости этой же задачи для остальных чисел λ из отрезка $[0,1]$ вновь перейдём к вспомогательной задаче для дифференциального уравнения вида (12).

Положим

$$w(x,y) = u(x,y) - \frac{\lambda(x^2-2x)}{\gamma_0}[\gamma(y) - \gamma_0]u(1,y),$$

$$\beta_0(\lambda,y) = 1 + \frac{\lambda[\gamma(y) - \gamma_0]}{\gamma_0}, \quad \beta_1(\lambda,y) = \frac{\lambda[\gamma(y) - \gamma_0]}{\gamma_0\beta_0(\lambda,y)}.$$

Заметим, что функция $\beta_0(\lambda,y)$ положительна при $\lambda \in [0,1]$, $y \in \overline{\Omega}$, и что имеет место равенство

$$u(x,y) = w(x,y) + (x^2-2x)\beta_1(\lambda,y)w(1,y).$$

Это равенство позволяет перейти от краевой задачи для функции $u(x,y)$ к краевой задаче для функции $w(x,y)$, причём для функции $w(x,y)$ должны выполняться локальные краевые условия смешанной задачи, а именно, условие (2) и условия

$$w(0,y)=\gamma_0 w(1,y), \quad w_x(1,y)=0, \quad y\in\Omega.$$

Как было показано при доказательстве теоремы 1, для разрешимости полученной краевой задачи для функции $w(x,y)$, а также для разрешимости в пространстве V нелокальной краевой задачи (10), (2), (27) при $\lambda\in[0,1]$, достаточно показать, что имеет место равномерно по λ оценка (21).

Для получения нужной оценки умножим уравнение (10) на функцию $-xu(x,y)$ и проинтегрируем по цилиндру Q. Получим равенство

$$\int\limits_Q\Big[xu_x^2+\sum_{i=1}^n xu_{y_i}^2-xcu^2+\varepsilon\sum_{i=1}^n xu_{xy_i}^2\Big]\,dx\,dy=$$

$$=\int\limits_\Omega([(1-\lambda)\gamma_0+\lambda\gamma(y)]^2-1)u^2(1,y)\,dy+\frac{\varepsilon}{2}\sum_{i=1}^n\int\limits_\Omega([(1-\lambda)\gamma_0+\lambda\gamma(y)]^2-1)u_{y_i}^2(1,y)\,dy+$$

$$+\varepsilon\lambda\sum_{i=1}^n\int\limits_\Omega[(1-\lambda)\gamma_0+\lambda\gamma(y)]\gamma_{y_i}(y)u_{y_i}(1,y)u(1,y)\,dy+\frac{\varepsilon}{2}\sum_{i=1}^n\int\limits_\Omega\gamma_{y_i}^2(y)u^2(1,y)\,dy-\int\limits_Q xfu\,dx\,dy. \quad (28)$$

Используя неравенство (6), в котором $\delta^2=1/(2(\gamma_1^2-1))$, оценим первое слагаемое в правой части (28):

$$\int\limits_\Omega([(1-\lambda)\gamma_0+\lambda\gamma(y)]^2-1)u^2(1,y)\,dy\leqslant$$

$$\leqslant(\gamma_1^2-1)\int\limits_\Omega u^2(1,y)\,dy\leqslant\frac{1}{2}\int\limits_Q xu_x^2\,dx\,dy+2\gamma_1^2(\gamma_1^2-1)\int\limits_Q xu^2\,dx\,dy. \quad (29)$$

Далее, вновь используя (6), нетрудно показать, что имеет место неравенство

$$\bigg|\frac{\varepsilon}{2}\sum_{i=1}^n\int\limits_\Omega([(1-\lambda)\gamma_0+\lambda\gamma(y)]^2-1)u_{y_i}^2(1,y)\,dy+$$

$$+\varepsilon\lambda\sum_{i=1}^n\int\limits_\Omega[(1-\lambda)\gamma_0+\lambda\gamma(y)]\gamma_{y_i}(y)u_{y_i}(1,y)u(1,y)\,dy+\frac{\varepsilon}{2}\sum_{i=1}^n\int\limits_\Omega\gamma_{y_i}^2(y)u^2(1,y)\,dy\bigg|\leqslant$$

$$\leqslant\varepsilon\bigg[\delta_1\sum_{i=1}^n\int\limits_Q xu_{xy_i}^2\,dx\,dy+C(\delta_1)\sum_{i=1}^n\int\limits_Q xu_{y_i}^2\,dx\,dy+C_1\int\limits_Q xu_x^2\,dx\,dy+C_2\int\limits_Q xu^2\,dx\,dy\bigg], \quad (30)$$

в котором δ_1 – произвольное положительное число, $C(\delta_1)$ определяется помимо числа δ_1 также функцией $\gamma(y)$, C_1 и C_2 – положительные числа, определяющиеся лишь функцией $\gamma(y)$. Зафиксируем число $\delta_1=1/2$. Положим

$$\varepsilon_1=\min\Big\{\frac{1}{C(1/2)},\frac{1}{2C_1},\frac{C_0}{C_2}\Big\}.$$

Если изначально число ε принадлежит интервалу $(0,\varepsilon_1)$, то из (28)–(30) вследствие условия (26) вытекает априорная оценка

$$\int\limits_Q \left[xu_x^2+\sum_{i=1}^n xu_{y_i}^2+xu^2+\varepsilon\sum_{i=1}^n xu_{xy_i}^2\right]dx\,dy+$$

$$+\int\limits_\Omega u^2(1,y)\,dy+\varepsilon\sum_{i=1}^n\int\limits_\Omega u_{y_i}^2(1,y)\,dy\leqslant M_{10}\int\limits_Q f^2\,dx\,dy, \tag{31}$$

постоянная M_{10} в которой определяется лишь функциями $c(x,y)$ и $\gamma(y)$.

Последовательно умножая уравнение (10) на функции $x\Delta_y u(x,y)$ и $-x\Delta_y u_{xx}(x,y)$, интегрируя по цилиндру Q, используя условия (27), неравенство (15) и условия (25) и (26), учитывая также оценку (31), получаем, что для решений краевой задачи (10), (2), (27) выполняются оценки

$$\int\limits_Q \left[\sum_{i=1}^n xu_{xy_i}^2+x(\Delta_y u)^2+\varepsilon x(\Delta_y u_x)^2\right]dx\,dy+$$

$$+\sum_{i=1}^n\int\limits_\Omega u_{y_i}^2(1,y)\,dy+\varepsilon\int\limits_\Omega[\Delta_y u(1,y)]^2\,dy\leqslant M_{12}\int\limits_Q f^2\,dx\,dy, \tag{32}$$

$$\int\limits_Q \left[\sum_{i=1}^n xu_{xxy_i}^2+x(\Delta_y u_x)^2+\varepsilon x(\Delta_y u_{xx})^2\right]dx\,dy+\int\limits_\Omega[\Delta_y u(1,y)]^2\,dy\leqslant M_{13}\int\limits_Q f^2\,dx\,dy \tag{33}$$

с числом M_{12}, определяемым областью Ω, функциями $c(x,y)$ и $\gamma(y)$, и числом M_{13}, определяемым областью Ω, функциями $c(x,y)$ и $\gamma(y)$, а также числом ε.

Из оценок (31)–(33) следует справедливость оценки (21) и, далее, разрешимость в пространстве V краевой задачи (10), (2), (27) в случае $\gamma_0>0$ при всех λ из отрезка $[0,1]$, при фиксированном ε и при принадлежности функции $f(x,y)$ пространству $L_2(Q)$.

Если теперь в интеграле с функцией $-xf(x,y)\Delta_y u_{xx}(x,y)$ дополнительно проинтегрировать по частям, то получим, что для решений $u(x,y)$ краевой задачи (10), (2), (27) выполняется равномерная по ε оценка (22). В свою очередь, из этой оценки следует, что выполняются равномерные по ε оценки (23) и (24).

Из полученных равномерных по ε априорных оценок вытекает, что существует последовательность решений краевой задачи (10), (2), (27) с $\lambda=1$, сходящаяся к решению $u(x,y)$ из пространства $W_2^2(Q)$ нелокальной задачи I.

Пусть теперь $\gamma_0=0$. Рассмотрим краевую задачу: найти функцию $u(x,y)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения (10), удовлетворяющую условию (2) и условиям

$$u(0,y)=[\varepsilon+\gamma(y)]u(1,y),\quad u_x(1,y)=0,\quad y\in\Omega. \tag{11'}$$

Как следует из доказанного выше, при фиксированном ε эта задача разрешима в пространстве V. Повторяя доказательство априорных оценок (31), (32), (23) и (24), нетрудно теперь уже из семейства решений задачи (10), (2), (11') выбрать последовательность, сходящуюся к искомому решению нелокальной задачи I.

Единственность решения нелокальной задачи I в пространстве $W_2^2(Q)$ очевидна. Теорема доказана.

3. Разрешимость нелокальной задачи II. Исследование разрешимости нелокальной задачи II будет проведено с помощью результатов, полученных в п. 2.

Теорема 3. *Пусть выполняется одно из условий:*

$$\gamma(y)\in C^2(\overline{\Omega}),\quad c(x,y)\in C^1(\overline{Q}),\quad |\gamma(y)|\leqslant 1\quad \text{при}\quad y\in\overline{\Omega},\quad (xc_x(x,y))_x\geqslant 0,$$

$$c(x,y) - \frac{1}{d_0} < 0 \quad \textit{при} \quad (x,y) \in \overline{Q}; \tag{34}$$

$$\gamma(y) \in C^2(\overline{\Omega}), \quad \gamma(y) \geqslant 0 \quad \textit{при} \quad y \in \overline{\Omega}, \quad \max_{\Omega} \gamma(y) = \gamma_1 > 1, \quad (xc_x(x,y))_x \geqslant 0,$$

$$c(x,y) - \frac{1}{d_0} + 2\gamma_1^2(\gamma_1^2 - 1) < 0 \quad \textit{при} \quad (x,y) \in \overline{Q}. \tag{35}$$

Тогда для любой функции $f(x,y)$ *такой, что* $f(x,y) \in L_2(Q)$, $f_x(x,y) \in L_2(Q)$, $f_{xx}(x,y) \in \in L_2(Q)$, $f(1,y) = 0$ *при* $y \in \overline{\Omega}$, *нелокальная задача II имеет решение* $u(x,y)$ *такое, что* $u(x,y) \in W_2^2(Q)$, $u_x(x,y) \in W_2^2(Q)$, *причём это решение единственно.*

Доказательство. Пусть $g(x,y)$ – заданная функция. Рассмотрим задачу: найти функцию $v(x,y)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения

$$\mathcal{L}v - c_x(x,y)\int_x^1 v(z,y)\,dz = g(x,y), \tag{36}$$

и такую, что для неё выполняются условия (2) и (3). В этой задаче уравнение (36) лишь незначительно отличается от уравнения (1). Заменяя (36) уравнением

$$\mathcal{L}v - \lambda c_x(x,y)\int_x^1 v(z,y)\,dz = g(x,y)$$

с параметром λ из отрезка $[0,1]$, повторяя доказательство теоремы 1 при выполнении условия (34) или теоремы 2 при выполнении условия (35), а также дополнительно используя условие $(xc_x(x,y))_x \geqslant 0$, нетрудно показать, что краевая задача (36), (2), (3) будет иметь решение $v(x,y)$, принадлежащее пространству $W_2^2(Q)$.

Положим $g(x,y) = f_x(x,y)$, $u(x,y) = -\int_x^1 v(z,y)\,dz$. Уравнение (36) для функций $u(x,y)$ и $f(x,y)$ имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x}(u_{xx} + \Delta_y u + cu - f) = 0. \tag{37}$$

Справедливо равенство $u_{xx} + \Delta_y u + cu - f = 0$. Отсюда следует, что построенная по функции $v(x,y)$ функция $u(x,y)$ будет решением уравнения (1). Выполнение краевых условий (2) и (4) для функции $u(x,y)$, принадлежность функции $u(x,y)$ требуемому классу очевидны. Следовательно, найденная функция $u(x,y)$ и будет искомым решением нелокальной задачи II.

В классе $\{u(x,y) : u(x,y) \in W_2^2(Q),\ u_x(x,y) \in W_2^2(Q)\}$ единственность решений нелокальной задачи II очевидна. Теорема доказана.

4. Собственные числа нелокальных задач I и II. Опишем некоторые свойства собственных чисел эллиптических задач с нелокальными условиями Самарского–Ионкина.

Спектральная задача I. Найти числа λ и γ, для которых задача

$$u_{xx} + \Delta_y u = \lambda u, \quad (x,y) \in Q,$$

$$u(x,y)|_S = 0,$$

$$u(0,y) = \gamma u(1,y), \quad u_x(1,y) = 0, \quad y \in \Omega,$$

имеет нетривиальное решение $u(x,y)$, принадлежащие пространству $W_2^2(Q)$.

Спектральная задача II. Найти числа λ и γ, для которых задача

$$u_{xx} + \Delta_y u = \lambda u, \quad (x,y) \in Q,$$

$$u(x,y)|_S = 0,$$

$$u_x(0,y) = \gamma u_x(1,y), \quad u_x(1,y) = 0, \quad y \in \Omega,$$

имеет нетривиальное решение $u(x,y)$, принадлежащие пространству $W_2^2(Q)$.

Исследование разрешимости спектральных задач I и II будет проведено с помощью классического метода разделения переменных.

Как хорошо известно (см., например, [24]), существуют последовательности $\{w_k(y)\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{\beta_k\}_{k=1}^{\infty}$ соответственно собственных функций и собственных чисел спектральной задачи

$$\Delta_y w(y) = \beta w(y), \quad y \in \Omega,$$

$$w(y)|_{\Gamma} = 0.$$

Более того, известно, что все собственные числа β_k отрицательны, имеют конечную кратность, последовательность $\{\beta_k\}_{k=1}^{\infty}$ можно расположить в монотонно убывающую последовательность, имеющую единственную предельную точку $-\infty$, функции $w_k(x)$, $i = 1, 2, \ldots$, принадлежат пространству $W_2^2(Q)$ и образуют базис в пространстве $L_2(\Omega)$.

Пусть λ – число из промежутка $(-\infty, \beta_1]$. Обозначим через $k_0(\lambda)$ натуральное число такое, что $\beta_{k_0(\lambda)+1} < \lambda \leqslant \beta_{k_0(\lambda)}$.

Теорема 4. *Действительное число λ будет собственным числом спектральной задачи I, если выполняется одно из условий:*

1) $\lambda \leqslant \beta_1$, $\gamma = \cos\sqrt{\beta_k - \lambda}$ для некоторого натурального числа k такого, что $1 \leqslant k \leqslant$ $\leqslant k_0(\lambda)$;

2) $\lambda \leqslant \beta_1$, $\gamma = (e^{\sqrt{\lambda-\beta_k}} + e^{-\sqrt{\lambda-\beta_k}})/2$ для некоторого натурального числа k такого, что $k \geqslant k_0(\lambda) + 1$;

3) $\lambda > \beta_1$, $\gamma = (e^{\sqrt{\lambda-\beta_k}} - e^{-\sqrt{\lambda-\beta_k}})/2$ для некоторого натурального числа k.

Доказательство. Определим функцию $\phi_k(x)$ как решение задачи

$$\phi_k''(x) + (\beta_k - \lambda)\phi_k(x) = 0, \quad x \in (0, 1),$$

$$\phi_k(0) = \gamma\phi_k(1), \quad \phi_k'(1) = 0.$$

При выполнении одного из условий 1)–3) функция ϕ_k будет ненулевой. Положив далее $u_k(x, y) = \phi_k(x)w_k(y)$, получим ненулевое решение спектральной задачи I, а это и означает требуемое. Теорема доказана.

Теорема 5. *Действительное число λ будет собственным числом спектральной задачи II, если выполняется одно из условий 1)–3) теоремы 4.*

Доказательство этой теоремы очевидно.

Некоторые следствия из теоремы 4 и 5 будут приведены в следующем пункте.

5. Комментарии и дополнения.

5.1. Приведём простой пример, показывающий, что подход, предложенный в настоящей работе, можно использовать и в других ситуациях.

Пусть $b(x, y)$ и $c(x, y)$ – заданные в $\overline{Q}$ функции, $\mathcal{M}$ – оператор, действие которого определяется равенством

$$\mathcal{M}v = v_{xx} + \Delta_y v + b(x, y)v_x + c(x, y)v.$$

Теорема 6. *Пусть выполняются условия*

$$b(x, y) \in C^1(\overline{Q}), \quad c(x, y) \in C^1(\overline{Q}),$$

$$b(x, y) \leqslant 0, \quad c(x, y) - \frac{1}{2}b_x(x, y) - \frac{1}{d_0} < 0 \quad \textit{при} \quad (x, y) \in \overline{Q},$$

$$\gamma(y) \in C^2(\overline{\Omega}), \quad \gamma^2(y) \leqslant 1 - \frac{1}{2}b(1, y) \quad \textit{при} \quad y \in \overline{\Omega}.$$

Тогда для любой функции $f(x, y)$ такой, что $f(x, y) \in L_2(Q)$, $f_x(x, y) \in L_2(Q)$, нелокальная задача с условиями (2), (3) для уравнения $\mathcal{M}v = f$ имеет решение $u(x, y)$, принадлежащее пространству $W_2^2(Q)$, и притом ровно одно.

Доказательство этой теоремы проводится полностью аналогично доказательству теоремы 1.

Нетрудно установить для уравнения $\mathcal{M}v = f$ также и теоремы, аналогичные теоремам 2 и 3.

Заметим, что теорема 6 и аналогичные ей теоремы показывают, что для задач с обобщённым условием Самарского–Ионкина существенную роль могут играть младшие члены.

5.2. Результаты о разрешимости нелокальных задач I и II нетрудно получить и для других более общих, чем (1), уравнений. Например, оператор Лапласа Δ_y можно заменить более общим эллиптическим оператором второго порядка, действующим по переменным $y_1, \ldots, y_n$, вторую производную по x можно заменить дифференциальным выражением $\partial(a(x,y)u_x)/\partial x$ с положительной функцией $a(x,y)$. Далее Δ_y можно заменить оператором $(-1)^{m+1}\Delta_y^m u$ (с естественными дополнительными граничными условиями на множестве S), вместо граничного условия (2) можно задавать граничное условие второй или третьей краевых задач.

5.3. Как следует из п. 1, нелокальная задача II в случае $\gamma \equiv 1$ является собственно задачей с условием Ионкина, а именно, условием периодического вида $u(0,y) = u(1,y)$ при $y \in \Omega$. В общем же случае нелокальная задача II может быть и задачей с условием антипериодичности $u(0,y) = -u(1,y)$, и задачей, в которой на подмножестве Ω_1 из Ω задаётся условие $u(0,y) = u(1,y)$, на другом подмножестве Ω_2 – условие $u(0,y) = -u(1,y)$, на третьем же подмножестве Ω_3 – обычное условие Дирихле $u(0,y) = 0$.

5.4. Условия $f(x,y) \in L_2(Q)$, $f_x(x,y) \in L_2(Q)$ теорем 1 и 2 можно заменить условием $f(x,y) \in L_2(0,1;\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega))$. Это следует из равенства

$$-\int\limits_Q xf\Delta_y u_{xx}\,dx\,dy = \sum_{i=1}^n \int\limits_Q xf_y\Delta_y u_{xx}\,dx\,dy,$$

которое можно использовать при получении равномерной по ε оценки (23).

Аналогичные изменения можно внести и в формулировку теоремы 3.

5.5. Теоремы о разрешимости нелокальных задач I и II, а также теоремы о собственных числах спектральных задач I и II говорят прежде всего о том, что корректность краевых задач для эллиптических уравнений с обобщённым условием Самарского–Ионкина существенным образом определяется младшим коэффициентом и функцией (числом) γ. И если в теоремах существования 1–3 важнейшим является условие отрицательности коэффициента $c(x,y)$, то в спектральных задачах (дающих, в частности, условия неединственности решений) существенную роль может сыграть коэффициент γ. Например, при подходящем выборе числа γ как в спектральной задаче I, так и в спектральной задаче II любое действительное число λ может оказаться собственным числом. И наоборот, нетрудно найти числа γ, для которых спектральные задачи I и II не будут иметь действительных собственных чисел (таковыми, например, будут все числа γ из промежутка $(-\infty, -1)$).

Работа выполнена в рамках госзадания “Программа фундаментальных исследований Самарского государственного университета в области химических наук и материаловедения” (тема № FSSE-2020-0005).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бицадзе А.В., Самарский А.А.* О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических задач // Докл. АН СССР. 1969. Т. 185. № 4. С. 739–740.
2. *Романко В.К.* Граничные задачи для одного класса дифференциальных операторов // Дифференц. уравнения. 1974. Т. 10. № 1. С. 117–131.
3. *Романко В.К.* Однозначная разрешимость граничных задач для некоторых дифференциально-операторных уравнений // Дифференц. уравнения 1977. Т. 13. № 2. С. 324–335.
4. *Дезин А.А.* Общие вопросы теории граничных задач. М., 1980.
5. *Бицадзе А.В.* К теории нелокальных краевых задач // Докл. АН СССР. 1984. Т. 277. № 1. С. 17–19.
6. *Ильин В.А., Моисеев Е.И.* Двумерная нелокальная краевая задача для оператора Пуассона в дифференциальной и разностной трактовках// Мат. моделирование. 1990. Т. 2. № 8. С. 139–156.

7. *Моисеев Е.И.* О базисности собственных функций одной нелокальной краевой задачи// Докл. АН СССР. 1990. Т. 313. № 3. С. 556–589.
8. *Жура Н.А.* Краевые задачи Бицадзе–Самарского для эллиптических в смысле Дуглиса–Ниренберга систем // Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28. № 1. С. 81–91.
9. *Гущин А.К., Михайлов В.П.* Условия фредгольмовости одного класса нелокальных задач для эллиптического уравнения второго порядка // Докл. АН СССР. 1993. Т. 333. № 3. С. 290–292.
10. *Гущин А.К., Михайлов В.П.* О разрешимости нелокальных задач для эллиптического уравнения второго порядка // Мат. сб. 1994. Т. 184. С. 121–160.
11. *Skubachevskii A.L.* Elliptic Functional Differential Equations and Applications // Operator Theory. Advances and Applications. V. 91. Basel; Boston; Berlin, 1997.
12. *Гущин А.К.* Об условии компактности одного класса операторов и его приложении к исследованию разрешимости нелокальных задач для эллиптических уравнений // Мат. сб. 2002. Т. 193. № 5. С. 17–36.
13. *Нахушев А.М.* Задачи со смещением для уравнений в частных производных. М., 2006.
14. *Ashyraliev A., Akay N.* A note on the well-posedness of the nonlocal boundary value problem for elliptic difference equations// Appllied Mathematics Computation. 2006. V. 175. № 1. P. 49–60.
15. *Скубачевский А.Л.* Неклассические краевые задачи. I // Соврем. математика. Фунд. направления. 2007. Т. 26. С. 3–132.
16. *Ashyraliev A., Akay N.* A note on the Bitsadze–Samarskii type nonlocal boundary value problem in a Banach space // Math. Anal. and Appl. 2008. V. 344. P. 557–563.
17. *Kozhanov A.I.* Nonlocal problems with integral conditions for elliptic equations // Complex Variables and Elliptic Equat. 2019. V. 64. № 5. P. 741–752.
18. *Ионкин Н.И.* Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13. № 2. С. 294–304.
19. *Ионкин Н.И.* Об устойчивости одной задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием // Дифференц. уравнения. 1979. Т. 15. № 7. С. 1279–1283.
20. *Самарский А.А.* О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1980. Т. 16. № 11. С. 1925–1935.
21. *Юрчук Н.И.* Смешанная задача с интегральным условием для некоторых параболических уравнений // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22. № 12. С. 2117–2126.
22. *Соболев С.Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М., 1988.
23. *Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М., 1973.
24. *Triebel H.* Interpolation Theory. Functional Spaces. Differential Operators. Berlin, 1980.
25. *Треногин В.А.* Функциональный анализ. М., 1973.

Институт математики
имени С.Л. Соболева СО РАН, г. Новосибирск,
Самарский государственный
технический университет

Поступила в редакцию 13.07.2022 г.
После доработки 18.01.2023 г.
Принята к публикации 20.01.2023 г.