ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 2, с. 236–251

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.957

ОБ ОТСУТСТВИИ РЕШЕНИЙ У ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВ С ∞-ЛАПЛАСИАНОМ

© 2023 г. А. А. Коньков

Для дифференциальных неравенств с ∞-лапласианом в главной части найдены условия отсутствия решений в неограниченных областях. Приведены примеры, демонстрирующие точность этих условий.

DOI: 10.31857/S0374064123020097, EDN: PVDQWT

Введение. Рассмотрим задачу

$$\Delta_\infty u \geqslant f(x,u) \quad \text{в} \quad \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = 0, \tag{1}$$

где Ω – неограниченная область в пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$,

$$\Delta_\infty u = \frac{1}{2}\nabla|\nabla u|^2 \nabla u = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}$$

– ∞-оператор Лапласа, а f – некоторая функция такая, что выполняется неравенство

$$f(x,t) > 0 \tag{2}$$

для всех $t > 0$ и $x \in \Omega$. Обозначим через B_r и S_r, соответственно, открытый шар и сферу в $\mathbb{R}^n$ радиуса $r > 0$ с центром в нуле. Будем предполагать, что $S_r \bigcap \Omega \neq \varnothing$ для всех $r > r_*$, где $r_* > 0$ – некоторое вещественное число. Пусть также найдутся вещественные числа $\sigma > 1$ и $\theta > 1$ такие, что

$$\inf_{\substack{x\in\Omega_{r,\sigma} \\ \zeta\in(t/\theta,t\theta)}} f(x,|x|\zeta) \geqslant q(r)g(t) \tag{3}$$

для всех $t > 0$ и $r > r_*$, где $\Omega_{r,\sigma} = \{x \in \Omega : r/\sigma < |x| < r\sigma\}$, а q и g – неотрицательные измеримые функции, причём $\inf\limits_K g > 0$ для любого компакта $K \subset (0,\infty)$.

Решения задачи (1) будем понимать в вязкостном смысле (см. [1, 2]). Если $\partial\Omega = \varnothing$, т.е. $\Omega = \mathbb{R}^n$, то краевое условие в (1) считается выполненным автоматически.

Явление отсутствия нетривиальных решений у дифференциальных уравнений и неравенств (blow-up) исследовалось многими авторами [3–19]. В случае когда главная часть дифференциального оператора имеет дивергентный вид, хорошо зарекомендовал себя метод нелинейной емкости, основные идеи которого изложены в работах [6, 18]. Для неравенств (1) этот метод, очевидно, не работает. В предположении, что Ω – ограниченная область, явление blow-up для неравенств вида (1) изучалось в статьях [20–22], в которых рассматривался так называемый “граничный blow-up” или, другими словами, “большие решения”, стремящиеся к бесконечности при приближении к границе $\partial\Omega$. Зависимость правой части от пространственной переменной в работах [20–22] по существу не учитывалась. В случае неограниченных областей условия отсутствия нетривиальных решений задачи (1) до настоящего момента не были известны. Теорема, доказанная в данной работе, устраняет этот пробел.

Определение 1. Функция $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ называется *полунепрерывной сверху в точке* $x \in \overline{\Omega}$, если выполняется неравенство

$$\limsup_{y\to x} u(y) \leqslant u(x).$$

Говорим, что функция u *полунепрерывна сверху на множестве* $\mathcal{G} \subset \overline{\Omega}$, если она полунепрерывна сверху в каждой точке $x \in \mathcal{G}$.

Определение 2. *Суперджетом второго порядка* $J^{2,+}_{\Omega} u(x)$ функции $u : \Omega \to \mathbb{R}$ в точке $x \in \Omega$ называется множество упорядоченных пар (v, A), где $v \in \mathbb{R}^n$ – некоторый вектор и A – симметрическая $n \times n$-матрица такие, что справедлива оценка

$$u(y) - u(x) \leqslant \langle v, y - x\rangle + \frac{1}{2}\langle A(y - x), y - x\rangle + \bar{\bar{o}}(|y - x|^2)$$

для всех y из некоторой окрестности точки x. Здесь и ниже угловыми скобками обозначено стандартное скалярное произведение в пространстве $\mathbb{R}^n$.

Заметим, что в случае $u \in C^2(\Omega)$ множество $J^{2,+}_{\Omega} u(x)$ не пусто для любой точки $x \in \Omega$, так как

$$(Du(x), D^2u(x)) \in J^{2,+}_{\Omega} u(x),$$

где $Du(x)$ – вектор градиента, а $D^2u(x)$ – матрица вторых производных функции u в точке x.

Определение 3. Функция $u \geqslant 0$ называется *неотрицательным решением задачи* (1), если она полунепрерывна сверху на множестве $\overline{\Omega}$, равна нулю на границе $\partial\Omega$, и при этом для любой точки $x \in \Omega$ такой, что $J^{2,+}_{\Omega} u(x) \neq \varnothing$, выполнено соотношение

$$\langle Av, v\rangle \geqslant f(x, u(x)) \tag{4}$$

для всех $(v, A) \in J^{2,+}_{\Omega} u(x)$.

В общем случае (см. [1]) полунепрерывная сверху функция u называется *вязкостным решением неравенства*

$$F(x, u, Du, D^2u) \leqslant 0 \quad \text{в области} \quad \Omega,$$

где F – некоторая функция, если для любой точки $x \in \Omega$ такой, что $J^{2,+}_{\Omega} u(x) \neq \varnothing$, выполнено соотношение

$$F(x, u(x), v, A) \leqslant 0 \tag{5}$$

для всех $(v, A) \in J^{2,+}_{\Omega} u(x)$. В частности, полагая

$$F(x, u, Du, D^2u) = f(x, u) - \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} \tag{6}$$

в формуле (5), будем иметь неравенство (4).

Для того чтобы классические решения были одновременно вязкостными, на функцию F накладывается условие вырожденной эллиптичности

$$F(x, \zeta, v, A) \leqslant F(x, \zeta, v, B)$$

для всех $x \in \Omega$, вещественных чисел ζ, векторов $v \in \mathbb{R}^n$ и симметрических $n \times n$-матриц $A \geqslant B$. Последнее неравенство понимается в смысле квадратичных форм. Именно, говорим, что $A \geqslant B$, если

$$\langle Av, v\rangle \geqslant \langle Bv, v\rangle$$

для всех $v \in \mathbb{R}^n$. Функция F, определённая формулой (6), очевидно, условию вырожденной эллиптичности удовлетворяет.

1. Формулировка основных результатов. Справедливы следующие утверждения.

Теорема. *Пусть выполнены соотношения*

$$\int\limits_1^{\infty} (g(t)t)^{-1/4}\, dt < \infty, \qquad \int\limits_{r_*}^{\infty} q(r)\, dr = \infty. \tag{7}$$

Тогда любое неотрицательное решение задачи (1) тождественно равно нулю.

Частным случаем (1) является задача

$$\Delta_\infty u \geqslant c(|x|)u^\lambda \quad \text{в} \quad \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = 0, \tag{8}$$

где c – положительная монотонно невозрастающая функция.

Следствие. *Предположим, что* $\lambda > 3$ *и*

$$\int\limits_{r_*}^{\infty} r^\lambda c(r)\, dr = \infty.$$

Тогда любое неотрицательное решение задачи (8) тождественно равно нулю.

Теорема и следствие из неё будут доказаны в п. 3. Сейчас приведём примеры, демонстрирующие точность этих результатов.

Пример 1. Рассмотрим неравенство

$$\Delta_\infty u \geqslant c_0(1+|x|)^s u^\lambda \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^n, \tag{9}$$

где $c_0 = \mathrm{const} > 0$. Согласно следствию условия

$$\lambda > 3 \quad \text{и} \quad s \geqslant -\lambda - 1$$

гарантируют, что любое неотрицательное решение неравенства (9) тождественно равно нулю. Эти условия являются точными. Действительно, не представляет труда убедиться в том, что в случае $\lambda > 3$ и $s < -\lambda - 1$, выражение

$$u(x) = \begin{cases} |x|^{-(4+s)/(\lambda-3)} - r_0^{-(4+s)/(\lambda-3)}, & |x| > r_0, \\ 0, & |x| \leqslant r_0, \end{cases}$$

где $r_0 > 0$ – некоторое вещественное число, определяет неотрицательное решение (9). При этом в случае $\lambda \leqslant 3$ несколько более сложными рассуждениями можно показать, что неравенство (9) имеет нетривиальное неотрицательное решение для всех $s \in \mathbb{R}$.

Пример 2. Будем исследовать критический показатель $s = -\lambda - 1$ в правой части (9). Пусть функция $u \geqslant 0$ удовлетворяет неравенству

$$\Delta_\infty u \geqslant c_0(1+|x|)^{-\lambda-1} \ln^\mu(2+|x|) u^\lambda \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^n, \tag{10}$$

где $c_0 = \mathrm{const} > 0$. Применив следствие, получим, что при

$$\lambda > 3 \quad \text{и} \quad \mu \geqslant -1 \tag{11}$$

функция u тождественно равна нулю. В то же время прямыми вычислениями можно убедиться в том, что при $\lambda > 3$ и $\mu < -1$ формула

$$u(x) = \begin{cases} |x| \ln^{-(\mu+1)/(\lambda-3)} |x| - r_0 \ln^{-(\mu+1)/(\lambda-3)} r_0, & |x| > r_0, \\ 0, & |x| \leqslant r_0, \end{cases}$$

где $r_0 > 0$ достаточно велико, задаёт неотрицательное решение (10). Таким образом, в (11) второе условие, как и первое, является точным. Можно показать, что в случае $\lambda \leqslant 3$ неравенство (10) имеет нетривиальное неотрицательное решение для всех $\mu \in \mathbb{R}$.

Пример 3. Исследуем критический показатель $\lambda = 3$ в (9). Рассмотрим неравенство

$$\Delta_\infty u \geqslant c_0(1+|x|)^s u^3 \ln^\nu(2+u) \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^n, \tag{12}$$

где $c_0 = \mathrm{const} > 0$. В соответствии с теоремой если

$$\nu > 4 \quad \text{и} \quad s \geqslant -4, \tag{13}$$

то любое неотрицательное решение неравенства (12) тождественно равно нулю. При этом если $\nu > 4$ и $s < -4$, то функция

$$u(x) = \begin{cases} e^{|x|^{(4+s)/(4-\nu)}} - e^{r_0^{(4+s)/(4-\nu)}}, & |x| > r_0, \\ 0, & |x| \leqslant r_0, \end{cases}$$

где $r_0 > 0$ достаточно велико, является неотрицательным решением (12). Если же нарушено первое условие в (13), т.е. $\nu \leqslant 4$, то неравенство (12) имеет нетривиальное неотрицательное решение для любого $s \in \mathbb{R}$. Тем самым оба условия в (13) являются точными.

2. Вспомогательные утверждения. Ниже будем предполагать, что выполнены условия (7). Возьмём функцию $\omega \in C^\infty(\mathbb{R})$, положительную на интервале $(-1, 1)$, равную нулю на множестве $\mathbb{R} \setminus (-1, 1)$ и такую, что справедливо равенство

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \omega(t)\,dt = 1.$$

Обозначим

$$\omega_\delta(t) = \frac{1}{\delta}\omega\left(\frac{t}{\delta}\right), \quad \delta > 0.$$

Лемма 1. *Пусть $\mu > 1$, $\nu > 1$ и $0 < \alpha \leqslant 1$ – вещественные числа, а $\eta : (0, \infty) \to (0, \infty)$ и $H : (0, \infty) \to (0, \infty)$ – измеримые функции, причём*

$$\eta(t) \leqslant \inf_{(t/\mu, t\mu)} H$$

для всех $t \in (0, \infty)$. Тогда имеет место оценка

$$\left(\int\limits_{M_1}^{M_2} \eta^{-\alpha}(t) t^{\alpha-1}\,dt\right)^{1/\alpha} \geqslant C \int\limits_{M_1}^{M_2} \frac{dt}{H(t)}$$

для всех вещественных чисел $M_1 > 0$ и $M_2 > 0$ таких, что $M_2 \geqslant \nu M_1$, где постоянная $C > 0$ зависит только от α, ν и μ.

Лемма 2. *Пусть $0 < r_1 < r_2$ и $0 < \alpha \leqslant 1$ – вещественные числа, а $\eta : (r_1, r_2) \to [0, \infty)$ – измеримая функция, тогда*

$$\int\limits_{r_1}^{r_2} \left(\int\limits_{r_1}^{\rho} \eta(\xi)\,d\xi\right)^\alpha d\rho \geqslant C \int\limits_{r_1}^{r_2} \left(1 - \frac{\xi}{r_2}\right)^\alpha (\xi\eta(\xi))^\alpha\,d\xi,$$

где постоянная $C > 0$ зависит только от α.

Лемма 3. *Пусть $0 < r_1 < r_2$ и $0 < \alpha < 1$ – вещественные числа, а $\eta : (r_1, r_2) \to [0, \infty)$ – измеримая функция, тогда*

$$\left(\int\limits_{r_1}^{r_2} \eta(\xi)\,d\xi\right)^\alpha \geqslant C \int\limits_{r_1}^{r_2} \eta(\xi)\varkappa^{\alpha-1}(\xi)\,d\xi, \tag{14}$$

где $\varkappa(\xi) = \int_\xi^{r_2} \eta(\zeta)\,d\zeta$, а постоянная $C > 0$ зависит только от α.

Замечание. Если $\varkappa(\xi) = 0$ для некоторого $\xi \in (r_1, r_2)$, то $\eta(\zeta) = 0$ для почти всех $\zeta \in \in (\xi, r_2)$. В этом случае будем считать, что в правой части (14) величина $\eta(\xi)\varkappa^{\alpha-1}(\xi)$ также равна нулю.

Лемма 4. *Пусть* $\gamma > 0$, $\lambda > 1$ *и* $r_0 > r_*$ *– вещественные числа, а* $p : [r_*, \infty) \to [0, \infty)$ *– локально суммируемая функция такая, что*

$$rp(r) \Big/ \int\limits_{r_*}^{r} p(\xi)\, d\xi \leqslant \gamma$$

для всех $r \geqslant r_0$. *Тогда выполняется неравенство*

$$\int\limits_{r_*}^{\lambda r} p(\xi)\, d\xi \leqslant C \int\limits_{r_*}^{r} p(\xi)\, d\xi$$

для всех $r \geqslant r_0$, *где постоянная* $C > 0$ *зависит только от* γ *и* λ.

Доказательство леммы 1 можно найти в [13, лемма 2.3]. Леммы 2 и 3 доказаны в работе [12, леммы 2.2 и 2.3], а лемма 4 – в [14, лемма 2.7].

Лемма 5. *Пусть* $\mu > 1$ *– вещественное число, а* $H : (0, \infty) \to (0, \infty)$ *– измеримая функция такая, что*

$$\eta(t) = \inf_{(t/\mu, t\mu)} H > 0$$

для всех $t \in (0, \infty)$ *и при этом*

$$\int\limits_{1}^{\infty} (\eta(t)t)^{-1/4}\, dt < \infty. \tag{15}$$

Тогда существует бесконечно гладкая функция $h : (0, \infty) \to (0, \infty)$, *удовлетворяющая следующим условиям:*

1) $h(t) \leqslant H(t)$ *для всех* $t \in (0, \infty)$;

2) $h(t_2) \geqslant h(t_1)$ *для всех* $t_2 \geqslant t_1 > 0$;

3) для любого вещественного числа $\alpha > 0$ *найдётся постоянная* $\beta > 0$, *зависящая только от* α *и* μ, *такая, что* $h(\alpha t) \leqslant \beta h(t)$ *для всех* $t \geqslant 2$;

4) имеет место неравенство

$$\int\limits_{1}^{\infty} (h(t)t)^{-1/4}\, dt < \infty. \tag{16}$$

Доказательство. Возьмём $t_k = \mu^{k/4}$, $k \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}$. Рассуждая по индукции, построим последовательность монотонно неубывающих функций $h_k : [1, t_k] \to (0, \infty)$, $k \in \mathbb{N}$, со следующими свойствами:

i) $h_k(t) \leqslant h_s(t) \leqslant H(t)$ для всех $t \in [1, t_s]$, $1 \leqslant s \leqslant k$;

ii) $h_k(\mu^{1/4}t) \leqslant \mu^2 h_k(t)$ для всех $t \in [1, t_{k-1}]$, $k \in \mathbb{N}$;

iii) для всех $k \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство

$$\int\limits_{1}^{t_k} (h_k(t)t)^{-1/4}\, dt \leqslant \frac{\mu^{1/2}}{1 - \mu^{-1/16}} \int\limits_{1}^{t_k} (\eta(t)t)^{-1/4}\, dt. \tag{17}$$

Обозначим

$$\gamma_k = \sup_{(t_{k-1}, t_{k+1})} \eta, \quad k \in \mathbb{N},$$

и пусть $h_1 = \gamma_1$. Предположим теперь, что для некоторого $k \geqslant 2$ функция h_{k-1} уже известна. Возьмём

$$h_k(t) = \begin{cases} \min\{\gamma_k, h_{k-1}(t)\}, & t \in [1, t_{k-1}], \\ \min\{\gamma_k, h_{k-1}(t_{k-1})\}, & t \in [t_{k-1}, t_k], \end{cases}$$

если
$$\mu h_{k-1}(t_{k-1}) \geqslant \gamma_k, \tag{18}$$
и
$$h_k(t) = \begin{cases} h_{k-1}(t), & t \in [1, t_{k-1}], \\ \dfrac{t_k - t + \mu(t - t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}} h_{k-1}(t_{k-1}), & t \in [t_{k-1}, t_k], \end{cases}$$
если условие (18) не выполнено. Несложно увидеть, что h_k удовлетворяет условиям i) и ii). Покажем, что для h_k справедливо неравенство (17). В случае $k = 1$ это неравенство следует из определений h_1 и γ_1. Пусть $k \geqslant 2$ и при этом
$$\int\limits_1^{t_s} (h_s(t)t)^{-1/4}\, dt \leqslant \frac{\mu^{1/2}}{1 - \mu^{-1/16}} \int\limits_1^{t_s} (\eta(t)t)^{-1/4}\, dt \tag{19}$$
для всех $1 \leqslant s \leqslant k-1$. Предположим сначала, что имеет место (18) и пусть $s \geqslant 0$ – минимальное целое число такое, что $\mu h_k(t_s) \geqslant h_k(t_k)$. Из определения функции h_k следует, что $h_s = h_k$ на промежутке $[1, t_s]$. Поскольку
$$h_k(t) \geqslant \frac{h_k(t_k)}{\mu} \geqslant \frac{\gamma_k}{\mu^2}$$
для всех $t \in (t_s, t_k)$, получим
$$\int\limits_{t_s}^{t_k} (h_k(t)t)^{-1/4}\, dt \leqslant \frac{4}{3} \mu^{1/2} \gamma_k^{-1/4} t_k^{3/4}.$$
Объединив последнее неравенство с очевидным соотношением
$$\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} (\eta(t)t)^{-1/4}\, dt \geqslant \frac{4}{3} \gamma_k^{-1/4} (t_k^{3/4} - t_{k-1}^{3/4}) = \frac{4}{3} \gamma_k^{-1/4} (1 - \mu^{-3/16}) t_k^{3/4},$$
будем иметь соотношение
$$\int\limits_{t_s}^{t_k} (h_k(t)t)^{-1/4}\, dt \leqslant \frac{\mu^{1/2}}{1 - \mu^{-3/16}} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} (\eta(t)t)^{-1/4}\, dt. \tag{20}$$
Если $s = 0$, то (20) немедленно влечёт за собой (17). Предположим, что $s \geqslant 1$. Так как $s \leqslant k-1$, то справедлива оценка (19), сложив которую с (20), получим неравенство (17).

Предположим теперь, что (18) не выполнено. Тогда $h_k(t_k) = \mu h_k(t_{k-1})$. Пусть $s \geqslant 1$ – наименьшее целое число такое, что $h_k(t_k) = \mu^{k-s} h_k(t_s)$. Имеем
$$\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} (h_k(t)t)^{-1/4}\, dt = \mu^{-(i-s)/16} \int\limits_{t_s}^{t_{s+1}} (h_k(t)t)^{-1/4}\, dt$$
для всех $s \leqslant i \leqslant k-1$, поэтому выполняется оценка
$$\int\limits_{t_s}^{t_k} (h_k(t)t)^{-1/4}\, dt \leqslant \frac{1}{1 - \mu^{-1/16}} \int\limits_{t_s}^{t_{s+1}} (h_k(t)t)^{-1/4}\, dt. \tag{21}$$

В то же время, учитывая монотонность функции h_k и то обстоятельство, что

$$h_k(t_s) = h_k(t_{s-1}) \geqslant \gamma_s/\mu,$$

будем иметь $h_k(t) \geqslant \eta(t)/\mu$ для всех $t \in (t_s, t_{s+1})$. Таким образом, принимая во внимание (21), получаем неравенство

$$\int\limits_{t_s}^{t_k} (h_k(t)t)^{-1/4}\,dt \leqslant \frac{\mu^{1/4}}{1-\mu^{-1/16}} \int\limits_{t_s}^{t_{s+1}} (\eta(t)t)^{-1/4}\,dt.$$

Поскольку $h_s = h_k$ на промежутке $[1, t_s]$, то, складывая последнее выражение с оценкой (19), снова приходим к (17).

Заметим, что ввиду (15) справедливо соотношение $\lim\limits_{k\to\infty} \gamma_k = \infty$, поэтому последовательность функций h_k, $k \in \mathbb{N}$, стабилизируется при $k \to \infty$ на любом компакте, принадлежащем множеству $[1, \infty)$. В частности, для всех $t \in [1, \infty)$ существует предел

$$\tilde h(t) = \lim_{k\to\infty} h_k(t).$$

Продолжим функцию $\tilde h$ на всю вещественную ось, положив, что $\tilde h(t) = \min\{\tilde h(1), \inf\limits_{(t,1]} H\}$ при $t \in (0,1)$ и $\tilde h(t) = 0$ при $t \in (-\infty, 0]$. Для завершения доказательства леммы 5 остаётся взять

$$h(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \omega_{1/2}(t-\tau)\tilde h\left(\tau - \frac{1}{2}\right)d\tau, \quad t > 0.$$

Лемма доказана.

Дальнейшие рассуждения будем проводить в несколько шагов. Договоримся обозначать через C положительные, возможно, различные постоянные, зависящие только от σ и θ.

Шаг 1. Применив лемму 5, где $\mu = \theta^{1/2}$ и $H(t) = \sup\limits_{(t/\mu, t\mu)} g$, будем иметь монотонно неубывающую бесконечно гладкую функцию $h : (0,\infty) \to (0,\infty)$ такую, что выполняется оценка

$$h(4t) \leqslant Ch(t) \tag{22}$$

для всех $t \geqslant 2$, справедливо условие (16) и при этом

$$\inf_{\substack{x\in\Omega_{r,\sigma}\\ \zeta\in(\theta^{-1/2}t,\,\theta^{1/2}t)}} f(x, |x|\zeta) \geqslant q(r)h(t) \tag{23}$$

для всех $t > 0$ и $r > r_*$.

Шаг 2. Возьмём непрерывную функцию $p : [0,\infty) \to [0,\infty)$ и вещественное число $R_* > r_*$, удовлетворяющие следующим условиям:

$$p(r) = 0 \quad \text{для всех} \quad 0 \leqslant r \leqslant R_*;$$

$$p(r) = e^{-1/(r-R_*)+1} p(R_*+1) > 0 \quad \text{для всех} \quad R_* < r \leqslant R_*+1; \tag{24}$$

$$\inf_{\substack{x\in\Omega_{r,\sigma^{1/4}}\\ \zeta\in(\theta^{-1/2}t,\,\theta^{1/2}t)}} f(x, |x|\zeta) \geqslant p(r)h(t) \quad \text{для всех} \quad t > 0, \quad r > R_*; \tag{25}$$

$$rp(r) \leqslant 1 \quad \text{для всех} \quad r \geqslant 0; \tag{26}$$

$$\int\limits_{r_*}^{\infty} p(r)\,dr = \infty. \tag{27}$$

Покажем, что такие функция p и вещественное число R_* существуют, причём R_* можно сделать сколь угодно большим. Положим

$$Q_\delta(r) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \omega_\delta(r-\rho)Q(\rho)\,d\rho, \quad \delta > 0,$$

где

$$Q(\rho) = \begin{cases} 0, & \rho \in (-\infty, r_*], \\ \sup\limits_{(\sigma^{-1/4}\rho,\sigma^{1/4}\rho)\bigcap(r_*,\infty)} q, & \rho \in (r_*, \infty). \end{cases}$$

Принимая во внимание (23), будем иметь

$$\inf_{\substack{x\in\Omega_{r,\sigma^{1/2}} \\ \zeta\in(\theta^{-1/2}t,\theta^{1/2}t)}} f(x,|x|\zeta) \geqslant Q_\delta(r)h(t) \tag{28}$$

для всех $t > 0$ и $r > r_*$, где $\delta > 0$ – достаточно малое вещественное число. В то же время для любого $\delta > 0$ найдётся вещественное число $r_\delta > r_*$ такое, что $\inf\limits_{(\sigma^{-1/8}r,\sigma^{1/8}r)} Q_\delta \geqslant q(r)$ для всех $r \in [r_\delta, \infty)$. Обозначим

$$M_\delta(r) = \min\left\{Q_\delta(r), \frac{1}{r}\right\}.$$

Покажем, что

$$\int\limits_{r_*}^{\infty} M_\delta(r)\,dr = \infty \tag{29}$$

для любого $\delta > 0$. В самом деле, пусть в каждой окрестности бесконечности найдётся вещественное число $r > 0$ такое, что $q(r) \geqslant 1/r$. Тогда $M_\delta(\rho) \geqslant \sigma^{-1/8}/\rho$ для всех $\rho \in (\sigma^{-1/8}r, \sigma^{1/8}r)$, поэтому имеет место равенство

$$\int\limits_{\sigma^{-1/8}r}^{\sigma^{1/8}r} M_\delta(\rho)\,d\rho = \frac{1}{4}\sigma^{-1/8}\ln\sigma.$$

Согласно необходимому признаку сходимости несобственного интеграла это доказывает (29). Предположим теперь, что $q(r) < 1/r$ для всех $r > 0$ из некоторой окрестности бесконечности. В этом случае получим

$$M_\delta(r) \geqslant \min\left\{q(r), \frac{1}{r}\right\} = q(r)$$

для всех достаточно больших $r > 0$, и (29) следует из второго условия (7).

Таким образом, остаётся взять

$$p(r) = \begin{cases} 0, & r \in [0, R_*], \\ e^{-1/(r-R_*)+1}M_\delta(R_*+1), & r \in (R_*, R_*+1], \\ M_\delta(r), & r \in (R_*+1, \infty), \end{cases}$$

где вещественные числа $R_* > r_*$ и $\delta > 0$ выбраны так, чтобы было справедливо неравенство $M_\delta(R_*+1) > 0$ и при этом имело бы место (25). Существование таких вещественных чисел следует из условий (28) и (29). Можно увидеть, что в случае когда R_* достаточно велико, соотношение (28) влечёт за собой (25). Действительно, если $R_* > 1/(\sigma^{1/4}-1)$, то справедливо включение $\Omega_{r,\sigma^{1/4}} \subset \Omega_{R_*+1,\sigma^{1/2}}$ для всех $r \in (R_*, R_*+1)$, поэтому имеет место неравенство

$$\inf_{\substack{x\in\Omega_{r,\sigma^{1/4}}\\ \zeta\in(\theta^{-1/2}t,\theta^{1/2}t)}} f(x,|x|\zeta) \geqslant \inf_{\substack{x\in\Omega_{R_*+1,\sigma^{1/2}}\\ \zeta\in(\theta^{-1/2}t,\theta^{1/2}t)}} f(x,|x|\zeta)$$

для всех $r \in (R_*, R_*+1)$. Ввиду того что на промежутке (R_*, R_*+1) функция p не превосходит $Q_\delta(R_*+1)$, это позволяет утверждать, что (25) выполнено для всех $r \in (R_*, R_*+1)$. Наконец, если $r \in [R_*+1, \infty)$, то неравенство (28) влечёт за собой (25), так как для этих r значение функции p не превосходит Q_δ. Заметим также, что ввиду (29) в любой окрестности бесконечности найдётся точка, в которой функция M_δ положительна.

Шаг 3. Рассмотрим задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{d^2w}{dr^2}\left(\frac{dw}{dr}\right)^2 = \frac{1}{2}p(r)h(w/r) \quad \text{при} \quad r>0, \quad w(0)=\varepsilon, \quad \frac{dw}{dr}(0)=0, \tag{30}$$

где $\varepsilon > 0$ – некоторое вещественное число. Локально решение этой задачи, очевидно, существует. В частности, на промежутке $[0, R_*]$ этим решением является функция $w = \varepsilon$. Пусть

$$R_{\max} = \sup \mathcal{R},$$

где $\mathcal{R}$ – множество вещественных чисел $R > 0$ таких, что решение задачи (30) существует на промежутке $[0, R)$. Сводя (30) к интегральному уравнению

$$w(r) = \varepsilon + \int_0^r \left(\frac{3}{2}\int_0^\rho p(\xi)h(w/\xi)\,d\xi\right)^{1/3} d\rho, \tag{31}$$

стандартными рассуждениями, например методом сжимающихся отображений, можно показать, что $R_{\max} > R_*$, причём на промежутке $[0, R_{\max})$ решение задачи (30) является единственным. Несложно также показать, что $w \in C^2([0, R_{\max}))$. В самом деле, w – бесконечно гладкая функция на множестве $[0, R_*)$, так как на этом множестве w – константа. В то же время, продифференцировав (31), будем иметь равенства

$$\frac{dw(r)}{dr} = \left(\frac{3}{2}\int_0^r p(\xi)h(w/\xi)\,d\xi\right)^{1/3}, \quad \frac{d^2w(r)}{dr^2} = \frac{1}{2}p(r)h(w/r)\left(\frac{3}{2}\int_0^r p(\xi)h(w/\xi)\,d\xi\right)^{-1/3}$$

для всех $r \in (R_*, R_{\max})$. Поскольку $\int_0^r p(\xi)h(w/\xi)\,d\xi > 0$ для всех $r \in (R_*, R_{\max})$, то функция w дважды непрерывно дифференцируема на множестве $(R_*, R_{\max})$. Согласно (24) справедливо соотношение

$$\int_0^r p(\xi)h(w/\xi)\,d\xi = (r-R_*)^2 e^{-1/(r-R_*)+1} p(R_*+1)h(\varepsilon/R_*) + \bar{\bar{o}}((r-R_*)^2 e^{-1/(r-R_*)+1})$$

при $r \to R_* + 0$, поэтому функция w дважды дифференцируема в точке R_*, причём

$$\frac{dw(R_*)}{dr} = \frac{d^2w(R_*)}{dr^2} = 0.$$

Осталось только заметить, что

$$\lim_{r\to R_*} \frac{dw(r)}{dr} = \lim_{r\to R_*} \frac{d^2w(r)}{dr^2} = 0.$$

Покажем теперь, что
$$R_{\max} < \infty. \tag{32}$$
Предположим противное, пусть решение задачи (30) существует на всём множестве $[0,\infty)$. Положив $(w(r)-\varepsilon)/r = v(r)$ в уравнении (31), получим
$$v(r) = \frac{1}{r}\int\limits_0^r \left(\frac{3}{2}\int\limits_0^\rho p(\xi)h(v+\varepsilon/\xi)\,d\xi\right)^{1/3} d\rho. \tag{33}$$

Продифференцировав (33), будем иметь
$$\frac{dv(r)}{dr} = \frac{1}{r^2}\left(r\varphi(r) - \int\limits_0^r \varphi(\rho)\,d\rho\right) \tag{34}$$
для всех $r > 0$, где
$$\varphi(\rho) = \left(\frac{3}{2}\int\limits_0^\rho p(\xi)h(v+\varepsilon/\xi)\,d\xi\right)^{1/3}. \tag{35}$$

Заметим, что на множестве $[0,R_*]$ функции v и φ тождественно равны нулю. Так как φ монотонно не убывает на промежутке $(0,\infty)$, правая часть формулы (34) неотрицательна, поэтому v – монотонно неубывающая функция на промежутке $[0,\infty)$. Можно также показать, что
$$\lim_{r\to\infty} v(r) = \infty. \tag{36}$$
В самом деле, из условия (27) и положительности функции h следует, что $v(\rho_*) > 0$ для некоторого вещественного числа $\rho_* > R_*$. Таким образом, справедливы соотношения
$$v(r) \geqslant \frac{1}{r}\int\limits_{r/2}^r \left(\frac{3}{2}\int\limits_{\rho_*}^\rho p(\xi)h(v+\varepsilon/\xi)\,d\xi\right)^{1/3} d\rho \geqslant \frac{1}{2}h^{1/3}(v(\rho_*))\left(\frac{3}{2}\int\limits_{\rho_*}^{r/2} p(\xi)\,d\xi\right)^{1/3} \to \infty$$
при $r\to\infty$. Возьмём вещественное число $r_0 > r_*$ такое, что $\varepsilon/r_0 \leqslant 1$, $v(r_0) \geqslant 4$ и
$$rp(r)\Big/\int\limits_{r_*}^r p(\xi)\,d\xi \leqslant 1 \tag{37}$$
для всех $r \geqslant r_0$. Ввиду (36), (26) и (27) такое вещественное число r_0 существует. Положим
$$r_i = \sup\{r \in (r_{i-1}, 2r_{i-1}) : v(r) \leqslant 2v(r_{i-1})\}, \quad i \in \mathbb{N}.$$
Несложно увидеть, что $r_i \to \infty$ при $i \to \infty$. В противном случае имеет место условие (32).

Лемма 6. *Пусть* $v(r_{i+1}) \geqslant 2v(r_{i-1})$ *для некоторого* $i \geqslant 1$, *тогда*
$$\int\limits_{v(r_{i-1})}^{v(r_{i+1})} (h(t)t)^{-1/4}\,dt \geqslant C\int\limits_{r_{i-1}}^{r_{i+1}} p(\xi)\,d\xi\left(\int\limits_{r_*}^{r_{i+1}} p(\xi)\,d\xi\right)^{-3/4}. \tag{38}$$

Доказательство. Согласно (33) справедливо неравенство
$$v(r_{i+1}) \geqslant \frac{h^{1/3}(v(r_{i-1}))}{r_{i+1}}\int\limits_{r_{i-1}}^{r_{i+1}} \left(\frac{3}{2}\int\limits_{r_{i-1}}^\rho p(\xi)\,d\xi\right)^{1/3} d\rho,$$

объединив которое с оценкой

$$\int\limits_{r_{i-1}}^{r_{i+1}}\bigg(\int\limits_{r_{i-1}}^{\rho} p(\xi)\,d\xi\bigg)^{1/3} d\rho \geqslant C\int\limits_{r_{i-1}}^{r_{i+1}}((r_{i+1}-\xi)p(\xi))^{1/3}\,d\xi,$$

вытекающей из леммы 2, получим

$$\frac{v(r_{i+1})}{h^{1/3}(v(r_{i-1}))} \geqslant \frac{C}{r_{i+1}}\int\limits_{r_{i-1}}^{r_{i+1}}((r_{i+1}-\xi)p(\xi))^{1/3}\,d\xi. \tag{39}$$

Применив далее лемму 3, приходим к соотношению

$$\bigg(\int\limits_{r_{i-1}}^{r_{i+1}}((r_{i+1}-\xi)p(\xi))^{1/3}\,d\xi\bigg)^{3/4} \geqslant C\int\limits_{r_{i-1}}^{r_{i+1}}((r_{i+1}-\xi)p(\xi))^{1/3}\varkappa^{-1/4}(\xi)\,d\xi, \tag{40}$$

где

$$\varkappa(\xi) = \int\limits_{\xi}^{r_{i+1}}((r_{i+1}-\zeta)p(\zeta))^{1/3}\,d\zeta.$$

Несложно увидеть, что

$$(r_{i+1}-\xi)^{1/3}\varkappa^{-1/4}(\xi) = \bigg(\frac{1}{(r_{i+1}-\xi)^{4/3}}\int\limits_{\xi}^{r_{i+1}}((r_{i+1}-\zeta)p(\zeta))^{1/3}\,d\zeta\bigg)^{-1/4} \geqslant \bigg(\frac{1}{r_{i+1}-\xi}\int\limits_{\xi}^{r_{i+1}}p^{1/3}(\zeta)\,d\zeta\bigg)^{-1/4}$$

для всех $\xi \in (r_{i-1}, r_{i+1})$. При этом ввиду (37) имеем

$$p^{1/3}(\zeta) \leqslant \zeta^{-1/3}\bigg(\int\limits_{r_*}^{\zeta}p(\rho)\,d\rho\bigg)^{1/3} \leqslant \xi^{-1/3}\bigg(\int\limits_{r_*}^{r_{i+1}}p(\rho)\,d\rho\bigg)^{1/3}$$

для всех $\zeta \in (\xi, r_{i+1})$. Таким образом,

$$(r_{i+1}-\xi)^{1/3}\varkappa^{-1/4}(\xi) \geqslant \xi^{1/12}\bigg(\int\limits_{r_*}^{r_{i+1}}p(\rho)\,d\rho\bigg)^{-1/12}$$

для всех $\xi \in (r_{i-1}, r_{i+1})$ и неравенство (40) позволяет утверждать, что справедлива оценка

$$\bigg(\int\limits_{r_{i-1}}^{r_{i+1}}((r_{i+1}-\xi)p(\xi))^{1/3}\,d\xi\bigg)^{3/4} \geqslant C\int\limits_{r_{i-1}}^{r_{i+1}}\xi^{1/12}p^{1/3}(\xi)\,d\xi\bigg(\int\limits_{r_*}^{r_{i+1}}p(\rho)\,d\rho\bigg)^{-1/12}.$$

Объединив последнее выражение с формулой (39), получим

$$\frac{v^{3/4}(r_{i+1})}{h^{1/4}(v(r_{i-1}))} \geqslant C\int\limits_{r_{i-1}}^{r_{i+1}}\xi^{-2/3}p^{1/3}(\xi)\,d\xi\bigg(\int\limits_{r_*}^{r_{i+1}}p(\rho)\,d\rho\bigg)^{-1/12}. \tag{41}$$

Согласно (37) для всех $\xi \in (r_{i-1}, r_{i+1})$ справедливо соотношение

$$\xi^{-2/3} p^{1/3}(\xi) = (p(\xi)\xi)^{-2/3} p(\xi) \geqslant p(\xi) \biggl(\int\limits_{r_*}^{\xi} p(\rho)\, d\rho \biggr)^{-2/3} \geqslant p(\xi) \biggl(\int\limits_{r_*}^{r_{i+1}} p(\rho)\, d\rho \biggr)^{-2/3},$$

поэтому неравенство (41) приводит к оценке

$$\frac{v^{3/4}(r_{i+1})}{h^{1/4}(v(r_{i-1}))} \geqslant C \int\limits_{r_{i-1}}^{r_{i+1}} p(\xi)\, d\xi \biggl(\int\limits_{r_*}^{r_{i+1}} p(\rho)\, d\rho \biggr)^{-3/4}. \tag{42}$$

Принимая во внимание (22) и тот факт, что $v(r_{i+1}) - v(r_{i-1}) \geqslant v(r_{i+1})/2$, будем иметь

$$\int\limits_{v(r_{i-1})}^{v(r_{i+1})} (h(t)t)^{-1/4}\, dt \geqslant \frac{v(r_{i+1}) - v(r_{i-1})}{(h(v(r_{i+1}))v(r_{i+1}))^{1/4}} \geqslant \frac{v^{3/4}(r_{i+1})}{2h^{1/4}(v(r_{i+1}))} \geqslant \frac{Cv^{3/4}(r_{i+1})}{h^{1/4}(v(r_{i-1}))}.$$

Тем самым (42) влечёт за собой неравенство (38). Лемма доказана.

Лемма 7. *Пусть* $v(r_{i+1}) < 2v(r_{i-1})$ *для некоторого* $i \geqslant 1$, *тогда*

$$\int\limits_{v(r_{i-1})}^{v(r_{i+1})} \frac{dt}{h^{1/3}(t)} \geqslant C \int\limits_{r_{i-1}}^{r_i} p(\xi)\, d\xi \biggl(\int\limits_{r_*}^{r_i} p(\rho)\, d\rho \biggr)^{-2/3}. \tag{43}$$

Доказательство. Из условий леммы, очевидно, следует, что $r_i = 2r_{i-1}$ и $r_{i+1} = 2r_i$. Учитывая (34), получаем

$$v(r_{i+1}) - v(r_{i-1}) = \int\limits_{r_{i-1}}^{r_{i+1}} v'(r)\, dr \geqslant \frac{1}{r_{i+1}^2} \int\limits_{r_{i-1}}^{r_{i+1}} \psi(r)\, dr, \tag{44}$$

где

$$\psi(r) = r\varphi(r) - \int\limits_0^r \varphi(\rho)\, d\rho.$$

Непосредственным дифференцированием можно убедиться в том, что $\psi'(r) = r\varphi'(r) \geqslant 0$ для всех $r > 0$. По формуле Ньютона–Лейбница имеем

$$\psi(r) = \int\limits_0^r \xi\varphi'(\xi)\, d\xi \geqslant \int\limits_{r_{i-1}}^r \xi\varphi'(\xi)\, d\xi$$

для всех $r \in (r_{i-1}, r_{i+1})$, поэтому (44) влечёт за собой оценку

$$v(r_{i+1}) - v(r_{i-1}) \geqslant \frac{1}{r_{i+1}^2} \int\limits_{r_{i-1}}^{r_{i+1}} \int\limits_{r_{i-1}}^{r} \xi\varphi'(\xi)\, d\xi\, dr \geqslant \frac{C}{r_{i+1}} \int\limits_{r_{i-1}}^{r_{i+1}} \int\limits_{r_{i-1}}^{r} \varphi'(\xi)\, d\xi\, dr,$$

объединив которую с элементарным неравенством

$$\int\limits_{r_{i-1}}^{r_{i+1}} \int\limits_{r_{i-1}}^{r} \varphi'(\xi)\, d\xi\, dr \geqslant \int\limits_{r_i}^{r_{i+1}} \int\limits_{r_{i-1}}^{r} \varphi'(\xi)\, d\xi\, dr \geqslant (r_{i+1} - r_i) \int\limits_{r_{i-1}}^{r_i} \varphi'(\xi)\, d\xi,$$

будем иметь

$$v(r_{i+1}) - v(r_{i-1}) \geqslant C \int\limits_{r_{i-1}}^{r_i} \varphi'(\xi)\, d\xi. \tag{45}$$

В то же время, продифференцировав (35), получим

$$\varphi'(\xi) = 2^{-1/3}3^{-2/3}p(\xi)h(v(\xi)+\varepsilon/\xi)\bigg(\int\limits_{r_*}^{\xi} p(\rho)h(v+\varepsilon/\rho)\, d\rho\bigg)^{-2/3} \geqslant$$

$$\geqslant 2^{-1/3}3^{-2/3}p(\xi)\frac{h(v(r_{i-1}))}{h^{2/3}(2v(r_i))}\bigg(\int\limits_{r_*}^{r_i} p(\rho)\, d\rho\bigg)^{-2/3}$$

для всех $\xi \in (r_{i-1}, r_i)$. Так как $h(2v(r_i)) \leqslant Ch(v(r_{i-1}))$ ввиду условия (22), то это позволяет утверждать, что

$$\varphi'(\xi) \geqslant Cp(\xi)h^{1/3}(v(r_{i-1}))\bigg(\int\limits_{r_*}^{r_i} p(\rho)\, d\rho\bigg)^{-2/3}$$

для всех $\xi \in (r_{i-1}, r_i)$. Тем самым формула (45) влечёт за собой оценку

$$\frac{v(r_{i+1}) - v(r_{i-1})}{h^{1/3}(v(r_{i-1}))} \geqslant C \int\limits_{r_{i-1}}^{r_i} p(\xi)\, d\xi \bigg(\int\limits_{r_*}^{r_i} p(\rho)\, d\rho\bigg)^{-2/3},$$

объединение которой с неравенством

$$\int\limits_{v(r_{i-1})}^{v(r_{i+1})} \frac{dt}{h^{1/3}(t)} \geqslant \frac{C(v(r_{i+1}) - v(r_{i-1}))}{h^{1/3}(v(r_{i-1}))}$$

приводит к (43). Лемма доказана.

Для натурального числа m через $\Xi_{1,m}$ обозначим множество целых чисел $1 \leqslant i \leqslant m$, удовлетворяющих условию $v(r_{i+1}) \geqslant 2v(r_{i-1})$. Пусть также $\Xi_{2,m} = \{1, \ldots, m\} \setminus \Xi_{1,m}$.

Ввиду (36) и (27) найдётся натуральное число l такое, что выполняются неравенства $v(r_m) \geqslant 2v(r_0)$ и

$$\int\limits_{r_0}^{r_m} p(\xi)\, d\xi \geqslant \frac{1}{2}\int\limits_{r_*}^{r_m} p(\xi)\, d\xi \tag{46}$$

для всех $m \geqslant l$. Покажем, что справедлива оценка

$$\int\limits_{v(r_0)}^{v(r_{m+1})} (h(t)t)^{-1/4}\, dt \geqslant C\bigg(\int\limits_{r_*}^{r_{m+1}} p(\xi)\, d\xi\bigg)^{1/4} \tag{47}$$

для всех $m \geqslant l$. Предположим сначала, что

$$\sum_{i\in\Xi_{1,m}} \int\limits_{r_{i-1}}^{r_i} p(\xi)\, d\xi \geqslant \frac{1}{2}\int\limits_{r_0}^{r_m} p(\xi)\, d\xi. \tag{48}$$

Тогда, суммируя оценку (38) леммы 6 по всем $i \in \Xi_{1,m}$, будем иметь

$$\int\limits_{v(r_0)}^{v(r_{m+1})} (h(t)t)^{-1/4}\, dt \geqslant C \int\limits_{r_0}^{r_m} p(\xi)\, d\xi \biggl(\int\limits_{r_*}^{r_{m+1}} p(\xi)\, d\xi \biggr)^{-3/4},$$

откуда ввиду (46) и неравенства

$$\int\limits_{r_*}^{r_m} p(\xi)\, d\xi \geqslant C \int\limits_{r_*}^{r_{m+1}} p(\xi)\, d\xi, \tag{49}$$

вытекающего из леммы 4, немедленно следует (47). Предположим теперь, что условие (48) не выполнено. В этом случае очевидно, что

$$\sum_{i \in \Xi_{2,m}} \int\limits_{r_{i-1}}^{r_i} p(\xi)\, d\xi \geqslant \frac{1}{2} \int\limits_{r_0}^{r_m} p(\xi)\, d\xi.$$

Таким образом, суммируя оценку (43) леммы 7 по всем $i \in \Xi_{2,m}$, приходим к соотношению

$$\int\limits_{v(r_0)}^{v(r_{m+1})} \frac{dt}{h^{1/3}(t)} \geqslant C \int\limits_{r_0}^{r_m} p(\xi)\, d\xi \biggl(\int\limits_{r_*}^{r_m} p(\rho)\, d\rho \biggr)^{-2/3},$$

объединив которое с (46) и (49), получим неравенство

$$\int\limits_{v(r_0)}^{v(r_{m+1})} \frac{dt}{h^{1/3}(t)} \geqslant C \biggl(\int\limits_{r_*}^{r_{m+1}} p(\rho)\, d\rho \biggr)^{1/3}. \tag{50}$$

Поскольку h – монотонно неубывающая функция, удовлетворяющая условию (22), лемма 1 позволяет утверждать, что

$$\biggl(\int\limits_{v(r_0)}^{v(r_{m+1})} (h(t)t)^{-1/4}\, dt \biggr)^{4/3} \geqslant C \int\limits_{v(r_0)}^{v(r_{m+1})} \frac{dt}{h^{1/3}(t)}.$$

Объединив последнюю оценку с формулой (50), снова имеем (47).

Переходя в (47) к пределу при $m \to \infty$, получаем противоречие с условиями (16) и (27), что доказывает справедливость условия (32). Заметим, что ввиду (32) справедливо соотношение

$$\lim_{r \to R_{\max} - 0} w(r) = \infty, \tag{51}$$

иначе решение задачи (30) существует на промежутке $(0, R)$ для некоторого $R > R_{\max}$.

Шаг 4. Ниже будем предполагать, что u – неотрицательное решение задачи (1). Нам потребуется принцип сравнения в следующей простой форме.

Лемма 8. *Пусть* $U \in C^2(B_R \bigcap \Omega) \bigcap C(\overline{B_R \bigcap \Omega})$ *– классическое решение неравенства* $\Delta_\infty U \leqslant \mathcal{F}(x, U)$ *в* $B_R \bigcap \Omega$, *неотрицательное на множестве* $B_R \bigcap \Omega$ *и такое, что выполняется условие*

$$U|_{\partial(B_R \bigcap \Omega)} \geqslant u|_{\partial(B_R \bigcap \Omega)}, \tag{52}$$

где $R > 0$ – вещественное число, а $\mathcal{F}$ – некоторая функция, монотонно неубывающая по последнему аргументу, причём имеет место неравенство

$$\mathcal{F}(x,t) < f(x,t) \tag{53}$$

для всех $x \in B_R \bigcap \Omega$ и $t > 0$. Тогда

$$U \geqslant u \quad \text{в} \quad \overline{B_R \bigcap \Omega}. \tag{54}$$

Доказательство. От противного предположим, что $\sup\limits_{\overline{B_R \bigcap \Omega}} (u - U) > 0$. Функция $u - U$ полунепрерывна сверху на множестве $\overline{B_R \bigcap \Omega}$, поэтому существует точка $x \in \overline{B_R \bigcap \Omega}$ такая, что

$$u(x) - U(x) = \sup_{\overline{B_R \bigcap \Omega}} (u - U).$$

Ввиду (52) можно также утверждать, что $x \in B_R \bigcap \Omega$. Тем самым имеют место соотношения

$$u(y) - u(x) \leqslant U(y) - U(x) = \langle DU(x), y - x\rangle + \frac{1}{2}\langle D^2U(x)(y - x), y - x\rangle + \bar{\bar{o}}(|y - x|^2)$$

для всех y из некоторой окрестности точки x, где $DU(x)$ – градиент, а $D^2U(x)$ – матрица вторых производных функции U в точке x, откуда следует, что $(DU(x), D^2U(x)) \in J^{2,+}_{\Omega} u(x)$. Подставив $v = DU(x)$ и $A = D^2U(x)$ в (4), будем иметь

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 U(x)}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial U(x)}{\partial x_i} \frac{\partial U(x)}{\partial x_j} \geqslant f(x, u(x)) > \mathcal{F}(x, u(x)).$$

Таким образом, принимая во внимание неравенства

$$\mathcal{F}(x, u(x)) \geqslant \mathcal{F}(x, U(x)) \geqslant \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 U(x)}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial U(x)}{\partial x_i} \frac{\partial U(x)}{\partial x_j},$$

приходим к заключению, что

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 U(x)}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial U(x)}{\partial x_i} \frac{\partial U(x)}{\partial x_j} > \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 U(x)}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial U(x)}{\partial x_i} \frac{\partial U(x)}{\partial x_j}.$$

Полученное противоречие доказывает лемму.

3. Доказательство теоремы и следствия. Согласно задаче (30) шага 3 в п. 2 функция $U(x) = w(|x|)$ является классическим решением уравнения $\Delta_\infty U = \mathcal{F}(x, U)$ в $B_{R_{\max}}$, положительным в шаре $B_{R_{\max}}$, где

$$\mathcal{F}(x,t) = \begin{cases} 2^{-1} p(|x|) h(t/|x|), & R_* < |x| < R_{\max}, \quad t > 0, \\ 0, & |x| \leqslant R_*, \quad t > 0. \end{cases}$$

Так как решение задачи (1) полунепрерывно сверху на $\overline{\Omega}$, функция u ограничена на замыкании множества $B_{R_{\max}} \bigcap \Omega$, поэтому в силу (51) найдётся вещественное число $R \in (R_*, R_{\max})$, для которого выполнено неравенство (52). Принимая во внимание (2) и (25), можно также утверждать, что имеет место (53). Тем самым по лемме 8 справедливо соотношение (54), откуда, в свою очередь, следует, что $u|_{B_{R_*} \bigcap \Omega} \leqslant \varepsilon$. Поскольку $\varepsilon > 0$ можно сделать сколь угодно малым, а $R_* > r_*$ – сколь угодно большим, очевидно, получим, что $u(x) = 0$ для всех $x \in \Omega$. Теорема доказана.

Для доказательства следствия возьмём $f(x,t) = c(|x|)t^\lambda$, $g(t) = t^\lambda$, $q(r) = 4^{-\lambda}r^\lambda c(r/2)$, $\sigma = \theta = 2$ в соотношении (3) и воспользуемся теоремой.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 20-11-20272), а также при поддержке Российского университета дружбы народов (программа стратегического академического лидерства).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Crandall M.G., Ishii H., Lions P.-L.* User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations // Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.). 1992. V. 27. P. 1–67.
2. *Lu G., Wang P.* Inhomogeneous infinity Laplace equation // Adv. Math. 2008. V. 217. P. 1838–1868.
3. *Асташова И.В.* Единственность решений уравнений второго порядка типа Эмдена–Фаулера // Проблемы мат. анализа. 2021. Т. 109. С. 11–16.
4. *Асташова И.В.* Об асимптотическом поведении сингулярных решений уравнений типа Эмдена–Фаулера // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 5. С. 597–606.
5. *Astashova I.V.* On asymptotic behavior of blow-up solutions to higher-order differential equations with general nonlinearity // Differential and Difference Equations with Applications. ICDDEA 2017. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics / Eds. S. Pinelas, T. Caraballo, P. Kloeden, J. Graef. Cham, 2018. V. 230 P. 1–12.
6. *Baras P., Pierre M.* Singularités éliminables pour des équations semilinéaires // Ann. Inst. Fourier. 1984. V. 34. P. 185–205.
7. *Галахов Е.И.* Разрешимость эллиптического уравнения с градиентной нелинейностью // Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41. № 5. С. 661–669.
8. *Galakhov E.I.* Some nonexistence results for quasilinear elliptic problems // J. Math. Anal. Appl. 2000. V. 252. № 1. P. 256–277.
9. *Галахов Е.И., Салиева О.А., Фино А.З.* Отсутствие глобальных слабых решений для эволюционных уравнений с дробным лапласианом // Мат. заметки. 2020. Т. 108. Вып. 6. С. 911–919.
10. *Keller J.B.* On solutions of $\Delta u = f(u)$ // Comm. Pure Appl. Math. 1957. V. 10. P. 503–510.
11. *Кондратьев В.А., Ландис Е.М.* О качественных свойствах решений одного нелинейного уравнения второго порядка // Мат. сб. 1988. V. 135 (177). № 3. С. 346–360.
12. *Kon'kov A.A.* On global solutions of the radial p-Laplace equation // Nonlin. Anal. 2009. V. 70. P. 3437–3451.
13. *Коньков А.А.* О решениях неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений // Изв. РАН. Сер. Мат. 2001. Т. 65. № 2. С. 81–126.
14. *Коньков А.А.* О свойствах решений одного класса нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Тр. семинара имени И.Г. Петровского. 2007. Т. 26. С. 195–222.
15. *Корпусов М.О., Матвеева А.К.* О критических показателях для слабых решений задачи Коши для одного нелинейного уравнения составного типа // Изв. РАН. Сер. мат. 2021. Т. 85. № 4. С. 96–136.
16. *Корпусов М.О., Панин А.А.* О непродолжаемом решении и разрушении решения одномерного уравнения ионно-звуковых волн в плазме // Мат. заметки. 2017. Т. 102. Вып. 3. С. 383–395.
17. *Корпусов М.О., Шафир Р.С.* О разрушении решений задач Коши для нелинейных уравнений теории сегнетоэлектричества // Журн. теор. и мат. физики. 2022. Т. 212. № 3. С. 327–339.
18. *Митидиери Э., Похожаев С.И.* Априорные оценки и отсутствие решений нелинейных уравнений и неравенств в частных производных // Тр. Мат. ин-та имени В.А. Стеклова. 2001. Т. 234. С. 3–383.
19. *Osserman R.* On the inequality $\Delta u \geqslant f(u)$ // Pacific J. Math. 1957. V. 7. P. 1641–1647.
20. *Mi L.* Blow-up rates of large solutions for infinity Laplace equations // Appl. Math. Comp. 2017. V. 298. P. 36–44.
21. *Mohammed A., Mohammed S.* Boundary blow-up solutions to degenerate elliptic equations with non-monotone inhomogeneous terms // Nonlin. Anal. 2012. V. 75. P. 3249–3261.
22. *Wan H.* The exact asymptotic behavior of boundary blow-up solutions to infinity Laplacian equations // Z. Angew. Math. Phys. 2016. V. 67. № 97. P. 1–14.

Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова,
Российский университет дружбы народов,
г. Москва

Поступила в редакцию 12.10.2022 г.
После доработки 12.10.2022 г.
Принята к публикации 22.12.2022 г.