ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 2, с. 252–256

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 517.977.1

КРИТЕРИЙ УСТОЙЧИВОСТИ И ТОЧНЫЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ АЛГОРИТМА "СУПЕР-СКРУЧИВАНИЯ"

© 2023 г. В. В. Фомичев, А. О. Высоцкий

Для алгоритма "супер-скручивания" приводится новый способ доказательства необходимых и достаточных условий глобальной асимптотической устойчивости. Новый метод основывается на получении полного аналитического решения системы для "наихудшего" возмущения и позволяет получить критерий в более простой, полностью вещественной форме, а также найти оценки для наихудшей (мажорирующей) траектории.

DOI: 10.31857/S0374064123020103, EDN: PVEYXZ

Введение. Задачи управления для динамических систем в условиях неопределённости, т.е. при наличии у системы неизвестных входных воздействий, занимают важное место в современной теории управления. Данной проблематике посвящены, в частности, монографии [1, 2]. Одной из основных задач управления для систем с неопределённостью является задача стабилизации. Популярными алгоритмами для решения этой задачи являются методы систем с переменной структурой, теория которых развивается ещё с середины 60-х гг. прошлого века [1, 3]. Среди используемых алгоритмов свою эффективность доказали алгоритм скручивания [4] и алгоритм "супер-скручивания" [5, 6]. Для последнего в работе [6] было доказано существование параметров, при которых данный алгоритм управления является алгоритмом скольжения второго порядка, что означает существование устойчивого скользящего режима второго порядка. Это, в свою очередь, означало существование параметров алгоритма, обеспечивающих устойчивость замкнутой системы управления.

В дальнейшем с помощью метода функций Ляпунова были получены алгебраические достаточные условия для параметров системы, выполнение которых обеспечивает устойчивость системы (см. [7, 8]). Кроме того, в статьях [9, 10] была проанализирована система алгоритма "супер-скручивания" с "наихудшим" входным воздействием. Такой подход позволил получить в [9] необходимые и достаточные условия на параметры алгоритма, обеспечивающие сходимость системы к началу координат, однако аналитически не было найдено полное решение системы с "наихудшим" входным воздействием, а определены только координаты его пересечения с одной из координатных осей. Цель настоящей работы – найти альтернативный способ доказательства необходимого и достаточного условия, основанного на получении полного аналитического решения системы с "наихудшим" входным воздействием. Данный алгебраический критерий не требует выполнения операций над комплексными числами, что делает его менее сложным.

1. Постановка задачи. Рассматривается система алгоритма "супер-скручивания" [5]

$$\dot{x}_1 = x_2 - k\,\mathrm{sgn}\,(x_1)|x_1|^{1/2}, \quad \dot{x}_2 = \xi - \mu\,\mathrm{sgn}\,(x_1), \tag{1}$$

где ξ – неизвестный измеримый ограниченный сигнал, $|\xi| \leqslant \xi_0$.

Требуется получить аналитическое решение системы (1) с "наихудшей" помехой и новый полностью вещественнозначный вид необходимых и достаточных условий сходимости системы (1) к началу координат при любом возмущении $\xi(t)$ из рассматриваемого класса.

2. Фазовые траектории. Заметим, что система (1) центрально симметрична относительно начала координат (т.е. семейство траекторий системы при всевозможных $\xi(t)$ из рассматриваемого класса симметрично), поэтому все последующие рассуждения будем проводить для правой полуплоскости, т.е. при $x_1 \geqslant 0$.

Рассмотрим первую четверть координатной плоскости. Заметим, что траектория системы (1) при $x_2 > 0$ не может перейти во вторую четверть из первой, так как в малой окрестности оси $x_1 = 0$ при $x_2 > 0$, например в области $kx_1^{1/2} < x_2$, имеет место неравенство $\dot{x}_1 > 0$. Значит, поскольку всюду в правой полуплоскости выполняются соотношения $\dot{x}_2 \leqslant -\mu+\xi_0 < 0$, траектория системы (1) из первой четверти может либо перейти в четвёртую, либо сойтись к началу координат. Из четвёртой же четверти, поскольку $\dot{x}_1 \leqslant x_2 < 0$, $\dot{x}_2 \leqslant -\mu + \xi_0 < 0$, система (1) может перейти только в третью четверть.

3. Наихудшее возмущение. Заметим, что траектории системы (1) с произвольными ξ будут ограничены траекторией системы (1) с $\xi = \xi_0 \operatorname{sgn}(\dot{x}_1)$. Действительно, в области, где x_1 возрастает, траектории систем вида (1) будут ограничены траекторией системы с наибольшим $\dot{x}_2$, т.е. с $\xi = \xi_0$. В области же, где x_1 убывает, ограничивающей будет система с наименьшим $\dot{x}_2$, т.е. с $\xi = -\xi_0$. В силу того, что траектории системы с наихудшим ξ ограничивают траектории системы с любым другим $\xi(t)$, а также приведённых выше рассуждений о фазовом портрете системы, для глобальной асимптотической устойчивости системы (1) необходима и достаточна асимптотическая устойчивость системы

$$\dot{x}_1 = x_2 - k \operatorname{sgn}(x_1)|x_1|^{1/2}, \quad \dot{x}_2 = \xi_0 \operatorname{sgn}(\dot{x}_1) - \mu \operatorname{sgn}(x_1). \tag{2}$$

Всюду далее будем рассматривать систему (2) в правой полуплоскости.

Начнём рассмотрение с области $x_2 > kx_1^{1/2}$, т.е. при $\dot{x}_1 > 0$ (область (a) на рисунке). Положим начальные условия равными $(0, x_2^0)$. Решив второе уравнение системы (2) $\dot{x}_2 = \xi_0 - \mu$ и сделав замену переменной $z = \sqrt{x_1}$, получим

$$\dot{z} = \frac{a - bt}{2z} - \frac{k}{2}, \tag{3}$$

где $a = x_2^0$, $b = \mu - \xi_0$.

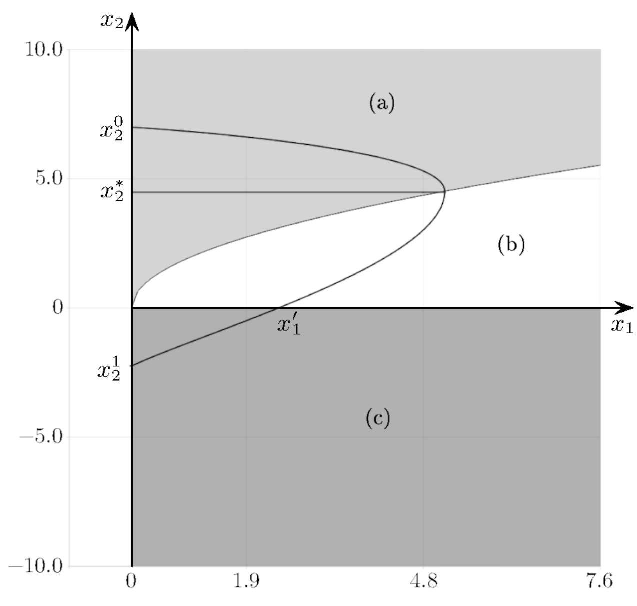

Рисунок. Рассматриваемые области полуплоскости.

С помощью замены переменной времени $\tau = t - a/b$ получим равенство

$$\frac{dz}{d\tau} = \frac{-b\tau}{2z} - \frac{k}{2}.$$

Будем искать z в виде $z(\tau) = \tau u(\tau)$. В результате имеем соотношения

$$\frac{d\tau}{\tau} = -\left(u^2 + \frac{k}{2}u + \frac{b}{2}\right)^{-1} u\,du = -\left(\left(u + \frac{k}{4}\right)^2 - \frac{k^2}{16} + \frac{b}{2}\right)^{-1} u\,du. \tag{4}$$

Рассмотрим сначала случай, когда $k^2 < 8b$, т.е. когда знаменатель правой части уравнения (4) всюду положителен. Проинтегрировав правую и левую части уравнения, находим

$$C = \frac{1}{2}\ln\left(z^2 + \frac{k}{2}z\tau + \frac{b}{2}\tau^2\right) - \frac{k}{\sqrt{8b-k^2}}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{4u+k}{\sqrt{8b-k^2}}\right). \tag{5}$$

Начальные условия имеют вид $t_0 = 0$, $z(t_0) = 0$, т.е. $\tau_0 = -a/b$, $u(\tau_0) = 0$. Условие достижения границы области есть равенство $\dot{z} = 0$, т.е. $kz = a - bt$, а значит, $u = -b/k$. Подставив начальные и конечные условия, получим

$$x_2' = \frac{ak}{\sqrt{2b}}\exp\left\{\frac{-k}{\sqrt{8b-k^2}}\left(\mathrm{arctg}\,\frac{k}{\sqrt{8b-k^2}} + \mathrm{arctg}\,\frac{4b-k^2}{k\sqrt{8b-k^2}}\right)\right\},$$

где x_2' – координата по оси x_2 точки выхода системы (2) при $k^2 < 8(\mu-\xi_0)$ из области $\dot{x_1} > 0$ (из области (a) в (b) на рисунке).

Теперь рассмотрим случай, когда $k^2 > 8b$, т.е. когда у знаменателя правой части (4) есть корни

$$u_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2-8b}}{4}.$$

При этом в области (a) $\dot{x}_1 > 0$, т.е. $a - bt > kz$, а значит $-b/k < u < 0$. Заметим, что

$$\frac{k-\sqrt{k^2-8b}}{4} > \frac{b}{k},$$

тогда выражение $u - u_{1,2}$ положительно всюду в области. Уравнение (4) преобразуется к виду

$$-\frac{d\tau}{\tau} = \frac{A\,du}{u-u_1} + \frac{B\,du}{u-u_2},$$

где $A = \dfrac{u_1}{u_1-u_2}$, $B = \dfrac{-u_2}{u_1-u_2}$. Проинтегрировав левую и правую части уравнения, имеем

$$C - \ln(-\tau) = A\ln(u-u_1) + B\ln(u-u_2).$$

Подставив начальные и конечные условия такие же, как и в случае $k^2 < 8b$, найдём

$$x_2'' = \frac{-kau_1}{-b-ku_1}\left(\frac{u_2(b+ku_1)}{u_1(b+ku_2)}\right)^B,$$

где x_2'' – координата точки выхода системы (2) при $k^2 \geqslant 8(\mu-\xi_0)$ из области $\dot{x_1} > 0$ (из области (a) в область (b) на рисунке).

Перейдём к рассмотрению области $x_2 < kx_1^{1/2}$. Заметим, что система (2) приводится в этой области к виду (3), где $b = \mu + \xi_0$, $a = x_2^*$ (т.е. x_2' либо x_2'', в зависимости от выбора параметров) – координата перехода системы в эту область ((b) на рисунке). Это означает, что если $k^2 < 8(\mu+\xi_0)$, $\tau < 0$, то для решения будет выполнено уравнение (5). Начальные условия для рассмотрения системы в этой области положим следующие: $t = 0$, $kz = a$, т.е. $u = -b/k$. Подставив их, получим значение

$$C = \ln\left(\frac{a}{k}\right) - \frac{k}{\sqrt{8b-k^2}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{-4b+k^2}{k\sqrt{8b-k^2}}.$$

Перейдём в уравнении (5) к пределу при $\tau \to 0-0$ и получим

$$z_1 = \frac{a}{k}\exp\left\{\frac{k}{\sqrt{8b-k^2}}\left(-\frac{\pi}{2} + \mathrm{arctg}\,\frac{-4b+k^2}{k\sqrt{8b-k^2}}\right)\right\}, \tag{6}$$

где $z_1 = \sqrt{x_1'}$, x_1' – координата перехода системы (2) в четвёртую четверть координатной плоскости (из области (b) в область (c) на рисунке). Заметим, что если $8b > k^2$, то $z_1 > 0$.

В четвёртой четверти (область (c) на рисунке) для системы также будет выполнено уравнение (4). Проинтегрировав его, имеем

$$C = \frac{1}{2}\ln\left(z^2 + \frac{k}{2}z\tau + \frac{b}{2}\tau^2\right) - \frac{k}{\sqrt{8b-k^2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{4u+k}{\sqrt{8b-k^2}}\right).$$

Перейдём к пределу при $\tau \to 0+0$ и подставим конечное условие $u = 0$, соответствующее точке перехода в третью четверть. В результате найдём

$$|x_2^1| = z_1\sqrt{2b}\exp\left\{\frac{k}{\sqrt{8b-k^2}}\left(-\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}\frac{k}{\sqrt{8b-k^2}}\right)\right\}, \tag{7}$$

где x_2^1 – координата перехода системы (2) в третью четверть координатной плоскости.

Объединив (6) и (7), находим

$$|x_2^1| = \frac{x_2^*\sqrt{2(\mu+\xi_0)}}{k^2}\exp\left\{\left(-k\pi + k\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{8(\mu+\xi_0)-k^2}}{k}\right)\Big/\sqrt{8(\mu+\xi_0)-k^2}\right\}. \tag{8}$$

Заметим, что при $k^2 \to 8(\mu+\xi_0)-0$ имеет место $|x_2^1| \to 0$. Из того факта, что траектории системы (2) с большими k ограничивают траектории системы с меньшими значениями, а также из приведённых рассуждений о фазовых траекториях системы следует, что при $k^2 \geqslant 8(\mu+\xi_0)$ траектория системы (2) будет сходиться к началу координат в первой четверти координатной плоскости.

Подставив x_2' или x_2'' вместо x_2^* в уравнение (8), получим, что при $k^2 < 8(\mu-\xi_0)$ выполняется равенство

$$\frac{|x_2^1|}{x_2^0} = \sqrt{\frac{\mu+\xi_0}{\mu-\xi_0}}\exp\left\{\left(-k\pi + k\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{8(\mu+\xi_0)-k^2}}{k}\right)\Big/\sqrt{8(\mu+\xi_0)-k^2} - \right.$$

$$\left. - k\left(\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{8(\mu-\xi_0)-k^2}}{k}\right)\Big/\sqrt{8(\mu-\xi_0)-k^2}\right\} = \nu_1(\mu,\xi_0,k),$$

а при $8(\mu-\xi_0) \leqslant k^2 < 8(\mu+\xi_0)$ – равенство

$$\frac{|x_2^1|}{x_2^0} = \sqrt{\frac{2u_1(\mu+\xi_0)}{ku_1+(\mu-\xi_0)}}\left(\frac{u_2(ku_1+(\mu-\xi_0)}{u_1(ku_2+(\mu-\xi_0)}\right)^B \times$$

$$\times\exp\left\{\left(-k\pi + k\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{8(\mu+\xi_0)-k^2}}{k}\right)\Big/\sqrt{8(\mu+\xi_0)-k^2}\right\} = \nu_2(\mu,\xi_0,k).$$

Таким образом, получено необходимое и достаточное условие асимптотической устойчивости системы (2), а значит, доказана

Теорема. *Система (1) с ограниченным входным сигналом $|\xi| \leqslant \xi_0$ глобально асимптотически устойчива тогда и только тогда, когда выполняется неравенство*

$$\nu(\mu,\xi_0,k) < 1,$$

где

$$\nu = \begin{cases} \nu_1, & 0 < k < \sqrt{8(\mu-\xi_0)}, \\ \nu_2, & \sqrt{8(\mu-\xi_0)} \leqslant k < \sqrt{8(\mu+\xi_0)}, \\ 0, & k \geqslant \sqrt{8(\mu+\xi_0)}. \end{cases}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 22-21-00288).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Емельянов С.В., Коровин С.К.* Новые типы обратной связи. Управление при неопределённости. М., 1997.
2. *Fridman L., Shtessel Yu., Edwards Ch., Levant A.* Sliding Mode Control and Observation. New York, 2014.
3. *Емельянов С.В.* Системы автоматического управления с переменной структурой. М., 1967.
4. *Емельянов С.В., Коровин С.К., Левантовский Л.В.* Скользящие режимы высших порядков в бинарных системах управления // Докл. АН СССР. 1986. Т. 287. № 6. С. 1338–1342.
5. *Емельянов С.В., Коровин С.К., Левантовский Л.В.* Новый класс алгоритмов скольжения второго порядка // Мат. моделирование. 1990. Т. 2. № 3. С. 89–100.
6. *Levant A.* Sliding order and sliding accuracy in sliding mode control // Int. J. of Control. 1993. V. 58. P. 1247–1263.
7. *Moreno J., Osorio M.* Strict Lyapounov functions for the super-twisting algorithm // IEEE Trans. on Automat. Control. 2012. V. 57. P. 1035–1040.
8. *Seeber R., Horn M.* Stability proof for a well-established super-twisting parameter setting // Automatica. 2017. V. 84. P. 241–243.
9. *Seeber R., Horn M.* Necessary and sufficient stability criterion for the super-twisting algorithm // 15th Intern. Workshop on Variable Structure Systems (VSS). 2018. P. 120–125.
10. *Фомичев В.В., Высоцкий А.О.* Алгоритм построения каскадного асимптотического наблюдателя для системы с максимальным относительным порядком // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 4. С. 567–573.

Электротехнический университет,
г. Ханчжоу, Китай,
Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова,
Федеральный исследовательский центр
“Информатика и управление” РАН, г. Москва

Поступила в редакцию 02.12.2022 г.
После доработки 02.12.2022 г.
Принята к публикации 22.12.2022 г.