ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 2, с. 257–269

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 517.977.1+517.957+517.988

О ТОЧНОЙ УПРАВЛЯЕМОСТИ ПОЛУЛИНЕЙНОГО ЭВОЛЮЦИОННОГО УРАВНЕНИЯ С НЕОГРАНИЧЕННЫМ ОПЕРАТОРОМ

© 2023 г. А. В. Чернов

Для задачи Коши, связанной с управляемым полулинейным эволюционным уравнением с неограниченным максимальным монотонным оператором в гильбертовом пространстве, получены достаточные условия точной управляемости в заданное конечное состояние. При этом использованы обобщение теоремы Минти–Браудера и результаты о тотально глобальной разрешимости данного уравнения, полученные автором ранее. В качестве примера рассматривается полулинейное волновое уравнение.

DOI: 10.31857/S0374064123020115, EDN: PVQFXY

Введение. На сегодняшний день различным вопросам теории управляемости линейных систем (как сосредоточенных, так и распределённых) посвящена достаточно обширная литература (см., например, [1, § 4.9; 2–5; 6, § 8.10; 7, гл. 5; 8] и библиографию в них). Для случая нелинейных распределённых систем достаточные условия управляемости носили зачастую локальный характер (см., например, [9; 10; 11, гл. 7; 12]). Проблема управляемости нелинейных распределённых систем стала активно изучаться с конца прошлого века, см. обзор [13] по абстрактным уравнениям в банаховом пространстве, а также работы [14–16] и монографию [17], касающиеся главным образом эволюционных уравнений второго порядка того или иного конкретного вида. При этом исследуемые задачи управляемости в последнее время концентрировались, как правило, вокруг задач граничного управления или случая, когда распределённое управление сосредоточено на части области.

В статье [18] были получены достаточные условия поточечной управляемости по вектору нелинейных функционалов для нелинейных распределённых систем, допускающих представление в виде вольтеррова функционально-операторного уравнения типа Гаммерштейна в лебеговом пространстве. Управления предполагались кусочно-постоянными вектор-функциями. В качестве примеров рассматривались первая краевая задача для уравнения диффузии и смешанная задача для уравнения переноса.

Проблема получения нелокальных достаточных условий точной управляемости распределённых систем представляется в известной степени актуальной. По этой теме имеет смысл выделить, например, следующие результаты, наиболее близкие к полученным в данной статье.

В работе [19] рассматривалась нелинейная интегро-дифференциальная система вида

$$x'(t)+Ax(t)=(Bu)(t)+f(t,x(t))+\int_0^t g\Big(t,s,x(s),\int_0^s K(s,\tau,x(\tau))\,d\tau\Big)\,ds,\quad t\in J=[0,a],$$

$$x(0)=x_0$$

в банаховом пространстве X с управлением $u\in L_2(J,U)$, U – банахово пространство; A – линейный оператор, генератор компактной полугруппы $T(t)$, $t>0$, на X, $B:U\to X$ – линейный ограниченный оператор. Все нелинейные операторы правой части непрерывны и равномерно ограничены (откуда следует существование слабого решения). Точная нелокальная управляемость устанавливается при условии точной управляемости линейной системы

$$x'(t)=Ax(t)+Bu(t),\quad x(0)=x_0$$

на подпространство V. Аналогичный результат был получен и для полулинейной системы соболевского типа

$$(Kx'(t)) + Ax(t) = Bu(t) + f(t, x(t)), \quad t \in J, \quad x(0) = x_0,$$

а также её обобщений на интегро-дифференциальный случай (см. [13, § 3]).

В [20] установлены достаточные условия точной управляемости в нуль для некоторых классов абстрактного эволюционного уравнения вида

$$x'(t) = Ax(t) + Bu(t) + f(x(t)), \quad x(0) = x_0$$

в сепарабельном гильбертовом пространстве X, с управлением $u \in L_2(0, T; U)$, U – гильбертово пространство; $f : X \to X$; A – инфинитезимальный генератор сильно непрерывной полугруппы; $B : U \to X$ – линейный ограниченный оператор. Функция f предполагается непрерывно дифференцируемой по Фреше с равномерно ограниченной производной. Полученные абстрактные результаты применяются к уравнению теплопроводности. Точная управляемость в нуль доказывается при условии точной нуль-управляемости и равномерной наблюдаемости соответствующей линеаризованной системы.

В статье [21] рассматривается абстрактное дифференциальное уравнение второго порядка

$$y'' + Ay(t) = g(y(t)) + Bu(t), \quad t \in [0, T], \quad y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_1$$

в гильбертовом пространстве H; A – положительно определённый, самосопряжённый оператор с областью определения $D(A) \subset H$; $B : U \to H$ – линейный ограниченный оператор, U – гильбертово пространство. Кроме того, накладываются специальные условия относительно гельфандовой тройки оператора A. Предполагается, что функция $g : H \to H$ непрерывно дифференцируема по Фреше, причём производная удовлетворяет некоторым специальным условиям [21, формулы $(H5)$, $(H5)'$], и накладывается специальное условие [21, формула $(H6)$] на финальное время T (грубо говоря, оно должно быть достаточно велико). Полученные абстрактные результаты применяются к полулинейному волновому уравнению

$$y'' - \Delta y = g(y) + \chi_\omega(x)u(t, x), \quad (t, x) \in Q = (0, T) \times \Omega,$$

$$y(\cdot, x) = 0, \quad x \in \partial\Omega,$$

$$y(0, x) = y_0(x), \quad y'(0, x) = y_1(x), \quad x \in \Omega,$$

где $\omega \subset \Omega$ – подобласть области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$; $g \in \mathbf{C}^1(\mathbb{R})$, $g' \in L_\infty(\mathbb{R})$; $T \geqslant 2 \dim \Omega$ (см. [21, теорема 4.1]).

Отдельно отметим работу [22], в которой была установлена точная управляемость полулинейного уравнения теплопроводности с нелинейностью, удовлетворяющей глобальному условию Липшица, при условии достаточной малости промежутка времени. Управляемость доказывалась с помощью классической теоремы Минти–Браудера о разрешимости операторного уравнения первого рода с монотонным хеминепрерывным оператором, удовлетворяющим условию коэрцитивности. В данной статье рассмотрен случай абстрактного полулинейного эволюционного уравнения в гильбертовом пространстве с максимальным монотонным оператором и нелинейностью, удовлетворяющей локальному условию Липшица. Получены достаточные условия точной управляемости, в некотором смысле аналогичные условиям в [22], при этом использовано обобщение теоремы Минти–Браудера, полученное в статье [23]. В качестве примера приведено полулинейное волновое уравнение.

1. Предварительные построения и соглашения. Пусть X – вещественное гильбертово пространство со скалярным произведением $[\cdot, \cdot]_X$, $G : X \to X$ – инфинитезимальный генератор (производящий оператор) сильно непрерывной полугруппы $S(t)$, $t \in [0, T]$, с областью определения $D(G) \subset X$, $z \in Z = L_2([0, T]; X)$, $x_0 \in X$. Следуя [1, § 4.8], рассмотрим задачу Коши для эволюционного уравнения (абстрактного дифференциального уравнения в пространстве X)

$$x'(t) = Gx(t) + z(t), \quad t \in [0, T], \quad x(0) = x_0. \tag{1}$$

Справедливы следующие утверждения.

Лемма 1.1 [1, теорема 4.8.3]. *Для любых* $z \in Z$ *и* $x_0 \in X$ *существует единственная функция* $x : [0,T] \to X$ *такая, что для всех* $y \in D(G^*)$ *функция* $[x(t), y]_X$ *абсолютно непрерывна на* $[0,T]$, *и имеют место равенства*

$$\frac{d}{dt}[x(t), y]_X = [x(t), G^*y]_X + [z(t), y]_X$$

$$\text{для п.в.} \quad t \in [0,T], \qquad \lim_{t \to +0}[x(t), y]_X = [x_0, y] \quad \text{для любого} \quad y \in D(G^*).$$

Более того, справедлива формула

$$x(t) = S(t)x_0 + \int\limits_0^t S(t-s)z(s)\,ds, \quad t \in [0,T]. \tag{2}$$

Лемма 1.2 [1, следствие 4.8.1]. *Для любых* $z \in Z$, $x_0 \in X$ *существует единственная слабо непрерывная функция* $x : [0,T] \to X$ *такая, что для всех* $y \in D(G^*)$ *имеем*

$$[x(t), y]_X = [x_0, y]_X + \int\limits_0^t [x(s), G^*y]_X\,ds + \int\limits_0^t [z(s), y]_X\,ds$$

и, более того, эта функция представляется формулой (2).

Напомним (см., например, [24, гл. III, с. 72; 25, с. 96]), что функция $x : [0,T] \to X$ (для, вообще говоря, линейного нормированного пространства X) называется *слабо непрерывной* (иногда говорят *деминепрерывной*), если для любого $y \in X^*$ функция $y[x(t)]$ непрерывна на отрезке $[0,T]$. Множество всех слабо непрерывных функций $x : [0,T] \to X$ будем обозначать $\mathbb{C}_w([0,T]; X)$. Для дальнейшего изложения важно, что норма $\|x(t)\|_X$ всякой функции $x \in \mathbb{C}_w([0,T]; X)$ ограничена на $[0,T]$. С другой стороны (см., например, [26, гл. IV, теорема 1.9, с. 154]), всякая функция $x \in \mathbb{C}_w([0,T]; X)$ интегрируема по Бохнеру, следовательно, измерима по Бохнеру. Стало быть, имеет место включение $\mathbb{C}_w([0,T]; X) \subset L_\infty([0,T]; X)$.

Функцию $x(t)$, существование и единственность которой во множестве $\mathbb{C}_w([0,T]; X)$ утверждается в леммах 1.1, 1.2, будем называть *слабым решением* задачи (1).

Далее будем предполагать, что оператор G удовлетворяет следующему условию.

Условие G. Оператор $B = -G$ является максимальным монотонным, т.е. $[Bx, x]_X \geqslant 0$ для всех $x \in D(B) = D(G)$ (монотонность), и множество значений $\{(I+B)[x] : x \in D(G)\} = X$ (максимальность).

Замечание 1.1. Пусть G – произвольный линейный оператор, удовлетворяющий условию G. Тогда по теореме Хилле–Иосиды (см. [27, теорема 7.4, с. 185]) для любого $x_0 \in D(G)$ существует единственное решение $x \in \mathbb{C}^1([0,+\infty); X) \bigcap \mathbb{C}([0,+\infty); D(G))$ задачи Коши

$$\frac{dx}{dt} - Gx = 0, \quad x(0) = x_0,$$

причём $\|x(t)\|_X \leqslant \|x_0\|_X$, $\|dx/dt\|_X = \|Gx(t)\|_X \leqslant \|Gx_0\|_X$ для всех $t \geqslant 0$. Тем самым (см. [27, замечание 5, с. 190] для любого $t \geqslant 0$ определён линейный оператор $D(G) \ni x_0 \to x(t) \in D(G)$. Более того, так как область определения максимального монотонного оператора $D(-G) = D(G)$ плотна в X [27, предложение 7.1, с. 181], $\|x(t)\|_X \leqslant \|x_0\|_X$, то указанный линейный оператор можно продолжить по непрерывности до линейного ограниченного оператора $S_G(t) : X \to X$. Как указано в работе [27, замечание 5, с. 190], легко проверить, что $S_G(t)$ обладает следующими свойствами:

(a) $\|S_G(t)\| \leqslant 1$ для всех $t \geqslant 0$;

(b) $S_G(t_1 + t_2) = S_G(t_1)S_G(t_2)$ для всех $t_1, t_2 \geqslant 0$, $S_G(0) = I$;

(c) $\lim\limits_{t \to +0} \|S_G(t)x_0 - x_0\|_X = 0$ для всех $x_0 \in X$.

Свойство (b) означает, что семейство $\{S_G(t), t \geqslant 0\}$ является полугруппой, свойство (c) – что эта полугруппа сильно непрерывна и, таким образом, оператор G автоматически является инфинитезимальным генератором сильно непрерывной полугруппы $S(t) = S_G(t)$. Свойство (a) означает, что имеем полугруппу сжатий. В обратную сторону, если задана сильно непрерывная полугруппа сжатий на X, то существует единственный оператор G, удовлетворяющий условию G и такой, что $S(t) = S_G(t)$ для всех $t \geqslant 0$. В силу сказанного выше справедливо следующее утверждение.

Лемма 1.3. *Пусть выполнено условие* G *и*

$$A[z](t) = \int\limits_0^t S(t-s)z(s)\,ds, \quad t \in [0,T],$$

– слабое решение задачи (1) при $x_0 = 0$, $z \in Z$. *Тогда для п.в.* $t \in [0,T]$ *справедлива оценка*

$$\|A[z](t)\|_X \leqslant \int\limits_0^t \|z(s)\|_X\,ds.$$

2. Точная управляемость в линейном случае. Предполагая, что выполнено условие G, $y_0 \in X$, рассмотрим задачу Коши для управляемого линейного эволюционного уравнения

$$y'(t) = Gy(t) + u(t), \quad t \in [0,T], \quad y(0) = y_0, \tag{3}$$

где $u(t)$ – управляющая функция из класса $\mathbb{C}_w([0,T];X)$. Обозначим через $y(t;u)$ слабое решение задачи (3), отвечающее управлению u. Исследуем разрешимость задачи управления: для заданного конечного состояния $y_1 \in X$ найти управление $u \in \mathbb{C}_w([0,T];X)$ такое, что

$$\lim_{t\to T-0}[y(t;u),z]_X = [y_1,z] \quad \text{для любого} \quad z \in D(G^*).$$

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 2.1 [1, § 4.3]. *Пусть* G *– инфинитезимальный производящий оператор сильно непрерывной полугруппы* $S(t)$, $t \geqslant 0$. *Тогда* $S(t)^*$ *– тоже сильно непрерывная полугруппа с инфинитезимальным производящим оператором* G^*.

Отметим, что уже из того факта, что линейный оператор является инфинитезимальным производящим оператором сильно непрерывной полугруппы, следует его замкнутость и плотность вложения его области определения в пространстве X (см. [1, § 4.1, с. 210, 213]).

Далее будем дополнительно предполагать, что оператор G удовлетворяет следующему условию.

Условие G*. Справедливы равенства $[Gx,x] = 0$ для всех $x \in D(G)$; $[G^*x,x] = 0$ для всех $x \in D(G^*)$.

Непосредственно из леммы 2.1, условия G* и утверждения из [1, следствие 4.3.1] (с учётом того, что мы рассматриваем случай вещественного пространства X, тогда как в [1] речь идет о комплексном X, которое там обозначается буквой H) вытекает

Лемма 2.2. *Пусть выполнены условия* G, G*. *Тогда* $\|S(t)x\|_X = \|S(t)^*x\|_X = \|x\|_X$ *для любых* $x \in X$, $t \geqslant 0$.

Напомним следующее известное определение.

Определение 2.1. Пусть $\mathcal{X}$ – банахово пространство, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ – скобка двойственности между пространствами $\mathcal{X}$ и $\mathcal{X}^*$ (действие функционала из $\mathcal{X}^*$ на элемент из $\mathcal{X}$), $\Omega \subset \mathcal{X}$ – заданное множество. Оператор $F : \mathcal{X} \to \mathcal{X}^*$ называется *хеминепрерывным* на Ω, если для всех $x, y \in X$, $z \in \Omega$ и $t \in \mathbb{R}$ таких, что $z + ty \in \Omega$, имеет место равенство

$$\lim_{t\to 0}\langle F[z+ty] - F[z], x\rangle = 0.$$

Следующее утверждение известно как теорема Минти–Браудера [28, теорема 2.1].

Лемма 2.3. *Пусть во всем рефлексивном банаховом пространстве* $\mathcal{X}$ *задан хеминепрерывный монотонный оператор* $F:\mathcal{X}\to\mathcal{X}^*$, *удовлетворяющий условию коэрцитивности*

$$\langle F(x),x\rangle \geqslant \gamma(\|x\|_{\mathcal{X}})\|x\|_{\mathcal{X}},$$

где $\gamma(t)$ – *вещественная функция при* $t\geqslant 0$, $\lim\limits_{t\to+\infty}\gamma(t)=+\infty$. *Тогда оператор* F *осуществляет сюръективное отображение пространства* $\mathcal{X}$ *на (всё) пространство* $\mathcal{X}^*$. *Иными словами, для каждого* $y\in\mathcal{X}^*$ *уравнение* $F[x]=y$ *имеет решение* $x\in\mathcal{X}$.

Как известно [29, гл. V, § 7, с. 236], гильбертово пространство X является рефлексивным, причём в качестве скобки двойственности можно взять скалярное произведение $[\,\cdot\,,\cdot\,]_X$, если (в соответствии с теоремой Рисса) отождествить пространства X и X^*. Очевидно, что для выполнения условия коэрцитивности оператора $F:X\to X$ достаточно его сильной монотонности:

$$[F(\xi_1)-F(\xi_2),\xi_1-\xi_2]_X\geqslant\alpha\|\xi_1-\xi_2\|_X^2 \text{ для любых } \xi_1,\xi_2\in X,\quad \alpha>0 \text{ при } \gamma(t)=\alpha t-\|F(0)\|_X.$$

Для произвольного $x\in X$ положим $u(t)=S(T-t)^*x$. Фактически $u(t)=z(T-t)$, где $z(t)$ – слабое решение задачи

$$z'(t)=G^*z(t),\quad t\in[0,T],\quad z(0)=x,$$

поэтому $u\in\mathbb{C}_w([0,T];X)$. Определим оператор $F:X\to X$ формулой

$$F[x]=y(T;u),\quad u(t)=S(T-t)^*x.$$

Нам понадобится также

Условие G′. Справедливы неравенства $\|S(t)^*x\|_X\geqslant a(t)\|x\|_X$ для всех $x\in X$ и п.в. $t\in[0,T]$ при $a\in L_2^+[0,T]$, $a\neq 0$.

Лемма 2.4. *Пусть выполнены условия* G *и* G′. *Тогда оператор* F *является сильно монотонным.*

Доказательство. Действительно, слабое решение задачи (3) определяется формулой

$$y(t;u)=S(t)y_0+\int\limits_0^t S(t-s)u(s)\,ds,$$

откуда имеем $F[x]=y(T;u)=S(T)y_0+\int_0^T S(T-s)S(T-s)^*x\,ds$. Таким образом, для любых $\xi_1,\xi_2\in X$ получаем соотношения

$$[F(\xi_1)-F(\xi_2),\xi_1-\xi_2]_X=\int\limits_0^T[S(T-s)S(T-s)^*(\xi_1-\xi_2),\xi_1-\xi_2]_X\,ds=$$

$$=\int\limits_0^T[S(T-s)^*(\xi_1-\xi_2),S(T-s)^*(\xi_1-\xi_2)]_X\,ds\geqslant\alpha\|\xi_1-\xi_2\|_X^2,\quad \alpha=\int\limits_0^T a^2(t)\,dt>0.$$

Лемма доказана.

Замечание 2.1. Пусть выполнено условие G. Согласно лемме 2.2 для выполнения условия G′ достаточно выполнения условия G*.

Лемма 2.5. *Пусть выполнено условие* G. *Тогда оператор* F *является хеминепрерывным на* X.

Доказательство. Повторяя рассуждения из начала доказательства леммы 2.4, для произвольных $\xi_1,\xi_2\in X$ получаем, что

$$\|F[\xi_1]-F[\xi_1+\tau\xi_2]\|_X\leqslant\int\limits_0^T\|S(T-s)S(T-s)^*\tau\xi_2\|_X\,ds=|\tau|\int\limits_0^T\|S(T-s)S(T-s)^*\xi_2\|_X\,ds\to 0$$

при $\tau\to 0$. Лемма доказана.

Непосредственно из лемм 2.3–2.5 вытекает

Теорема 2.1. *Пусть выполнены условия* G *и* G′. *Тогда для любого* $y_1 \in X$ *поставленная задача управления имеет решение вида* $u(t) = S(T-t)^*x,\ \ x \in X$.

3. Тотально глобальная разрешимость управляемого полулинейного эволюционного уравнения. Далее (на протяжении всей статьи) считаем, что условие G выполнено. Прежде всего рассмотрим в качестве вспомогательной задачу (1). Как уже пояснялось выше, при выполнении условия G для любых $x_0 \in X,\ \ z \in Z$ в множестве $\mathbb{C}_w([0,T];X)$ существует единственное слабое решение задачи (1) и это решение даётся формулой (2). Решение, отвечающее $x_0 \in X$ при $z = 0$, будем обозначать $x = \Theta[x_0](t) = S(t)x_0$. Решение, отвечающее $z \in Z$ при $x_0 = 0$, будем обозначать $x = A[z](t)$. Далее, считая элемент $x_0 \in X$ фиксированным, положим $\theta(t) = \Theta[x_0](t)$. Как видно из представления (2), слабое решение задачи (1) можно записать в виде
$$x(t) = \theta(t) + A[z](t), \quad t \in [0,T].$$

По отдельности рассмотрим следующие два случая.

I. Случай ограниченного множества управлений. Пусть $E = L_\infty([0,T];X),\ \ \sigma \geqslant 0$ – заданное число, $u \in E$ – управляющая функция, $\|u\|_E \leqslant \sigma$. Совокупность всех таких управляющих функций будем обозначать через $\mathcal{D}$. Предположим, кроме того, что задана функция (оператор) $f : [0,T] \times X \to X$, удовлетворяющая условиям:

Условие $\mathbf{F_1}$. Для всех $x \in E$ отображение $[0,T] \ni t \to f(t, x(t))$ принадлежит классу $Z = L_2([0,T];X)$.

Условие $\mathbf{F_2}$. Существует функция $\mathcal{N} = \mathcal{N}(t,M) : [0,T] \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, суммируемая по $t \in [0,T]$ и неубывающая по $M \in \mathbb{R}_+$, такая, что для всех $x, y \in X,\ \ \|x\|_X, \|y\|_X \leqslant M$, п.в. $t \in [0,T]$ имеем оценку
$$\|f(t,x) - f(t,y)\|_X \leqslant \mathcal{N}(t,M)\|x-y\|_X.$$

Условие $\mathbf{F_3}$. Существует функция $\mathcal{N}_1(t,r) : [0,T] \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, неубывающая по r и суммируемая по Лебегу по t, такая, что $\|f(t,\xi)\|_X + \sigma \leqslant \mathcal{N}_1(t,M)$ для всех $M > 0,\ \ \xi \in X$, $\|\xi\|_X \leqslant M$, п.в. $t \in [0,T]$.

Замечание 3.1. Условие F_3 можно заменить следующим.

Условие $\mathbf{F_3'}$. Существует функция $\mathcal{N}_2 = \mathcal{N}_2(t) : [0,T] \to \mathbb{R}_+$, суммируемая по $t \in [0,T]$ и такая, что для п.в. $t \in [0,T]$ имеем неравенство $\|f(t,0)\|_X + \sigma \leqslant \mathcal{N}_2(t)$.

Действительно, предположим, что выполнены условия F_2 и F_3'. Оценим
$$\|f(t,\xi)\|_X + \sigma \leqslant \|f(t,\xi) - f(t,0)\|_X + \|f(t,0)\|_X + \sigma \leqslant \mathcal{N}(t,M)\|\xi\|_X + \mathcal{N}_2(t) \leqslant \mathcal{N}_1(t,M),$$
где $\mathcal{N}_1(t,M) \equiv \mathcal{N}(t,M)M + \mathcal{N}_2(t)$. Однако, как видно из формулировки следующей далее теоремы 3.2, важно иметь в качестве функции $\mathcal{N}_1(t,M)$ не хотя бы какую-то оценку сверху, а оценку наиболее точную.

Будем рассматривать управляемое полулинейное эволюционное уравнение
$$x'(t) = Gx(t) + f(t, x(t)) + u(t), \quad t \in [0,T], \quad x(0) = x_0, \tag{4}$$
понимая его (слабое) решение как решение операторного уравнения типа Гаммерштейна
$$x(t) = \theta(t) + A[f(\cdot, x(\cdot)) + u(\cdot)](t), \quad t \in [0,T], \quad x \in E. \tag{5}$$

Теорема 3.1. *Пусть выполнены условия* $\mathrm{F}_1,\ \ \mathrm{F}_2,\ \ \mathrm{G}$. *Тогда, каково бы ни было* $u \in L_2([0,T];X)$, *уравнение (5) не может иметь более одного решения.*

Доказательство вытекает непосредственно из работы [30, теорема 1].

Теорема 3.2. *Пусть выполнены условия* F_1 –F_3, G, $\|\theta(t)\|_X \leqslant \omega(t)$ *для п.в.* $t \in [0,T]$, *где* $\omega \in L_\infty[0,T]$. *Предположим, что задача Коши*
$$\frac{d}{dt}\beta(t) = \mathcal{N}_1(t, \omega(t) + \beta(t)), \quad t \in (0,T], \quad \beta(0) = 0 \tag{6}$$

имеет решение – абсолютно непрерывную функцию $\beta(t) \geqslant 0,\ \ t \in [0,T]$. *Тогда для любого управления* $u \in \mathcal{D}$ *уравнение (5) имеет решение* $x \in \mathbb{C}_w([0,T],X)$, *удовлетворяющее оценке*

$$\|x(t)\|_X \leqslant \|\theta(t)\|_X + \beta(t) \quad \textit{для п.в.} \quad t \in [0,T].$$

Доказательство вытекает непосредственно из [30, теорема 2].

II. Случай неограниченного множества управлений. Теперь будем считать, что управление $u \in E$ произвольно. Заменим условие F_3 следующими условиями.

Условие $\mathbf{F_4}$. Существуют число $r_0 > 0$ и непрерывная функция $\mathcal{N}_0 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, не убывающая на $[r_0, +\infty)$, такая, что $\|f(t,\xi)\|_X \leqslant \mathcal{N}_0(M)$ для любых $M > 0$, $\xi \in X$, $\|\xi\|_X \leqslant M$, п.в. $t \in [0,T]$, $\max\limits_{r\in[0,r_0]} \mathcal{N}_0(r) = \mathcal{N}_0(r_0)$.

Условие $\mathbf{F_5}$. Для всякого $\sigma \geqslant 1$ имеем

$$\int\limits_{r_0}^{+\infty} \frac{dr}{\mathcal{N}_0(r) + \sigma} = +\infty.$$

Лемма 3.1. *Пусть выполнены условия* F_4, F_5, *а число* $\sigma \geqslant 1$ *произвольно фиксировано. Тогда условие* F_3 *выполнено при*

$$\mathcal{N}_1(t,r) = \mathcal{N}_1(r) = \begin{cases} \mathcal{N}_0(r_0) + \sigma, & r \in [0, r_0], \\ \mathcal{N}_0(r) + \sigma, & r > r_0. \end{cases}$$

И более того, задача (6) при $\omega(t) \equiv \|\theta\|_E$ *заведомо имеет решение – неотрицательную абсолютно непрерывную функцию* $\beta(\cdot;\sigma)$, *зависящую от параметра* σ.

Доказательство. Выполнение условия F_3 очевидно. Пусть $M \geqslant \|\theta\|_E$ – произвольное число. Без ограничения общности рассуждений можем считать, что $r_0 \geqslant M$ (в противном случае надо просто увеличить r_0 и это не нарушит наших предположений). Пользуясь условием F_5, рассмотрим интеграл

$$J = \int\limits_0^{+\infty} \frac{dr}{\mathcal{N}_1(M+r)} = \int\limits_M^{+\infty} \frac{d\xi}{\mathcal{N}_1(\xi)} \geqslant \int\limits_{r_0}^{+\infty} \frac{d\xi}{\mathcal{N}_0(\xi) + \sigma} = +\infty.$$

Таким образом, $J = +\infty$. В соответствии с теоремой Уинтнера [31, теорема 5.1, с. 44] это означает, что задача (6) при $\omega \equiv M$ имеет решение на произвольном отрезке $[0,T]$. Лемма доказана.

Непосредственно из теоремы 3.2 и леммы 3.1 вытекает

Теорема 3.3. *Пусть выполнены условия* F_1, F_2, F_4, F_5, G *и, кроме того,* $\|\theta(t)\|_X \leqslant \omega(t)$ *для п.в.* $t \in [0,T]$, *где* $\omega \in L_\infty[0,T]$. *Тогда для любого* $u \in E$ *уравнение (5) имеет единственное решение* $x \in \mathbb{C}_w([0,T],X)$, *причём* $\|x(t)\|_X \leqslant \omega(t) + \beta(t;\sigma)$ *для п.в.* $t \in [0,T]$, $\sigma \geqslant \|u\|_E$.

4. Точная управляемость полулинейного эволюционного уравнения. Считая выполненными условия F_1, F_2, F_4, F_5, G, G', будем рассматривать задачу (4), понимая её слабое решение как решение уравнения (5).

В соответствии с результатами п. 3 при сделанных предположениях каждому управлению $u \in E = L_\infty([0,T];X)$ отвечает единственное решение $x = x(\cdot;u) \in \mathbb{C}_w([0,T];X)$ задачи (4).

Исследуем разрешимость задачи управления: для заданного конечного состояния $x_1 \in X$ найти управление $u \in \mathbb{C}_w([0,T];X)$ такое, что $\lim\limits_{t\to T-0}[x(t;u),z]_X = [x_1,z]$ для любого $z \in D(G^*)$.

Наряду с оператором $F : X \to X$, определённым в п. 2, рассмотрим оператор $Q : X \to X$, определяемый формулой $Q[z] = x[T;u]$, $\ \ u = S(T-t)^*z$. При этом будем считать, что $y_0 = x_0$. В п. 2 уже было показано, что F – монотонный хеминепрерывный оператор, удовлетворяющий условию коэрцитивности с функцией $\gamma(r) = \alpha r - \alpha_0$, где

$$\alpha = \int\limits_0^T a^2(t)\,dt > 0, \quad \alpha_0 = \|F(0)\|_X, \quad F(0) = S(T)x_0.$$

При выполнении условия G^* имеем $a \equiv 1$, $\alpha = T$.

Условие $\mathbf{F_6}$. Существуют число $\nu > 0$ и предел $\lim\limits_{r\to+\infty}\{\gamma(r) - \nu\mathcal{N}_0(r)\} > 0$.

Лемма 4.1. *Из* F_6 *следует условие* F_5.

Доказательство. Согласно F_6, не ограничивая общности рассуждений, можем считать, что

$$\mathcal{N}_0(r) < \frac{\gamma(r)}{\nu}, \quad \alpha r > \alpha_0 \quad \text{для любого} \quad r \geqslant r_0.$$

Тогда получаем соотношения

$$\int\limits_{r_0}^{+\infty} \frac{dr}{\mathcal{N}_0(r) + \sigma} > \nu \int\limits_{r_0}^{+\infty} \frac{dr}{\gamma(r) + \nu\sigma} = \nu \int\limits_{r_0}^{+\infty} \frac{dr}{\alpha r - \alpha_0 + \nu\sigma} = +\infty.$$

Лемма доказана.

Непосредственно из [23, теорема 1.1, замечание 2.2] вытекает

Лемма 4.2. *Пусть во всем рефлексивном банаховом пространстве $\mathcal{X}$ задан хеминепрерывный монотонный оператор $F : \mathcal{X} \to \mathcal{X}^*$, удовлетворяющий условию коэрцитивности*

$$\langle F(x), x\rangle \geqslant \gamma(\|x\|_{\mathcal{X}})\|x\|_{\mathcal{X}},$$

где $\gamma(r)$ – вещественная функция при $r \geqslant 0$, $\lim\limits_{r\to+\infty}\gamma(r) = +\infty$; $\mu : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ – непрерывная неубывающая функция такая, что существует $\lim\limits_{r\to+\infty}\{\gamma(r) - \mu(r)\} = +\infty$. Тогда для любого $z \in \mathcal{X}^*$ существует число $\sigma > 0$, зависящее лишь от функций $\gamma(\cdot)$, $\mu(\cdot)$ и элемента z, такое, что для всякого хеминепрерывного оператора $Q : \mathcal{X} \to \mathcal{X}^*$, удовлетворяющего оценке

$$\|Q[x] - F[x]\|_{\mathcal{X}^*} \leqslant \mu(\|x\|_{\mathcal{X}}) \quad \textit{при всех} \quad x \in \mathcal{X},$$

уравнение $Q[x] = z$ имеет по крайней мере одно решение $x \in \mathcal{X}$ со свойством $\|x\|_{\mathcal{X}} \leqslant \sigma$.

Пусть $\|S(t)x_0\|_X \leqslant M$ для п.в. $t \in [0,T]$, $\|z\|_X \leqslant \sigma$, откуда следуют неравенства

$$\|u(t)\|_X \leqslant \|S(T-t)^*z\|_X \leqslant \|S(T-t)^*\|\sigma = \|S(T-t)\|\sigma \leqslant \sigma;$$

$\beta(t;\sigma)$ – решение задачи Коши

$$\frac{d}{dt}\beta(t) = \mathcal{N}_0(M + \beta(t)) + \sigma, \quad t \in (0,T], \quad \beta(0) = 0.$$

Как показано в п. 3, имеет место оценка

$$\|x(t;u)\|_X \leqslant M + \beta(t;\sigma) \quad \text{для п.в.} \quad t \in [0,T]. \tag{7}$$

Согласно условию F_6 найдётся число $r_1 > 0$ такое, что $\nu\mathcal{N}_0(r) < \gamma(r)$, $\alpha r > \alpha_0$ для всех $r \geqslant r_1$. Положим

$$\alpha_1 = \frac{\alpha}{\nu}, \quad C_0 = (e^{\alpha_1 T} - 1)M + e^{\alpha_1 T}\gamma(r_1) + \frac{\alpha_0}{\alpha}, \quad \psi(\nu,T) = \frac{e^{\alpha_1 T} - 1}{\alpha_1} - T.$$

Лемма 4.3. *Пусть выполнены условия* F_1, F_2, F_4, F_6, G, G'. *Тогда справедлива оценка*

$$\int_0^T \|f(s,x(s;u))\|_X\,ds \leqslant \widetilde{\mu}(\sigma) \equiv \begin{cases} r_1-\sigma T & \textit{при}\ \ \beta(T;\sigma)\leqslant r_1,\\ \psi(\nu,T)\sigma + C_0 & \textit{при}\ \ \beta(T;\sigma) > r_1. \end{cases}$$

Доказательство. Непосредственно из оценки (7) и условия F_4 получаем

$$\int_0^T \|f(s,x(s;u))\|_X\,ds \leqslant \int_0^T \mathcal{N}_0(M+\beta(t;\sigma))\,dt = \beta(T;\sigma)-\sigma T.$$

В случае $\beta(T;\sigma)\leqslant r_1$ утверждение очевидно. Рассмотрим противоположный случай. Положим для краткости $\beta(t)=\beta(t;\sigma)$. Исходя из определения функции $\beta(t)$ и числа r_1, путём разделения переменных при $\beta(t)>r_1$ получаем

$$t = \int_0^t \frac{\beta'(\xi)\,d\xi}{\mathcal{N}_0(M+\beta(\xi))+\sigma} = \int_{\beta(0)}^{\beta(t)} \frac{dr}{\mathcal{N}_0(M+r)+\sigma} \geqslant \int_{r_1}^{\beta(t)} \frac{\nu\,dr}{\nu\mathcal{N}_0(M+r)+\nu\sigma} \geqslant$$

$$\geqslant \int_{r_1}^{\beta(t)} \frac{\nu\,dr}{\gamma(M+r)+\nu\sigma} = \int_{r_1}^{\beta(t)} \frac{\nu\,dr}{\alpha(M+r)-\alpha_0+\nu\sigma} = \frac{1}{\alpha_1}\ln\left|\frac{\alpha\beta(t)+\alpha M-\alpha_0+\nu\sigma}{\alpha r_1-\alpha_0+\alpha M+\nu\sigma}\right|.$$

Следовательно,

$$\alpha\beta(t)+\alpha M-\alpha_0+\nu\sigma \leqslant e^{\alpha_1 t}[\gamma(r_1)+\alpha M+\nu\sigma], \quad \beta(t)\leqslant \frac{1}{\alpha}(e^{\alpha_1 t}-1)[\alpha M+\nu\sigma]+\frac{\alpha_0}{\alpha}+e^{\alpha_1 t}\gamma(r_1).$$

Таким образом, $\beta(T;\sigma)-\sigma T\leqslant \psi(\nu,T)\sigma + C_0$. Лемма доказана.

Лемма 4.4. *Пусть выполнены условия* F_1, F_2, F_4, F_6, G, G'. *Тогда справедлива оценка*

$$\|Q[z]-F[z]\|_X \leqslant \widetilde{\mu}(\|z\|_X) \quad \text{для любого} \quad z\in X.$$

Доказательство. Пусть $u=S(T-t)^*z$, $z\in X$, откуда следует неравенство $\|u\|_E\leqslant \leqslant \|z\|_X$. Имеем

$$x(t;u)=\theta(t)+A[f(\cdot,x(\cdot;u))+u(\cdot)](t), \quad t\in[0,T], \quad y(t;u)=\theta(t)+A[u(\cdot)](t), \quad t\in[0,T],$$

соответственно $x(t;u)-y(t;u)=A[f(\cdot,x(\cdot;u))](t)$, $t\in[0,T]$. Следовательно, согласно леммам 1.3 и 4.3 имеют место соотношения

$$\|Q[z]-F[z]\|_X = \|x(T;u)-y(T;u)\|_X \leqslant \int_0^T \|f(s,x(s;u))\|_X\,ds \leqslant \widetilde{\mu}(\|z\|_X).$$

Лемма доказана.

Лемма 4.5. *Пусть выполнены условия* F_1, F_2, F_4, F_6, G, G'. *Тогда оператор* Q *является хеминепрерывным.*

Доказательство. Выберем произвольно $\xi_1,\xi_2\in X$ и для $\tau\in[-1;1]$ положим $u_\tau = S(T-t)^*[\xi_1+\tau\xi_2]$, $\overline{x}_\tau(t)=x(t;u_\tau)$, $\sigma=\|\xi_1\|_X+\|\xi_2\|_X$. Согласно (7) и оценкам, установленным при доказательстве леммы 4.3, для $t\in[0,T]$ имеем

$$\|\overline{x}_\tau(t)\|_X \leqslant M+\beta(T;\sigma)\leqslant \overline{M}, \quad \overline{M}=M+\frac{1}{\alpha}(e^{\alpha_1 T}-1)[\alpha M+\nu\sigma]+\frac{\alpha_0}{\alpha}+e^{\alpha_1 T}\gamma(r_1),$$

при этом $\overline{x}_\tau(t) = \theta(t) + A[f(\cdot, \overline{x}_\tau) + u_\tau](t)$. Следовательно,

$$\overline{x}_\tau(t) - \overline{x}_0(t) = A[f(\cdot, \overline{x}_\tau) - f(\cdot, \overline{x}_0) + u_\tau - u_0](t).$$

Согласно лемме 1.3 и условию F_2 получим неравенства

$$\|\overline{x}_\tau(t) - \overline{x}_0(t)\|_X \leqslant \int\limits_0^t \|f(s, \overline{x}_\tau) - f(s, \overline{x}_0)\|_X\, ds + |\tau|\sigma \leqslant \int\limits_0^t \mathcal{N}(s, \overline{M}) \|\overline{x}_\tau(s) - \overline{x}_0(s)\|_X\, ds + |\tau|\sigma.$$

Рассмотрим оператор $\Phi : L_\infty[0,T] \to L_\infty[0,T]$, определяемый формулой

$$\Phi[z](t) = \int\limits_0^t \mathcal{N}(s, \overline{M}) z(s)\, ds.$$

Пользуясь результатами работы [32], нетрудно показать, что спектральный радиус $\rho(\Phi) = 0$. Тогда в силу обобщённой леммы Гронуолла получаем оценку

$$\|\overline{x}_\tau - \overline{x}_0\|_E \leqslant \|R(\Phi)[|\tau|\sigma]\|_{L_\infty} \leqslant |\tau|\sigma \|R(\Phi)\|, \quad R(\Phi) = \sum_{k=0}^\infty \Phi^k,$$

откуда следует, что

$$\|Q[\xi_1] - Q[\xi_1 + \tau\xi_2]\|_X = \|x(T; u_\tau) - x(T; u_0)\|_X \leqslant |\tau|\sigma \|R(\Phi)\| \to 0$$

при $\tau \to 0$. Лемма доказана.

Теорема 4.1. *Пусть выполнены условия* F_1, F_2, F_4, F_6, G, G' *и, кроме того,* $\psi(\nu, T) < \alpha$. *Тогда для любого* $x_1 \in X$ *поставленная задача управления имеет решение вида*

$$u = S(T-t)^* z, \quad z \in X.$$

Доказательство. В силу леммы 4.1 условие F_5 выполнено. Как уже было сказано, определяемый в п. 2 оператор $F : X \to X$ является монотонным, хеминепрерывным оператором, удовлетворяющим условию коэрцитивности с функцией $\gamma(r) = \alpha r - \alpha_0$. Поскольку оператор $Q : X \to X$ был определён формулой $Q[z] = x(T; u)$, $u = S(T-t)^* z$, то для доказательства утверждения теоремы достаточно установить разрешимость уравнения $Q[z] = x_1$ для всех $x_1 \in X$. Для этого, в свою очередь, достаточно убедиться, что выполнены условия леммы 4.2 при $\mathcal{X} = X$. Пусть $\widetilde{\mu}(\sigma)$ – функция из формулировки леммы 4.3. Учитывая определение функции $\beta(t; \sigma)$ и, в частности, монотонность $\beta(T; \sigma)$ по $\sigma \geqslant 0$, рассмотрим следующие два случая.

1. Если $\beta(T; 0) \geqslant r_1$, то, очевидно, $\beta(T; \sigma) > r_1$ для всех $\sigma > 0$. Полагаем

$$C_1 = C_0, \quad \mu(\sigma) = \widetilde{\mu}(\sigma) = \psi(\nu, T)\sigma + C_1.$$

2. Если $\beta(T; 0) < r_1$, то найдётся $\sigma_1 > 0$ такое, что $\beta(T; \sigma_1) = r_1$. Здесь полагаем

$$C_1 = C_0 + r_1, \quad \mu(\sigma) = \begin{cases} \psi(\nu, T)\sigma_1 + C_1 & \text{при } \ 0 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_1, \\ \psi(\nu, T)\sigma + C_1 & \text{при } \ \sigma > \sigma_1. \end{cases}$$

Отметим, что в обоих случаях функция $\mu : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ будет непрерывной и неубывающей, и по построению $\widetilde{\mu}(\sigma) \leqslant \mu(\sigma)$ для всех $\sigma \geqslant 0$. Поэтому согласно лемме 4.4 справедлива оценка

$$\|Q[z] - F[z]\|_X \leqslant \mu(\|z\|_X) \quad \text{для любого} \quad z \in X.$$

При этом

$$\gamma(r) - \mu(r) = \{\alpha - \psi(\nu, T)\}r - \alpha_0 - C_1 \to +\infty \quad \text{при} \quad r \to +\infty.$$

Наконец, по лемме 4.5 оператор Q хеминепрерывен. Таким образом, выполнены все условия леммы 4.2. Теорема доказана.

5. Волновое уравнение. Пусть $T > 0$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – открытое ограниченное множество с границей Γ. Положим $Q = \Omega \times (0, T]$, $\Sigma = \Gamma \times (0, T]$. В качестве управляемой начально-краевой задачи рассмотрим задачу об отыскании функции $\varphi(x,t) : \overline{\Omega} \times [0,T] \to \mathbb{R}$ такой, что

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \Delta\varphi = g(x,t,\varphi) + U(x,t), \quad (x,t) \in Q; \tag{8}$$

$$\varphi \,\Big|_{\Sigma} = 0; \tag{9}$$

$$\varphi(x,0) = \varphi_0(x), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x,0) = \psi_0(x), \quad x \in \Omega. \tag{10}$$

В работе [27, п. 10.3] рассматривалась аналогичная задача при $g \equiv 0$, $U \equiv 0$. Управляющую функцию будем представлять в виде $U = w + v'_t$. Следуя [27, п. 10.3], перепишем уравнение (8) в виде системы уравнений первого порядка

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \psi + v, \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} = \Delta\varphi + g(t,\varphi) + w, \quad (x,t) \in Q. \tag{11}$$

Обозначим $\eta = (\varphi, \psi)^*$ (здесь $*$ – знак транспонирования), $u = (v, w)^*$; $\eta(t) = \eta(\cdot, t)$, $u(t) = u(\cdot, t)$, $g(t,\varphi) = g(\cdot, t, \varphi)$. Тогда систему (11) можно записать в виде

$$\frac{d\eta}{dt} = G\eta + f(\cdot, \eta) + u,$$

где

$$G\eta = \begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta & 0 \end{pmatrix} \eta = \begin{pmatrix} \psi \\ \Delta\varphi \end{pmatrix}, \quad f(t,\eta) = \begin{pmatrix} 0 \\ g(t,\varphi) \end{pmatrix}.$$

Опять же следуя [27, замечание 7, с. 338], будем использовать на пространствах $\mathbb{H}^1_0(\Omega)$ и $X = \mathbb{H}^1_0(\Omega) \times L_2(\Omega)$ скалярные произведения

$$\int\limits_\Omega \nabla\varphi_1 \cdot \nabla\varphi_2 \, dx \;\; \text{на} \;\; \mathbb{H}^1_0(\Omega), \quad [\eta_1, \eta_2]_X = \int\limits_\Omega \nabla\varphi_1 \cdot \nabla\varphi_2 \, dx + \int\limits_\Omega \psi_1\psi_2 \, dx \;\; \text{на} \;\; X,$$

и в качестве области определения оператора G возьмём

$$D(G) = \{\mathbb{H}^2(\Omega) \bigcap \mathbb{H}^1_0(\Omega)\} \times \mathbb{H}^1_0(\Omega).$$

Таким образом, краевое условие (9) встраивается в область определения $D(G)$. В итоге задача (8)–(10) переписывается в виде абстрактного дифференциального уравнения (4). Заметим, что

$$\|f\|_X = \sqrt{[f,f]_X} = \|g(t,\varphi)\|_{L_2(\Omega)}.$$

Тогда условия F_1, F_2, F_4 конкретизируются следующим образом.

Условие $\mathbf{F_1}$. Для всех $\varphi \in E$ отображение $[0,T] \ni t \to g(t, \varphi(t))$ принадлежит классу $Z = L_2([0,T]; L_2(\Omega))$.

Условие $\mathbf{F_2}$. Существует функция $\mathcal{N} = \mathcal{N}(t,M) : [0,T] \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, суммируемая по $t \in [0,T]$ и неубывающая по $M \in \mathbb{R}_+$, такая, что для всех $\varphi_i \in \mathbb{H}^1_0(\Omega)$, $\|\varphi_i\| \leqslant M$, $i = 1, 2$, п.в. $t \in [0,T]$ имеем

$$\|g(t,\varphi_1) - g(t,\varphi_2)\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \mathcal{N}(t,M)\|\varphi_1 - \varphi_2\|_{\mathbb{H}^1_0(\Omega)}.$$

Условие $\mathbf{F_4}$. Существуют число $r_0 > 0$ и непрерывная функция $\mathcal{N}_0 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, не убывающая на $[r_0, +\infty)$, такая, что $\|g(t,\xi)\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \mathcal{N}_0(M)$ для всех $M > 0$, $\xi \in \mathbb{H}^1_0(\Omega)$, $\|\xi\| \leqslant M$, п.в. $t \in [0,T]$, $\max\limits_{r\in[0,r_0]} \mathcal{N}_0(r) = \mathcal{N}_0(r_0)$.

Как показано в [27, замечание 7, с. 338], операторы G и $G^* = (-G)$ являются максимальными монотонными, причём $[G\eta,\eta]_X = 0$ для всех $\eta \in D(G)$. Стало быть, выполнены условия G и G*. Согласно лемме 2.2 отсюда следует выполнение условия G$'$ при $a \equiv 1$, $\alpha = T$. Таким образом, применима теорема 4.1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Балакришнан А.В.* Прикладной функциональный анализ. М., 1980.
2. *Carthel C., Glowinski R., Lions J.L.* On exact and approximate boundary controllabilities for the heat equation: a numerical approach // J. of Optim. Theory and Appl. 1994. V. 82. № 3. P. 429–484.
3. *Lebeau G., Robbiano L.* Contrôle exact de l'equation de la chaleur // Comm. Partial Differ. Equat. 1995. V. 20. № 1–2. P. 335–356.
4. *Васильев Ф.П.* О двойственности в линейных задачах управления и наблюдения // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31. № 11. С. 1893–1900.
5. *Егоров А.И., Знаменская Л.Н.* Управляемость упругих колебаний систем с распределёнными и сосредоточенными параметрами по двум границам // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2006. Т. 46. № 11. С. 2032–2044.
6. *Васильев Ф.П.* Методы оптимизации. М., 2002.
7. *Егоров А.И.* Основы теории управления. М., 2004.
8. *Zuazua E.* Controllability and observability of partial differential equations: some results and open problems / Eds. C.M. Dafermos et al. Handbook of differential equations: Evolutionary equations. V. III. Amsterdam, 2007. P. 527–621.
9. *Lions J.-L.* Exact controllability, stabilization and perturbations for distributed systems // SIAM Rev. 1988. V. 30. № 1. P. 1–68.
10. *Розанова А.В.* Управляемость для нелинейного абстрактного эволюционного уравнения // Мат. заметки. 2004. Т. 76. Вып. 4. С. 553–567.
11. *Фурсиков А.В.* Оптимальное управление распределёнными системами. Теория и приложения. Новосибирск, 1999.
12. *Klamka J.* Constrained exact controllability of semilinear systems // Syst. Control Lett. 2002. V. 47. № 2. P. 139–147.
13. *Balachandran K., Dauer J.P.* Controllability of nonlinear systems in Banach spaces: a survey // J. of Optim. Theory and Appl. 2002. № 1. P. 7–28.
14. *Pighin D., Zuazua E.* Controllability under positivity constraints of semilinear heat equations // Math. Control Relat. Fields. 2018. V. 8. № 3–4. P. 935–964.
15. *Klamka J., Avetisyan A.S., Khurshudyan A.Zh.* Exact and approximate distributed controllability of processes described by KdV and Boussinesq equations: the Green's function approach // Arch. Control Sci. 2020. V. 30. № 1. P. 177–193.
16. *Cannarsa P., Komornik V., Loreti P.* One-sided and internal controllability of semilinear wave equations with infinitely iterated logarithms // Discrete Contin. Dyn. Syst. 2002. V. 8. № 3. P. 745–756.
17. *Fursikov A.V., Imanuvilov O.Yu.* Controllability of Evolution Equations. Lecture Notes Ser. V. 34. Seoul, 1996.
18. *Чернов А.В.* О достаточных условиях управляемости нелинейных распределённых систем // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2012. Т. 52. № 8. С. 1400–1414.
19. *Balachandran K., Dauer J.P., Balasubramaniam P.* Controllability of nonlinear integrodifferential systems in Banach space // J. of Optim. Theory and Appl. 1995. V. 84. P. 83–91.
20. *Mahmudov N.I.* Exact null controllability of semilinear evolution systems // J. Glob. Optim. 2013. V. 56. № 2. P. 317–326.
21. *Zhang X.* Exact controllability of semilinear evolution systems and its application // J. Optimization Theory Appl. 2000. V. 107. № 2. P. 415–432.
22. *Liu W., Williams G.H.* Exact internal controllability for the semilinear heat equation // J. Math. Anal. Appl. 1997. V. 211. P. 258–272.
23. *Чернов А.В.* Об одном обобщении метода монотонных операторов // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49. № 4. С. 535–544.
24. *Хилле Э., Филлипс Р.* Функциональный анализ и полугруппы. М., 1962.

25. Функциональный анализ / Под ред. С.Г. Крейна. М., 1979.
26. *Гаевский Х., Грёгер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. М., 1978.
27. *Brezis H.* Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations. New York; Dordrecht; Heidelberg; London, 2011.
28. *Качуровский Р.И.* Нелинейные монотонные операторы в банаховых пространствах // Успехи мат. наук. 1968. Т. 23. Вып. 2 (140). С. 121–168.
29. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. М., 1984.
30. *Чернов А.В.* О тотально глобальной разрешимости эволюционного уравнения с неограниченным оператором // Вестн. Удмуртского ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2021. Т. 31. Вып. 2. С. 331–349.
31. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., 1970.
32. *Сумин В.И., Чернов А.В.* Операторы в пространствах измеримых функций: вольтерровость и квазинильпотентность // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34. № 10. С. 1402–1411.

Нижегородский государственный университет
имени Н.И. Лобачевского

Поступила в редакцию 23.11.2022 г.
После доработки 16.01.2023 г.
Принята к публикации 20.01.2023 г.