ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 2, с. 275–279

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.968.72

СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ГЕНЕРАТОРА ПОЛУГРУППЫ, ПОРОЖДАЕМОЙ ВОЛЬТЕРРОВЫМ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЕМ

© 2023 г. $\boxed{\text{В. В. Власов}}$, Н. А. Раутиан

Изучены спектральные свойства линейного оператора, являющегося генератором полугруппы, порождаемой вольтерровым интегро-дифференциальным уравнением в гильбертовом пространстве. Такие интегро-дифференциальные уравнения могут быть реализованы как интегро-дифференциальные с частными производными, возникающие в теории вязкоупругости, в теории распространения тепла в средах с памятью, а также имеют много других важных приложений. Установленные результаты о базисности Рисса корневых векторов генератора полугруппы могут быть использованы при изучении свойств решений интегро-дифференциальных уравнений.

DOI: 10.31857/S0374064123020139, EDN: PVYKCS

Введение. В статье изучаются спектральные свойства линейного оператора $\mathbb{A}$, являющегося генератором полугруппы, порождаемой интегро-дифференциальным уравнением с неограниченными операторными коэффициентами в сепарабельном гильбертовом пространстве. Указанные интегро-дифференциальные уравнения являются операторными моделями задач теории вязкоупругости, теории распространения тепла в средах с памятью и имеют много важных приложений (см. [1–5]). В предлагаемой статье продолжается исследование вещественной и невещественной частей спектра оператора $\mathbb{A}$ и устанавливается базисность Рисса корневых векторов в подпространстве, отвечающем невещественной части его спектра.

1. Определения. Постановка задачи. Пусть H – сепарабельное гильбертово пространство и A – положительный самосопряжённый оператор, $A^* = A \geqslant \varkappa_0 I$, $\varkappa_0 > 0$, имеющий компактный обратный оператор в H, I – тождественный оператор в пространстве H. Пусть B – неотрицательный самосопряжённый оператор в пространстве H с областью определения $D(B)$ такой, что $D(A) \subseteq D(B)$ и $\|Bx\| \leqslant \varkappa\|Ax\|$, $0 < \varkappa < 1$, для любого $x \in D(A)$.

Рассмотрим следующую задачу для интегро-дифференциального уравнения на положительной полуоси $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$:

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2} + (A+B)u(t) - \int\limits_l^t K_1(t-s)Au(s)\,ds - \int\limits_l^t K_2(t-s)Bu(s)\,ds = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{1}$$

$$u(+0) = \varphi_0, \quad u^{(1)}(+0) = \varphi_1, \quad u(t) = \varphi(t), \quad t \in [l, 0], \quad -\infty \leqslant l < 0, \tag{2}$$

где $\varphi(0) = \varphi_0$, $\varphi^{(1)}(0) = \varphi_1$. Предположим, что ядра интегральных операторов $K_i(t)$, $i = 1, 2$, допускают представление

$$K_i(t) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-t\tau}\,d\mu_i(\tau), \quad i = 1, 2, \tag{3}$$

где положительные меры $d\mu_i$, $i = 1, 2$, порождены неубывающими непрерывными справа функциями μ_i. Интеграл (3) понимается в смысле Стилтьеса. При этом предполагается, что функции μ_i, $i = 1, 2$, представляют собой сумму абсолютно непрерывной функции и функции скачков, сингулярная компонента отсутствует. Дополнительно будем предполагать выполнение следующих условий:

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{d\mu_i(\tau)}{\tau} < 1, \quad i = 1, 2. \tag{4}$$

Определение 1. Вектор-функция $u(t)$ называется *классическим* решением задачи (1), (2), если $u(t) \in C^2(\mathbb{R}_+, H)$, $Au(t), Bu(t) \in C(\mathbb{R}_+, H)$ и $u(t)$ удовлетворяет уравнению (1) для любого $t \in \mathbb{R}_+$ и начальным условиям (2). Через Ω_k обозначим пространства $L^2_{\mu_k}(\mathbb{R}_+, H)$ вектор-функций на полуоси $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$, принимающих значения в пространстве H, для которых выполнено условие

$$\|\xi\|_{\Omega_k} = \left(\int\limits_0^{+\infty} \|\xi(s)\|^2_H \, d\mu_k(s)\right)^{1/2} < +\infty.$$

Эти пространства являются сепарабельными гильбертовыми пространствами (см. [6, с. 142]).

Замечание 1. Формально достаточно определить элементы $\xi(s)$ пространства $L^2_{\mu_k}(\mathbb{R}_+, H)$ на подмножестве $\bigcup_{k=1}^2 \operatorname{supp} d\mu_k \subset \mathbb{R}_+$.

Положим

$$A_0 := \left(1 - \int\limits_0^{+\infty} \frac{d\mu_1(\tau)}{\tau}\right) A + \left(1 - \int\limits_0^{+\infty} \frac{d\mu_2(\tau)}{\tau}\right) B, \quad Q_1 := A^{1/2} A_0^{-1/2}, \quad Q_2 := B^{1/2} A_0^{-1/2}.$$

Замечание 2. Из самосопряжённости операторов A и B и условия (4) следует, что оператор A_0 является самосопряжённым и положительным. Из свойств операторов A и B и неравенства Гайнца (см. [7, гл. 1, теорема 7.1]) вытекает, что оператор A_0 обратим, а операторы $Q_1 := A^{1/2} A_0^{-1/2}$, $Q_2 := B^{1/2} A_0^{-1/2}$, A_0^{-1} являются ограниченными в пространстве H.

Превратим область определения $D(A_0^\beta)$ оператора A_0^β, $\beta > 0$, в гильбертово пространство H_β, введя на $D(A_0^\beta)$ норму, эквивалентную норме графика оператора A_0^β.

Рассмотрим линейные операторы $\mathbb{T}_k \xi(\tau) = \tau \xi(\tau)$ в пространстве Ω_k, $k = 1, 2$, с областями определения $D(\mathbb{T}_k) = \{\xi \in \Omega_k : \tau \xi(\tau) \in \Omega_k\}$.

Введём линейные операторы $\mathbb{B}_k : H \to \Omega_k$, $k = 1, 2$, действующие следующим образом:

$$\mathbb{B}_k v = \frac{1}{\sqrt{\tau}} Q_k v, \quad k = 1, 2, \quad \tau \in \operatorname{supp} d\mu_k,$$

тогда сопряжённые операторы имеют вид $\mathbb{B}_k^* : \Omega_k \to H$, $k = 1, 2$,

$$\mathbb{B}_k^* \xi(\tau) = Q_k^* \int\limits_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\tau}} \xi(\tau) \, d\mu_k(\tau), \quad k = 1, 2.$$

Замечание 3. Пусть выполнены условия (4), тогда операторы $\mathbb{B}_k : H \to \Omega_k$ и $\mathbb{B}_k^* : \Omega_k \to \to H$, $k = 1, 2$, являются ограниченными.

Введём гильбертово пространство $\mathbb{H} = H \bigoplus H \bigoplus (\bigoplus_{k=1}^2 \Omega_k)$, снабжённое нормой

$$\|(v, \xi_0, \xi_1(\tau), \xi_2(\tau))\|^2_{\mathbb{H}} = \|v\|^2_H + \|\xi_0\|^2_H + \sum_{k=1}^2 \|\xi_k(\tau)\|^2_{\Omega_k}, \quad \tau \in \bigcup_{k=1}^2 \operatorname{supp} d\mu_k,$$

которое будем называть *расширенным гильбертовым пространством*.

Рассмотрим линейный оператор $\mathbb{A}$ в пространстве $\mathbb{H}$ с областью определения

$$D(\mathbb{A}) = \left\{(v, \xi_0, \xi_1(\tau), \xi_2(\tau)) \in \mathbb{H} : v \in H_{1/2}, \ \ \xi_0 + \sum_{k=1}^{2} \mathbb{B}_k^* \xi_k(\tau) \in H_{1/2}, \ \ \xi_k(\tau) \in D(\mathbb{T}_k), \ \ k = 1, 2\right\},$$

действующий по правилу

$$\mathbb{A}(v, \xi_0, \xi_1(\tau), \xi_2(\tau))^{\text{т}} = \left(-A_0^{1/2}\left[\xi_0 + \sum_{k=1}^{2} \mathbb{B}_k^* \xi_k(\tau)\right], A_0^{1/2} v, \mathbb{B}_k A_0^{1/2} v - \mathbb{T}_k \xi_k(\tau), \ \ k = 1, 2\right)^{\text{т}},$$

где через $^{\text{т}}$ обозначена операция транспонирования матрицы.

Таким образом, оператор $\mathbb{A}$ можно записать в виде произведения операторных матриц

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} A_0^{1/2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -I & -\mathbb{B}_1^* & -\mathbb{B}_2^* \\ I & 0 & 0 & 0 \\ \mathbb{B}_1 & 0 & -\mathbb{T}_1 & 0 \\ \mathbb{B}_2 & 0 & 0 & -\mathbb{T}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0^{1/2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{pmatrix}.$$

Введём четырёхкомпонентные векторы вида

$$Z(t) = (v(t), \xi_0(t), \xi_1(t, \tau), \xi_2(t, \tau)) \in D(\mathbb{A}), \quad Z_0 = (v_0, \xi_{00}, \xi_{10}(\tau), \xi_{20}(\tau)) \in D(\mathbb{A})$$

и рассмотрим задачу Коши для однородного уравнения в пространстве $\mathbb{H}$

$$\frac{d}{dt} Z(t) = \mathbb{A} Z(t), \tag{5}$$

$$Z(0) = Z_0. \tag{6}$$

Определение 2. Вектор-функция $Z(t) = (v(t), \xi_0(t), \xi_1(t, \tau), \xi_2(t, \tau)) \in \mathbb{H}$, принимающая значения из гильбертова пространства $\mathbb{H}$, называется *классическим решением* задачи (5), (6), если она принадлежит классу $C^1(\mathbb{R}_+, D(\mathbb{A})) \bigcap C([0, +\infty), D(\mathbb{A}))$ по переменной t для любого $\tau \in \bigcup_{k=1}^{2} \operatorname{supp} d\mu_k$, удовлетворяет уравнению (5) и начальному условию (6).

В работе [8] показано, что при выполнении условий (4) оператор $\mathbb{A}$ в пространстве $\mathbb{H}$ с плотной областью определения $D(\mathbb{A})$ максимально диссипативный и, следовательно, является генератором сжимающей C_0-полугруппы $S(t) = e^{t\mathbb{A}}$ в пространстве $\mathbb{H}$.

В статье [9] доказана теорема о существовании и единственности классического решения $Z(t) = (v(t), \xi_0(t), \xi_1(t, \tau), \xi_2(t, \tau))$ задачи (5), (6), где $v(t) = u'(t)$, $\xi_0(t) = A_0^{1/2} u(t)$, $u(t)$ – классическое решение задачи (1), (2), в предположениях, что данные задачи (1), (2) удовлетворяют следующим условиям: $\varphi_0 \in H_1$, $\varphi_1 \in H_1$, вектор-функция $\varphi(t)$ задана при $t \in (l, 0]$, причём $\varphi(t) \in H_1$ и $\varphi'(t) \in H_1$ при $t \in (l, 0]$, $\varphi(t) \in C((l, 0], H_1)$, $\varphi^{(1)}(t) \in C((l, 0], H_1)$, $\varphi(0) = \varphi_0$, $\varphi^{(1)}(0) = \varphi_1$, кроме того, $\lim\limits_{t \to l} [A\varphi(t)] = 0$, $-\infty \leqslant l < 0$, а данные задачи (5), (6) удовлетворяют условию $Z_0 = (\varphi_1, A_0^{1/2} \varphi_0, \xi_{01}(\tau), \xi_{02}(\tau)) \in D(\mathbb{A})$, где функции $\xi_{0k}(\tau)$, $k = 1, 2$, заданы формулами

$$\xi_{0k}(\tau) := \int\limits_{l}^{0} \frac{e^{s\tau}}{\sqrt{\tau}} Q_k A_0^{1/2} \frac{d\varphi(s)}{ds}\, ds, \quad \tau > 0, \quad k = 1, 2.$$

Также получены оценка нормы решения задачи (5), (6) в пространстве $\mathbb{H}$ и оценка энергетической нормы решения задачи (1), (2) в пространстве H.

2. Спектральный анализ оператора $\mathbb{A}$. Применяя преобразование Лапласа к уравнению (1) с начальными условиями

$$u(+0) = 0, \quad u^{(1)}(+0) = 0, \quad u(t) = 0, \quad t < 0,$$

получаем уравнение $L(\lambda)\hat{u}(\lambda) = 0,$ где $\hat{u}(\lambda)$ – преобразование Лапласа функции $u(t),$ оператор-функция $L(\lambda)$ является символом уравнения (1) и имеет вид

$$L(\lambda) = \lambda^2 I + A + B - \hat{K}_1(\lambda)A - \hat{K}_2(\lambda)B,$$

$\hat{K}_i(\lambda),$ $i = 1, 2,$ – преобразования Лапласа ядер $K_i(t),$ $i = 1, 2,$ имеющие представления

$$\hat{K}_i(\lambda) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{d\mu_i(\tau)}{\lambda + \tau}, \quad i = 1, 2.$$

Определение 3. Множество значений $\lambda \in \mathbb{C}$ называется *резольвентным множеством* $R(L)$ оператор-функции $L(\lambda),$ если для любого $\lambda \in R(L)$ оператор-функция $L^{-1}(\lambda)$ существует и ограничена. Множество $\sigma(L) = \mathbb{C} \backslash R(L)$ называется *спектром оператор-функции* $L(\lambda).$

Теорема 1. *Пусть выполнены условия (4) и* $\operatorname{supp} d\mu_k \subset (d, +\infty),$ *где* $d > 0,$ $k = 1, 2.$ *Тогда спектр оператор-функции* $L(\lambda)$ *и спектр оператора* $\mathbb{A}$ *лежат в открытой левой полуплоскости* $\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda < 0\},$ *при этом невещественный спектр оператор-функции* $L(\lambda)$ *совпадает с невещественным спектром оператора* $\mathbb{A},$ *симметричен относительно вещественной оси, состоит из изолированных точек конечной алгебраической кратности, не имеющих конечных точек накопления.*

Доказательство теоремы 1 содержится в статье [10]. Условия (4) являются существенными для устойчивости задачи (1), (2). Определим локализацию невещественной части спектра оператора $\mathbb{A}$ и оператор-функции $L(\lambda)$ в случае, когда меры $d\mu_k(\tau),$ $k = 1, 2,$ имеют компактный носитель.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия (4) и носитель меры* $d\mu_k(\tau),$ $k = 1, 2,$ *принадлежит отрезку* $[d_1, d_2],$ $0 < d_1 < d_2 < +\infty.$ *Тогда невещественная часть спектра оператора* $\mathbb{A}$ *и оператор-функции* $L(\lambda)$ *принадлежит множеству*

$$\Omega := \{\lambda \in \mathbb{C} : \alpha_1 \leqslant \operatorname{Re} \lambda \leqslant \alpha_2\},$$

где

$$\alpha_1 = -\frac{1}{2} \sup_{\|f\|=1} \left[\frac{K_1(0)(Af, f) + K_2(0)(Bf, f)}{((A + B)f, f)} \right], \quad f \in D(A), \tag{7}$$

$$\alpha_2 = -\frac{1}{2} \inf_{\|f\|=1} \left[\int\limits_{d_1}^{d_2} \frac{(Af, f)\, d\mu_1(\tau)}{((A + B)f, f) + \tau^2} + \int\limits_{d_1}^{d_2} \frac{(Bf, f)\, d\mu_2(\tau)}{((A + B)f, f) + \tau^2} \right], \quad f \in D(A). \tag{8}$$

Доказательство теоремы 2 приведено в статье [11].

Пусть носители мер $d\mu_k(\tau),$ $k = 1, 2,$ принадлежат отрезку $[d_1, d_2],$ $0 < d_1 < d_2 < +\infty.$ Тогда на основании представлений (23), (35) из работы [8] и теоремы 7 из [11] заключаем, что вещественная часть спектра оператора $\mathbb{A}$ принадлежит множеству $[-d_2, \tilde{x}_0),$ где точка $\tilde{x}_0$ принадлежит интервалу $(-d_1, 0).$ Кроме того, из утверждения теоремы 7 следует существование такого числа $\delta > 0,$ что внутри контура $\Gamma = \{x + iy \in \mathbb{C} : x \in [-d_2 - \delta, \tilde{x}_0 + \delta],\ y = \pm\delta\}$ нет невещественных точек спектра оператора $\mathbb{A}.$

Обозначим через $\mathbb{Q}$ проектор Рисса: $\mathbb{Q} = -1/(2\pi i) \int_\Gamma (\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I})^{-1} d\lambda.$

Рассмотрим подпространства $\mathbb{H}_1 := \mathbb{Q}\mathbb{H},$ $\mathbb{H}_2 := (\mathbb{I} - \mathbb{Q})\mathbb{H}.$ Подпространство $\mathbb{H}_1$ отвечает вещественной части спектра оператора $\mathbb{A}.$

3. Базисность Рисса из подпространств. Приведём хорошо известные определения из монографий [12] и [13].

Определение 4. Последовательность $\{\mathcal{H}_k\}_{k=1}^{\infty}$ ненулевых подпространств $\mathcal{H}_k \subset \mathcal{H}$ называется *базисом* (из подпространств) пространства $\mathcal{H},$ если любой вектор $x \in \mathcal{H}$ разлагается единственным образом в ряд вида $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k,$ где $x_k \in \mathcal{H}_k,$ $k \in \mathbb{N},$ сходящийся по норме пространства $\mathcal{H}.$

Определение 5. Базис из подпространств $\{\mathcal{H}_k\}_{k=1}^{\infty}$ называется *эквивалентным ортогональному базису* (базисом Рисса) в пространстве $\mathcal{H}$, если существует ограниченный и ограниченно обратимый оператор $\mathcal{A}$ такой, что система подпространств $\{\mathcal{A}\mathcal{H}_k\}_{k=1}^{\infty}$ является ортогональным базисом в пространстве $\mathcal{H}$.

Следуя [14], через $\Re$ обозначим множество таких неубывающих функций $\nu(r)$, определённых при достаточно больших вещественных r, что для каждой функции $\nu(r) \in \Re$ существует постоянная $a > 1$, для которой $\nu(ar) \geqslant 2\nu(r)$ при достаточно больших r. Пусть $\Im$ – множество неубывающих функций $\nu(r)$, обладающих свойством: для каждого $\varepsilon > 0$ найдётся такое число $\delta > 0$, что $\nu(r + \delta r) \leqslant (1 + \varepsilon)\nu(r)$.

Обозначим через $N(t)$ число собственных значений оператора $(A + B)^{1/2}$ (с учётом кратности), меньших t $(t > 0)$.

Основным результатом данной работы является следующая

Теорема 3 (о базисности Рисса из подпространств). *Пусть выполнено условие (4), носители мер $d\mu_k(\tau)$, $k = 1, 2$, принадлежат отрезку $[d_1, d_2]$, $0 < d_1 < d_2 < +\infty$, и выполнены условия*

$$N(t) \in \Re \bigcap \Im, \quad t \to +\infty, \quad \lim_{t \to +\infty} (N(t)t^{-1}) < \infty.$$

Тогда существует такая последовательность положительных чисел t_k

$$\{t_k\}_{k=1}^{\infty}, \quad t_{-k} = -t_k, \quad t_k < t_{k+1}, \quad k \in \mathbb{Z}; \quad t_k \to \pm\infty, \quad k \to \pm\infty, \quad t_0 = 0,$$

что система корневых подпространств $\{W_k\}_{k=1}^{\infty}$ оператора $\mathbb{A}$, соответствующих прямоугольникам $\pi_k = \{\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R} : \alpha_1 \leqslant \operatorname{Re}\lambda \leqslant \alpha_2, t_{k-1} < \operatorname{Im}\lambda \leqslant t_k\}$, $k \in \mathbb{Z}$, где α_1 и α_2 определяются формулами (7), (8), является базисом, эквивалентным ортогональному в подпространстве $\mathbb{H}_2$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ильюшин А.А., Победря Б.Е.* Основы математической теории термовязкоупругости. М., 1970.
2. *Christensen R.M.* Theory of Viscoelasticity. An Introduction. New York; London, 1971.
3. *Amendola G., Fabrizio M., Golden J.M.* Thermodynamics of Materials with Memory. Theory and Applications. New-York; Dordrecht; Heidelberg; London, 2012.
4. *Gurtin M.E., Pipkin A.C.* General theory of heat conduction with finite wave speed // Arch. Rat. Mech. Anal. 1968. V. 31. P. 113–126.
5. *Власов В.В., Раутиан Н.А.* Спектральный анализ функционально-дифференциальных уравнений. М., 2016.
6. *Гельфанд И.М., Виленкин Н.Я.* Некоторые применения гармонического анализа. Оснащённые гильбертовы пространства. М., 1961.
7. *Крейн С.Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховых пространствах. М., 1967.
8. *Раутиан Н.А.* О свойствах полугрупп, порождаемых вольтерровыми интегро-дифференциальными уравнениями с ядрами, представимыми интегралами Стилтьеса // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 9. С. 1255–1272.
9. *Власов В.В., Раутиан Н.А.* Корректная разрешимость вольтерровых интегро-дифференциальных уравнений в гильбертовых пространствах // Дифференц. уравнения. 2022. Т. 58. № 10. С. 1410–1426.
10. *Rautian N.A.* On the properties of the generators of semigroups associated with Volterra integro-differential equations // Differ. Equat. 2021. V. 57. № 12. P. 1652–1664.
11. *Rautian N.A.* Studying Volterra integro-differential equations by methods of the theory of operator semigroups // Differ. Equat. 2021. V. 57. № 12. P. 1665–1684.
12. *Гохберг И.Ц., Крейн М.Г.* Введение в теорию линейных несамосопряжённых операторов в гильбертовом пространстве. М., 1967.
13. *Маркус А.С.* Введение в спектральную теорию полиномиальных операторных пучков. Кишинёв, 1986.
14. *Радзиевский Г.В.* Асимптотика распределения характеристических чисел оператор-функций, аналитических в угле // Мат. сб. 1980. Т. 112. № 3. С. 396–420.

Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова,
Московский центр фундаментальной
и прикладной математики

Поступила в редакцию 15.12.2022 г.
После доработки 15.12.2022 г.
Принята к публикации 22.12.2022 г.