*ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 2, с. 280–282*

## КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.927.4+517.988.63

# О РАЗРЕШИМОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ГЛАВНОЙ ПОЛОЖИТЕЛЬНО ОДНОРОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

**© 2023 г. Э. Мухамадиев, А. Н. Наимов**

Исследована разрешимость периодической задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, в которой выделена главная нелинейная часть, являющаяся положительно однородным (порядка больше единицы) отображением, остальная часть называется возмущением. Доказано, что если невозмущённая система уравнений не имеет ненулевых ограниченных решений, то периодическая задача разрешима при любом возмущении тогда и только тогда, когда отлично от нуля вращение положительно однородного отображения на единичной сфере. Полученный результат представляет интерес с точки зрения применения и развития методов нелинейного анализа в теории дифференциальных и интегральных уравнений.

DOI: 10.31857/S0374064123020140, EDN: PWFIRZ

**1. Введение и основной результат.** Рассмотрим периодическую задачу следующего вида:

$$x'(t) = P(x(t)) + f(t, x(t)), \quad x(t) \in \mathbb{R}^n, \quad t \in (0, \omega), \tag{1}$$

$$x(0) = x(\omega). \tag{2}$$

Здесь $\mathbb{R}^n$ – евклидово пространство $n$-мерных векторов, $n \geqslant 2$, $\omega > 0$, $P : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ – непрерывное и положительно однородное отображение порядка $m > 1$, т.е. $P(\lambda y) \equiv \lambda^m P(y)$ для любого $\lambda > 0$. Отображение $f : \mathbb{R}^{1+n} \mapsto \mathbb{R}^n$ непрерывно, $\omega$-периодично по $t$ и удовлетворяет условию

$$\lim_{|y|\to\infty} |y|^{-m} \max_{0\leqslant t\leqslant\omega} |f(t, y)| = 0.$$

Отображение $P$ называем *главной положительно однородной нелинейностью*, а отображение $f$ – *возмущением*. Множество таких возмущений $f$ обозначим через $\mathbb{R}(n, \omega, m)$.

Решением периодической задачи (1), (2) называем вектор-функцию $x \in C^1([0, \omega]; \mathbb{R}^n)$, которая удовлетворяет системе уравнений (1) и условию периодичности (2). Такое решение $\omega$-периодично и гладко продолжимо на $\mathbb{R}^1 = (-\infty, +\infty)$. Разрешимость задачи (1), (2) исследована в следующей постановке: каким условиям должно удовлетворять отображение $P$, чтобы при любом возмущении $f \in \mathbb{R}(n, \omega, m)$ существовало хотя бы одно решение задачи (1), (2).

Периодическая задача вида (1), (2) исследована в работах [1; 2, с. 331–338]. Из результатов этих работ следует, что для заданного непрерывного и положительно однородного (порядка $m > 1$) отображения $P$ задача (1), (2) разрешима при любом $f \in \mathbb{R}(n, \omega, m)$, если выполнены два условия:

1) невозмущённая система уравнений

$$z'(t) = P(z(t)), \quad z(t) \in \mathbb{R}^n, \quad t \in (-\infty, +\infty), \tag{3}$$

не имеет ненулевых ограниченных решений;

2) вращение $\gamma(P)$ векторного поля $P : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ на единичной сфере $|y| = 1$ отлично от нуля.

В настоящей работе доказано, что если выполнено условие 1), то выполнение условия $\gamma(P) \neq 0$ также необходимо для разрешимости задачи (1), (2) при любом $f \in \mathbb{R}(n,\omega,m)$. Справедлива следующая

**Теорема.** *Пусть для заданного непрерывного и положительно однородного (порядка* $m > 1$*) отображения* $P : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ *система уравнений (3) не имеет ненулевых ограниченных решений. Тогда для разрешимости задачи (1), (2) при любом* $f \in \mathbb{R}(n,\omega,m)$ *необходимо и достаточно, чтобы* $\gamma(P) \neq 0$.

Сформулированная теорема в частных случаях доказана в статьях [3, 4]. В [4] выведена формула эффективного вычисления $\gamma(P)$ для одного класса градиентных векторных полей.

Существование периодических решений для систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений исследовано многими авторами. Можно отметить работы [5, 6], где применяются идеи и методы, близкие к предложенным в настоящей работе. Например, в [6] получены достаточные условия, которым должна удовлетворять асимптотически устойчивая в целом автономная система дифференциальных уравнений, заданная в $\mathbb{R}^n$, чтобы при любом её $\omega$-периодическом возмущении она имела $\omega$-периодическое решение.

**2. Доказательство теоремы.** Достаточность условия $\gamma(P) \neq 0$ следует из результатов работ [1; 2, с. 331–338].

**Необходимость.** Пусть $\gamma(P) = 0$. Используя теорему Хопфа о невырожденном продолжении непрерывного конечномерного векторного поля [2, с. 24, теорема 5.2], построим отображение $f \in \mathbb{R}(n,\omega,m)$, при котором задача (1), (2) неразрешима. Согласно теореме Хопфа из равенства $\gamma(P) = 0$ вытекает, что векторное поле $P(y)$ можно непрерывно продолжить без нулей внутри шара $|y| < 1$ некоторой формулой $Q(y)$: $P(y) = Q(y)$ при $|y| = 1$ и $Q(y) \neq 0$ при $|y| < 1$.

Рассмотрим систему уравнений

$$x'(t) = P(x(t)) + g(x(t)), \quad x(t) \in \mathbb{R}^n, \tag{4}$$

где отображение $g$ определено формулой

$$g(y) = \begin{cases} 0, & |y| \geqslant 1, \\ Q(y) - P(y), & |y| < 1. \end{cases}$$

Очевидно, что $g \in \mathbb{R}(n,\omega,m)$ и

$$P(y) + g(y) \neq 0 \quad \text{для любого} \quad y \in \mathbb{R}^n. \tag{5}$$

Верна следующая

**Лемма.** *Система уравнений (4) при некотором* $\omega_0 > 0$ *не имеет* $\omega_0$*-периодических решений.*

**Доказательство.** Предположим, что такое число $\omega_0 > 0$ не существует. Тогда существует последовательность периодических решений $x_k(t)$, $k \in \mathbb{N}$, системы уравнений (4) с периодами $\omega_k = 1/k$, $k \in \mathbb{N}$. В силу периодичности решений имеем

$$\frac{1}{\omega_k}\int\limits_0^{\omega_k} \langle P(x_k(t)) + g(x_k(t)), y\rangle dt = 0 \quad \text{для любого} \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{6}$$

где $\langle \cdot\,,\cdot \rangle$ – скалярное произведение в пространстве $\mathbb{R}^n$. Если вектор-функции $x_k(t)$, $k \in \mathbb{N}$, равномерно ограничены, т.е. справедливо неравенство

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \max_{t\in\mathbb{R}^1} |x_k(t)| < \infty, \tag{7}$$

то они, как решения системы уравнений (4), равностепенно непрерывны. Без ограничения общности можно считать, что последовательность функций $x_k(t)$ равномерно сходится к функции $x_0(t)$ на отрезке $[0,1]$. Перейдём в (6) к пределу при $k \to \infty$ и получим равенство

$$\langle P(x_0(0)) + g(x_0(0)), y\rangle = 0 \quad \text{для любого} \quad y \in \mathbb{R}^n,$$

что противоречит (5). Таким образом, для завершения доказательства леммы остаётся показать оценку (7).

Предположим, что оценка (7) не верна. Тогда можно считать, что

$$r_k = \max_{t\in\mathbb{R}^1} |x_k(t)| = |x_k(t_k)| \to \infty \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Рассмотрим функции $z_k(t) = r_k^{-1} x_k(t_k + r_k^{1-m} t)$, $t \in \mathbb{R}^1$, $k \in \mathbb{N}$. Для этих функций имеем

$$z_k'(t) = P(z_k(t)) + r_k^{-m} g(z_k(t)), \quad |z_k(t)| \leqslant |z_k(0)| = 1, \quad t \in \mathbb{R}^1, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Переходя в этих соотношениях к пределу, получим

$$z_0'(t) = P(z_0(t)), \quad |z_0(t)| \leqslant |z_0(0)| = 1, \quad t \in \mathbb{R}^1,$$

а это противоречит тому, что система уравнений (3) не имеет ненулевых ограниченных решений. Следовательно, оценка (7) верна. Лемма доказана.

В системе уравнений (4) произведём замену $z(t) = \lambda_0 x(\lambda_0^{m-1} t)$, где $\lambda_0 = (\omega_0/\omega)^{1/(m-1)}$. Тогда получим следующую систему уравнений:

$$z'(t) = P(z(t)) + \lambda_0^m g(\lambda_0^{-1} z(t)), \quad z(t) \in \mathbb{R}^n. \tag{8}$$

Очевидно, что всякому $\omega$-периодическому решению системы (8) соответствует $\omega_0$-периодическое решение системы (4), поэтому в силу леммы 1 система уравнений (8) не имеет $\omega$-периодических решений. Таким образом, при $f(y) = \lambda_0^m g(\lambda_0^{-1} y)$ задача (1), (2) неразрешима. Теорема доказана.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 23-21-00032).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Мухамадиев Э.* К теории периодических решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Докл. АН СССР. 1970. Т. 194. № 3. С. 510–513.
2. *Красносельский М.А., Забрейко П.П.* Геометрические методы нелинейного анализа. М., 1975.
3. *Мухамадиев Э., Наимов А.Н.* Критерии существования периодических и ограниченных решений для трёхмерных систем дифференциальных уравнений // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2021. Т. 27. № 1. С. 157–172.
4. *Мухамадиев Э., Наимов А.Н.* Об априорной оценке и существовании периодических решений для одного класса систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Изв. вузов. Математика. 2022. № 4. С. 37–48.
5. *Звягин В.Г., Корнев С.В.* Метод направляющих функций в задаче о существовании периодических решений дифференциальных уравнений // Соврем. математика. Фунд. направления. 2015. Т. 58. С. 59–81.
6. *Перов А.И., Каверина В.К.* Об одной задаче Владимира Ивановича Зубова // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 2. С. 269–272.

Вологодский государственный университет

Поступила в редакцию 27.07.2022 г.
После доработки 27.07.2022 г.
Принята к публикации 21.10.2022 г.