ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 2, с. 283–292

ХРОНИКА

О СЕМИНАРЕ ПО ПРОБЛЕМАМ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ И УПРАВЛЕНИЯ ПРИ МОСКОВСКОМ ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ им. М.В. ЛОМОНОСОВА*)

Ниже публикуются краткие аннотации докладов, состоявшихся в осеннем семестре 2022 г. (предыдущее сообщение о работе семинара дано в журнале “Дифференц. уравнения”. 2022. Т. 58. № 8; за дополнительной информацией обращаться по адресу: nds@cs.msu.su)**).

DOI: 10.31857/S0374064123020152, EDN: PWFOAU

А. В. Ильин, А. С. Фурсов (МГУ ВМК, Москва, Россия), “О задаче стабилизации переключаемой линейной системы с соизмеримыми запаздываниями” (26.09.2022).

В статье [1] исследовалась проблема цифровой стабилизации переключаемой линейной системы с запаздыванием в управлении. При этом предполагалось, что запаздывание одинаково для всех режимов рассматриваемой переключаемой системы. Для указанной системы была сформулирована задача построения цифрового стабилизирующего регулятора в форме динамической обратной связи по выходу. В результате для её решения был предложен алгоритм, включающий два основных шага – переход от исходной непрерывной системы к её точной дискретной модели (вообще говоря, более высокого динамического порядка) и поиск дискретного динамического регулятора для полученной переключаемой дискретной системы.

В настоящей работе предлагается обобщить приведённую задачу стабилизации на случай, когда режимы переключаемой системы имеют различные запаздывания в управлении, а именно рассматривается непрерывная скалярная переключаемая линейная система с соизмеримыми запаздываниями в управлении

$$\dot{x}(t) = A_\sigma x(t) + b_\sigma u(t-\theta_\sigma), \quad y(t) = c_\sigma x(t), \quad \sigma \in S_\tau, \quad t \geqslant 0, \tag{1}$$

где $\sigma : R_+ \to I = \{1,\ldots,m\}$ – непрерывная справа кусочно-постоянная функция (ненаблюдаемый переключающий сигнал) с конечным числом разрывов (переключений) на любом конечном промежутке; S_τ – множество переключающих сигналов σ, для которых время между любыми двумя соседними переключениями не меньше τ; $x \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния, $y \in \mathbb{R}$ – измеряемый скалярный выход, $u \in \mathbb{R}$ – управляющий вход; $A_\sigma = A\circ\sigma$ – композиция отображения $A : I \to \{A_1,\ldots,A_m\}$ и переключающего сигнала σ; $b_\sigma = b\circ\sigma$, $c_\sigma = c\circ\sigma$ и $\theta_\sigma = \theta\circ\sigma$ – аналогичные композиции для отображений $b : I \to \{b_1,\ldots,b_m\}$, $c : I \to \{c_1,\ldots,c_m\}$, $\theta : I \to \{\theta_1,\ldots,\theta_m\}$. Здесь $\theta_i > 0$ – величины постоянных запаздываний, причём θ_i/θ_j – рациональное число для любой пары $i,j \in I$.

Значение функции σ в каждый момент времени определяет активный режим (c_i, A_i, b_i) переключаемой системы (1), описываемый линейной стационарной системой с запаздыванием в управлении

$$\dot{x}(t) = A_i x(t) + b_i u(t-\theta_i), \quad y(t) = c_i x(t).$$

Решением уравнения состояния системы (1) при заданном управлении $u(t)$ (считаем, что $u(t) \equiv 0$ при $t \leqslant 0$), начальном условии $x(0) = x_0$ и переключающем сигнале $\sigma \in S_\tau$ является решение линейной нестационарной системы с запаздыванием

$$\dot{x} = A_{\sigma(t)}x + b_{\sigma(t)}u(t-\theta_i), \quad x(0) = x_0.$$

*) Семинар основан академиками РАН С.В. Емельяновым и С.К. Коровиным.

**) Составитель хроники А.В. Ильин.

Для переключаемой линейной системы (1) с заданным $\tau > 0$ и ненаблюдаемыми переключающими сигналами $\sigma \in S_\tau$ требуется построить цифровой регулятор вида

$$u(t) = \sum_{j=0}^{[t/T]} u[jT]S(t-jT), \quad S(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0,T], \\ 0, & t \notin [0,T], \end{cases} \tag{2}$$

$$v[(l+1)T] = Qv[lT] + qy[lT], \quad u[lT] = Hv[lT] + hy[lT], \quad v[0] = v_0, \tag{3}$$

обеспечивающий S_τ-устойчивость замкнутой непрерывно-дискретной системы

$$\dot{x}(t) = A_\sigma x(t) + b_\sigma u(t-\theta_\sigma),$$
$$v[(l+1)T] = Qv[lT] + qc_\sigma x[lT], \quad \sigma(t) \in S_\tau, \quad x(0) = x_0, \quad v[0] = v_0, \tag{4}$$

где

$$u(t-\theta_i) = \begin{cases} \sum_{j=0}^{[(t-\theta_i)/T]} (Hv[lT] + hc_\sigma x[lT])S(t-\theta_i-jT), & \text{если } t \geqslant \theta_i, \\ 0, & \text{если } 0 \leqslant t < \theta_i. \end{cases}$$

Система (4) записана при условии, что моменты времени t и lT согласованы, $l = [t/T]$, т.е.

$$lT \leqslant t < (l+1)T, \quad l \in \mathbb{N}.$$

Здесь T – период квантования по времени t (считаем, что $T < \tau$ и для любого i найдётся такое $\gamma_i \in N$, что $\theta_i = \gamma_i T$), $[\cdot]$ – целая часть действительного числа, $Q \in \mathbb{R}^{r\times r}$, $q \in \mathbb{R}^{r\times 1}$, $H \in \mathbb{R}^{1\times r}$, $h \in \mathbb{R}$ (r – порядок регулятора), $u[\cdot]$, $y[\cdot]$, $v[\cdot]$ – дискретные функции, определённые на последовательности $\{lT\}_{l=0}^{\infty}$, формирующий элемент представлен фиксатором нулевого порядка [2, с. 25].

Замкнутую непрерывно-дискретную систему (4) называем *S_τ-устойчивой*, а регулятор (2), (3) – *стабилизирующим*, если для любых $x(0)$, $v[0]$ и $\sigma \in S_\tau$ для соответствующего решения выполнено условие

$$\left\| \begin{matrix} x(t) \\ v[lT] \end{matrix} \right\| \to 0 \quad \text{при} \quad t \to +\infty, \quad l = [t/T]. \tag{5}$$

Для решения поставленной задачи предлагается использовать подход, разработанный в статье [1], модифицируя его с учётом наличия соизмеримых запаздываний в режимах исходной переключаемой системы (1). При этом предполагается, что общая схема построения цифрового регулятора (2), (3) должна включать следующие основные шаги:

1) переход от непрерывной системы (1) к её точной дискретной модели (см. [1]) с учётом, что на её входе используется фиксатор нулевого порядка (точная дискретная модель является переключаемой дискретной системой с режимами, описываемыми системами разностных уравнений, вообще говоря, различных динамических порядков, не содержащих запаздываний);

2) описание режимов полученной дискретной модели с помощью передаточных функций;

3) построение семейства $\mathcal{R}$ одновременно стабилизирующих регуляторов на основе алгоритма SIVIA [3, с. 81] для режимов дискретной модели, представленных передаточными функциями;

4) построение процедуры поиска на множестве $\mathcal{R}$ стабилизирующего дискретного регулятора вида (3) с использованием метода расширения динамического порядка [4, с. 205] и достаточного условия устойчивости переключаемых дискретных систем на основе метода функций Ляпунова [1].

Работа выполнена при финансовой поддержке Московского центра фундаментальной и прикладной математики.

Литература. 1. Фурсов А.С., Миняев С.И., Гусева В.С. Построение цифрового стабилизатора для переключаемой линейной системы с запаздыванием в управлении // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54. № 8. С. 1132–1141. 2. Поляков К.Ю. Основы теории цифровых систем управления. СПб, 2002. 3. Жолен Л., Кифер М., Дидри О., Вальтер Э. Прикладной интервальный анализ. М.; Ижевск, 2007. 4. Фурсов А.С. Одновременная стабилизация: теория построения универсального регулятора для семейства динамических объектов. М., 2016.

А. К. Деменчук (ИМ НАН Беларуси, Минск, Беларусь) “Управление асинхронным спектром линейных периодических систем с диагональным представлением среднего значения матрицы коэффициентов” (10.10.2022).

Будем рассматривать линейную систему управления

$$\dot{x} = A(t)x + Bu, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad n \geqslant 2, \tag{1}$$

в которой $A(t)$ – непрерывная ω-периодическая $n\times n$-матрица, B – постоянная $n\times r$-матрица, $r \leqslant n$.

Исследование вопросов управляемости периодических систем развивалось в двух направлениях. В первом предполагалось, что спектр частот решения разрешённой относительно производной дифференциальной системы полностью определяется частотами её правой части (см., например, [1, 2] и др.). Начало второго было предопределено в работах Х. Массеры [3], Я. Курцвейля и О. Вейводы [4], Н.П. Еругина [5] и др., в которых, в частности, установлено, что система обыкновенных дифференциальных периодических (почти периодических) уравнений может допускать такие решения, что пересечение частотных модулей решения и правой части системы тривиально. Позднее такие решения были названы *сильно нерегулярными*, их частотный спектр – *асинхронным*, а описываемые ими колебания – *асинхронными*. Отметим, что в периодическом случае сильная нерегулярность означает несоизмеримость периодов решения и самой системы. Асинхронные колебания реализованы в ряде технических устройств (см. [6] и др.). Для указанного направления была поставлена задача построения систем, обладающих сильно нерегулярными периодическими решениями в виде задачи управления асинхронным спектром [7; 8, гл. 3]. Вопросы разрешимости данной задачи для системы (1) с программным управлением и с нулевым средним значением матрицы коэффициентов исследованы в работе [9], а с невырожденным – в [10]. Случай максимального ранга матрицы при управлении изучен в статье [11].

В настоящем докладе обсуждается случай, когда у матрицы при управлении имеется нулевой блок, а среднее значение матрицы коэффициентов линейным невырожденным преобразованием приводится к диагональному виду.

В качестве управляющего воздействия $u(\cdot)$ в системе (1) будем использовать непрерывные на вещественной оси периодические r-вектор-функции, множество показателей Фурье которых $\operatorname{Exp}(u)$ содержится в модуле частот $\operatorname{Mod}(A)$ матрицы коэффициентов $A(\cdot)$. Применительно к системе (1) задача управления асинхронным спектром с целевым множеством L состоит в следующем: выбрать такое программное управление

$$u = u(t), \quad \operatorname{Mod}(u) \subseteq \operatorname{Mod}(A) \tag{2}$$

из указанного допустимого множества, чтобы система

$$\dot{x} = A(t)x + Bu(t) \tag{3}$$

имела сильно нерегулярное периодическое решение с заданным спектром частот L.

Как отмечено выше, если матрица при управлении имеет максимальный ранг, то решение такой задачи известно [11]. Поэтому далее считаем, что ранг матрицы B меньше числа её столбцов, т.е.

$$\operatorname{rank} B = r_1 < r. \tag{4}$$

В таком случае из книги [12, с. 20] вытекает, что найдётся постоянная неособенная $n \times n$-матрица S такая, что у $n\times r_1$-матрицы D, полученной при умножении слева матрицы B на S, последние $n - r_1$ строк будут нулевыми, т.е.

$$D = SB = \begin{bmatrix} D_{r_1,r} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \operatorname{rank} D_{r_1,r} = r_1. \tag{5}$$

Один из алгоритмов построения такого рода матрицы S для преобразования столбцов приведён в работе [8, с. 43].

В дальнейшем будем также предполагать, у матрицы $C(t) = SA(t)S^{-1}$ среднее значение является диагональной матрицей:

$$\hat{C} = \frac{1}{\omega}\int_0^\omega C(s)\,ds = \operatorname{diag}(\hat{c}_{11}, \ldots, \hat{c}_{nn}), \quad \det \hat{C} = 0. \tag{6}$$

Введём линейную замену переменных

$$y = Sx, \quad \det S \neq 0, \tag{7}$$

где матрица S определяется условием (5). Тогда система (1) приводится к системе

$$\dot{y} = SA(t)S^{-1}y + SBu = C(t)y + Dy. \tag{8}$$

Отметим, что в силу неособенности матрицы S преобразования (7) множества частот матриц коэффициентов систем (1) и (8) совпадают.

Тогда поставленная задача будет равносильна следующей задаче: выбрать такое программное управление (2), чтобы система

$$\dot{y} = C(t)x + Du(t)$$

имела сильно нерегулярное периодическое решение с заданным спектром частот L. Для описанного класса систем (1) исследуем вопрос о разрешимости задачи управления асинхронным спектром. Пусть L – целевое множество частот, элементы которого попарно различны, соизмеримы между собой, и ненулевые среди них несоизмеримы с числом $2\pi/\omega$. Обозначим через $C_1(t)$ матрицу размерности $r_1 \times n$, составленную из последних r_1 строк матрицы коэффициентов $C(t)$ системы (8). Справедлива

Теорема. *Для класса систем (1), подчинённых условиям (4), (6), задача управления асинхронным спектром с целевым множеством L разрешима в том и только в том случае, когда матрица $C_1(t)$ имеет неполный столбцовый ранг, т.е.*

$$\operatorname{rank}_{\mathrm{col}} C_1 < n,$$

при этом сильно нерегулярное решение системы (3) может быть только стационарным.

Замечание. Если на целевое множество наложить дополнительное условие об отсутствии нулевой частоты, то в такой усиленной постановке задача управления асинхронным спектром для класса систем (1), (4), (6) не разрешима.

Исследования выполнены в Институте математики НАН Беларуси в рамках ГПФИ “Конвергенция–2025” (подпрограмма “Математические модели и методы”).

Литература. 1. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М., 1968. 2. Макаров Е.К., Попова С.Н. Управляемость асимптотических инвариантов нестационарных линейных систем. Минск, 2012. 3. Massera J.L. Observaciones sobre les soluciones periodicas de ecuaciones diferenciales // Bol. de la Facultad de Ingenieria. 1950. V. 4. № 1. P. 37–45. 4. Курцвейль Я., Вейвода О. О периодических и почти периодических решениях систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Чехосл. мат. журн. 1955. Т. 5. № 3. С. 362–370. 5. Еругин Н.П. О периодических решениях дифференциальных уравнений // Прикл. математика и механика. 1956. Т. 20. Вып. 1. С. 148–152. 6. Пеннер Д.И., Дубошинский Д.Б., Козаков Д.Б. Асинхронное возбуждение незатухающих колебаний // Успехи физ. наук. 1973. Т. 109. Вып. 1. С. 402–406. 7. Деменчук А.К. Задача управления спектром сильно нерегулярных периодических колебаний // Докл. НАН Беларуси. 2009. Т. 53. № 4. С. 37–42. 8. Деменчук А.К. Асинхронные колебания в дифференциальных системах. Условия существования и управления. Саарбрюккен, 2012. 9. Деменчук А.К. Управление асинхронным спектром линейных систем с нулевым средним значением матрицы коэффициентов // Тр. Ин-та математики. 2018. Т. 26. № 1. С. 11–16. 10. Деменчук А.К. Управление асинхронным спектром линейных систем с матрицей при управлении максимального ранга // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. 2020. Т. 28. № 1–2. С. 11–16. 11. Деменчук А.К. Управление асинхронным спектром линейных систем с матрицей при управлении максимального ранга // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. 2019. Т. 27. № 1–2. С. 23–28. 12. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. М., 1989.

С. Н. Попова, М. В. Федорова (УдГУ, Ижевск, Россия) “Необходимые и достаточные условия пропорциональной локальной управляемости спектра показателей Ляпунова линейной дифференциальной системы” (24.10.2022).

Рассмотрим линейную управляемую систему

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m, \tag{1}$$

с равномерно непрерывными и ограниченными на множестве $\mathbb{R}$ матрицами коэффициентов $A(\cdot)$ и $B(\cdot)$. Полный спектр показателей Ляпунова [1] свободной системы

$$\dot{x} = A(t)x, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{2}$$

обозначим через $\lambda_1(A) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n(A)$.

Выбрав управление $u(\cdot)$ в системе (1) в виде линейной обратной связи $u = U(t)x$, получим замкнутую систему вида

$$\dot{x} = (A(t) + B(t)U(t))x, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{3}$$

Будем называть $U(\cdot)$ *матричным управлением* для системы (3). Будем считать, что матричное управление $U(\cdot)$ *допустимо* для системы (3), если матрица $U(\cdot)$ кусочно-непрерывна и ограничена на $\mathbb{R}$.

Пусть зафиксировано некоторое допустимое для системы (3) матричное управление $U(\cdot)$. Тогда для замкнутой системы (3) с выбранным управлением $U(\cdot)$ определён полный спектр показателей Ляпунова $\lambda_1(A+BU) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n(A+BU)$.

Определение 1 [2]. Будем говорить, что система (3) обладает свойством *пропорциональной локальной управляемости полного спектра показателей Ляпунова*, если найдутся такие $\ell > 0$ и $\delta > 0$, что для любого набора чисел $\mu_1 \leqslant \ldots \leqslant \mu_n$, удовлетворяющих неравенству $\max\limits_{i=\overline{1,n}} |\mu_i - \lambda_i(A)| \leqslant \delta$, существует допустимое для системы (3) матричное управление $U(\cdot)$ такое, что $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \|U(t)\| \leqslant \ell \max\limits_{i=\overline{1,n}} |\mu_i - \lambda_i(A)|$ и $\lambda_i(A+BU) = \mu_i$, $i = \overline{1,n}$.

Определение 2 [3]. Система (1) называется *равномерно вполне управляемой*, если существуют такие $\alpha > 0$ и $\vartheta > 0$, что матрица Калмана

$$W(t, t+\vartheta) \equiv \int\limits_{t}^{t+\vartheta} X(t,s)B(s)B^{\mathrm{T}}(s)X^{\mathrm{T}}(t,s)\,ds$$

системы (1) удовлетворяет неравенству $W(t,t+\vartheta) \geqslant \alpha E$ при всех $t \in \mathbb{R}$; здесь $X(t,s)$ – матрица Коши свободной системы (2), E – единичная матрица.

Определение 3 [1]. Показатели Ляпунова системы (2) называются *устойчивыми*, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\delta > 0$, что для всякой кусочно-непрерывной функции $Q\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times n}$, удовлетворяющей условию $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \|Q(t)\| < \delta$, выполнено неравенство

$$\max_{i=\overline{1,n}} |\lambda_i(A) - \lambda_i(A+Q)| < \varepsilon;$$

здесь $\lambda_1(A+Q) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n(A+Q)$ – полный спектр показателей Ляпунова возмущённой системы $\dot{y} = (A(t) + Q(t))y$.

В работе [4] установлено, что если система (1) равномерно вполне управляема, а показатели Ляпунова системы (2) устойчивы, то полный спектр показателей Ляпунова системы (3) пропорционально локально управляем. Заметим, что условие равномерной полной управляемости системы (1) не является необходимым для пропорциональной локальной управляемости спектра Ляпунова даже в случае устойчивости показателей системы (2).

Пример. Определим последовательность моментов времени $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ рекуррентными формулами $t_1 = 1$, $t_{2k} = kt_{2k-1}$, $t_{2k+1} = k + t_{2k}$, $k \in \mathbb{N}$, и рассмотрим кусочно-линейную и непрерывную на $\mathbb{R}$ функцию $b(\cdot)$ такую, что $b(t) \equiv 1$ при $t \in (-\infty, 2)$ и $t \in [t_{2k-1}, t_{2k})$; $b(t) \equiv 0$ при $t \in [t_{2k} + 1/2, t_{2k+1} - 1/2)$, где $k = 2, 3, \ldots$ Рассмотрим систему (1), где $n = m = 2$, $A(t) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ – нулевая матрица, $B(t) = \operatorname{diag}(b(t), 1)$. Эта система не является равномерно вполне управляемой, так как для каждого $\vartheta > 0$ найдётся номер $k \equiv [\vartheta] + 2$ такой, что для матрицы Калмана этой системы и для вектора $\xi = \operatorname{col}(1, 0) \in \mathbb{R}^2$ имеет место равенство $\xi^{\mathrm{T}} W(t_{2k} + 1/2, t_{2k} + 1/2 + \vartheta)\xi = 0$. Свободная система $\dot{x} = 0$ стационарна, поэтому её полный спектр показателей Ляпунова $\lambda(A) = (0, 0)$ устойчив.

Зафиксируем произвольное $\delta > 0$ и возьмём любую пару чисел $-\delta \leqslant \mu_1 \leqslant \mu_2 \leqslant \delta$. Замкнём систему (1) обратной связью $u = U(t)x$, где $U(t) \equiv \operatorname{diag}(\mu_1, \mu_2)$. Получим систему $\dot{x} = \operatorname{diag}(b(t)\mu_1, \mu_2)x$, полный спектр показателей Ляпунова которой состоит из чисел $\mu_1 \leqslant \mu_2$. Кроме того, $\|U(t)\| \leqslant \max\limits_{j=1,2} |\mu_j - \lambda_j(A)|$. Это означает, что для построенной системы выполнены условия определения 1, где $\delta > 0$ – произвольное число и $\ell = 1$.

Для нахождения необходимых и достаточных условий пропорциональной локальной управляемости спектра применим концепцию оболочки Бебутова линейной управляемой системы.

Систему (1) отождествим с функцией $t \mapsto \sigma(t) \equiv (A(t), B(t)) \in \mathbb{R}^{n\times(n+m)}$. Обозначим через $\sigma_s(t) \equiv \sigma(t+s)$ сдвиг σ на $s \in \mathbb{R}$ и рассмотрим множество $\mathfrak{R}(\sigma)$ – замыкание множества $\{\sigma_s(\cdot)\colon s \in \mathbb{R}\}$ в топологии равномерной сходимости на отрезках. Метрика в $\mathfrak{R}(\sigma)$ может быть задана равенством

$$\rho(\widetilde{\sigma}, \widehat{\sigma}) = \sup_{t\in\mathbb{R}} \min\{\|\widetilde{\sigma}(t) - \widehat{\sigma}(t)\|, |t|^{-1}\}.$$

Пространство $(\mathfrak{R}(\sigma), \rho)$ компактно. Оно называется *оболочкой Бебутова* системы σ. Каждую функцию $\widehat{\sigma}(\cdot) = (\widehat{A}(\cdot), \widehat{B}(\cdot)) \in \mathfrak{R}(\sigma)$ отождествим с линейной управляемой системой

$$\dot{x} = \widehat{A}(t)x + \widehat{B}(t)u, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m.$$

Теорема. *Пусть показатели Ляпунова системы (2) устойчивы. Система (1) равномерно вполне управляема тогда и только тогда, когда для каждой системы из оболочки Бебутова системы (1) соответствующая замкнутая система обладает свойством пропорциональной локальной управляемости полного спектра показателей Ляпунова.*

Пример (продолжение). Так как рассмотренная система не является равномерно вполне управляемой, то из теоремы следует, что в её оболочке Бебутова содержится система, для которой замкнутая система не обладает свойством пропорциональной локальной управляемости спектра. Действительно, несложно проверить, что оболочка Бебутова содержит систему $\dot{x} = \operatorname{diag}(0, 1)u$, замыкая которую произвольной обратной связью $u = U(t)x$ с матрицей $U(\cdot) = \{u_{ij}(\cdot)\}_{i,j=1}^2$, получаем систему

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ u_{21}(t) & u_{22}(t) \end{pmatrix} x, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^2. \tag{4}$$

Каждая фундаментальная система решений системы (4) содержит решение $x(\cdot)$ с ненулевой первой координатой $x_1(\cdot)$. Для показателя Ляпунова этого решения имеем неравенство $\lambda[x] \geqslant \lambda[x_1] = 0$. Следовательно, для каждого допустимого матричного управления $U(\cdot)$ справедливо неравенство $\lambda_2(A + BU) \geqslant 0$. Это означает, что невозможно добиться выполнения равенства $\lambda_2(A+BU) = \mu_2$, где $\mu_2 < 0$. Следовательно, полный спектр замкнутой системы (4) не является пропорционально локально управляемым.

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках государственного задания № 075-01265-22-00 (проект FEWS-2020-0010).

Литература. 1. Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В. Теория показателей Ляпунова и её приложения к вопросам устойчивости. М., 1966. 2. Макаров Е.К., Попова С.Н. Управляемость асимптотических инвариантов нестационарных линейных систем. Минск, 2012. 3. Kalman R.E. Contribution to the theory of optimal control // Boletin de la Sociedad Matematika Mexicana. 1960. V. 5. № 1. P. 102–119. 4. Попова С.Н. К свойству пропорциональной управляемости ляпуновских инвариантов линейных систем // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39. № 11. С. 1578–1579.

А. А. Козлов (ПГУ им. Евфросинии Полоцкой, Полоцк, Беларусь) "Равномерная глобальная достижимость дискретных периодических систем" (14.11.2022).

Пусть $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{R}$ – множества целых и вещественных чисел соответственно; $\mathbb{R}^n$ – n-мерное векторное евклидово пространство; $\mathcal{M}_{mn}$ – пространство вещественных $m\times n$-матриц со спектральной (операторной) нормой; $\mathcal{M}_n := \mathcal{M}_{nn}$; $E \in \mathcal{M}_n$ – единичная матрица.

Рассмотрим линейную дискретную систему управления [1, с. 214]

$$x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m, \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{1}$$

в которой $\{A(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$, $\{B(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ – ограниченные ω-периодические последовательности вещественных $n\times n$- и $n\times m$-матриц $(\omega \in \mathbb{N}\setminus\{1\})$ соответственно; $x = x(k) : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}^n$ – вектор состояния системы; $u = u(k) : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}^m$ – управляющее воздействие. Матричная функция $A : \mathbb{Z} \to \mathcal{M}_n$ также является *вполне ограниченной* [2] на $\mathbb{Z}$, т.е. при каждом $k \in \mathbb{Z}$ матрица $A(k)$ обратима и найдётся число $a \geqslant 1$ такое, что будет справедливо неравенство $\sup\limits_{k\in\mathbb{Z}}(\|A(k)\| + \|A^{-1}(k)\|) \leqslant a$.

Управление в системе (1) выберем линейным по состоянию $u(k) = U(k)x(k)$, где $U(k)$, $k \in \mathbb{Z}$, – некоторая последовательность вещественных $m\times n$-матриц. В результате получим замкнутую линейную однородную систему с дискретным временем

$$x(k+1) = (A(k) + B(k)U(k))x(k), \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{2}$$

Определение 1. Матричное управление $U : \mathbb{Z} \to \mathcal{M}_{mn}$ будем называть *допустимым* [3] для системы (1), если выполнены условия:

1) управление $U(\cdot)$ ограничено на $\mathbb{Z}$, т.е. справедливо неравенство

$$\sup_{k\in\mathbb{Z}} \|U(k)\| < \infty;$$

2) при каждом $k \in \mathbb{Z}$ матрица $A(k) + B(k)U(k)$ обратима, причём имеет место оценка

$$\sup_{k\in\mathbb{Z}} \|(A(k) + B(k)U(k))^{-1}\| < \infty.$$

Обозначим через $X_U(k,s) \in \mathcal{M}_n$, $k,s \in \mathbb{Z}$, матрицу Коши [1, с. 13–14] системы (2) с управлением U, а через $X(k,s) := X_0(k,s) \in \mathcal{M}_n$, $k,s \in \mathbb{Z}$, – матрицу Коши системы (2) с нулевым управлением, т.е. линейной дискретной системы $x(k+1) = A(k)x(k)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{Z}$.

Определение 2. Будем говорить, что дискретная система (2) обладает свойством *равномерной глобальной достижимости*, если существует такое число $T > 0$, что для любых $r > 0$ и $\rho > 0$ найдётся величина $d = d(r,\rho) > 0$, при которой для произвольной матрицы $\Lambda \in \mathcal{M}_n$, удовлетворяющей неравенствам $\|\Lambda - E\| \leqslant r$ и $|\det\Lambda| \geqslant \rho$, и всякого числа $k_0 \in \mathbb{Z}$ существует допустимое управление $U\colon [k_0, k_0+T] \to \mathcal{M}_{mn}$, удовлетворяющее при всех $k \in [k_0, k_0+T]$ оценке $\|U(k)\| \leqslant d(r,\rho)$ и гарантирующее для матрицы Коши $X_U(\,\cdot\,,\cdot\,)$ системы (2) с этим управлением на данном отрезке выполнение равенства $X_U(k_0+T, k_0) = \Lambda$.

Впервые термин "равномерная глобальная достижимость" был введен В.А. Зайцевым и Е.Л. Тонковым в работе [4] для линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Свойство равномерной глобальной достижимости линейной системы (2) с дискретным временем (равно как и с непрерывным) даёт возможность управления всем конечномерным базисом пространства решений этой системы на произвольном целочисленном временно́м отрезке фиксированной длины $T \in \mathbb{N}$, т.е. позволяет построить такое допустимое управление U, что множество $\{x_i(k), k \in \mathbb{Z}\}_{i=1}^n$ линейно-независимых решений системы (2) с этим управлением и начальными условиями – соответствующими векторами e_i, $i = \overline{1,n}$, канонического ортонормированного базиса пространства $\mathbb{R}^n$ – через время T будет совпадать с произвольным наперёд заданным базисом этого пространства.

Задача о равномерной глобальной достижимости зачастую (см., например, [5, с. 281–324]) решается при условии равномерной полной управляемости системы (1), соответствующей (2).

Определение 3 [6, 7]. Система (1) обладает *свойством равномерной полной управляемости*, если существуют такие числа $\alpha > 0$ и $K \in \mathbb{N}$, что при любых числе $k_0 \in \mathbb{Z}$ и векторе $x_1 \in \mathbb{R}^n$ найдётся управление $u(k)$, $k = \overline{k_0, k_0 + K - 1}$, удовлетворяющее оценке $\|u(k)\| \leqslant \alpha \|x_1\|$, при котором для решения $x(k)$ системы (1) с этим управлением u и начальным условием $x(k_0) = 0$ обеспечивается равенство $x(k_0 + K) = x_1$.

В статье [8] автором настоящей работы получен критерий равномерной глобальной достижимости линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. В представленном докладе предложен частичный перенос этих результатов (достаточного условия) на дискретные периодические системы (2). Таким образом, основным результатом данной работы является следующая

Теорема 1. *Пусть матрица $A(\cdot)$ системы (1) вполне ограничена, а матрица $B(\cdot)$ ограничена на $\mathbb{Z}$. Тогда если дискретная система управления (1) с ω-периодическими коэффициентами равномерно вполне управляема, то соответствующая замкнутая дискретная система (2) обладает свойством равномерной глобальной достижимости.*

Данная теорема использует подход С.Н. Поповой, предложенный ею в [9], и основана на следующем утверждении, установленном коллективом авторов в работе [3].

Теорема 2 [3]. *Пусть матрица $A(k)$, $k \in \mathbb{Z}$, вполне ограничена, $B(k)$, $k \in \mathbb{Z}$, – ограничена, и система (1) является равномерно вполне управляемой. Тогда для любого $k_0 \in \mathbb{Z}$ существует матрица $F = F(k_0) \in \mathcal{M}_n$, обеспечивающая выполнение следующего свойства: при любых $r > 0$ и $0 < \rho \leqslant 1$ существуют не зависящие от k_0 величины $\beta_1(r, \rho) > 0$ и $\beta_2(r, \rho) > 0$ такие, что для всякой матрицы $H \in \mathcal{M}_n$, главные угловые миноры которой не меньшие величины ρ, а сама матрица удовлетворяет оценке $\|H - E\| \leqslant r$, найдётся управление $U = U(k)$, $k = \overline{k_0, k_0 + K - 1}$, при котором выполняются соотношения $\max\limits_{k \in \{k_0, \ldots, k_0+K-1\}} \|U(k)\| \leqslant \beta_1(r, \rho) \|H - E\|$ и $\max\limits_{k \in \{k_0, \ldots, k_0+K-1\}} \|(A(k) + B(k)U(k))^{-1}\| \leqslant \beta_2(r, \rho)$, а для матрицы Коши системы (2) – равенство $X_U(k_0 + K, k_0) = X(k_0 + K, k_0) F H F^{-1}$.*

Также теорема 1 основана на найденной автором настоящей работы факторизации произвольной квадратной матрицы с отделённым от нуля положительным определителем.

Теорема 3. *Для любых числа $\rho > 0$ и матрицы $H \in \mathcal{M}_n$, удовлетворяющей оценке $\det H \geqslant \rho > 0$, найдутся величина $\theta = \theta(\rho) > 0$ и матрицы $H_i \in \mathcal{M}_n$, $i = \overline{1, 5}$, все главные угловые миноры которых не меньше величины θ, такие, что выполняется равенство $H = \prod_{i=1}^{5} H_i$.*

Литература. 1. Гайшун И.В. Системы с дискретным временем. Минск, 2001. 2. Демидович В.Б. Об одном признаке устойчивости разностных уравнений // Дифференц. уравнения. 1969. Т. 5. № 7. С. 1247–1255. 3. Babiarz A., Czornik A., Makarov E., Niezabitowski M., Popova S. Pole placement theorem of discrete time-varying linear systems // SIAM J. on Control and Optimiz. 2017. V. 55. № 2. P. 671–692. 4. Зайцев В.А., Тонков Е.Л. Достижимость, согласованность и метод поворотов В.М. Миллионщикова // Изв. вузов. Математика. 1999. № 2 (441). С. 45–56. 5. Макаров Е.К., Попова С.Н. Управляемость асимптотических инвариантов нестационарных линейных систем. Минск, 2012. 6. Kalman R.E. Contribution to the theory of optimal control // Boletín de la Sociedad Matemátika Mexicana. 1960. V. 5. № 1. P. 102–119. 7. Тонков Е.Л. Критерий равномерной управляемости и стабилизация линейной рекуррентной системы // Дифференц. уравнения. 1979. Т. 15. № 10. С. 1804–1813. 8. Козлов А.А. Критерий равномерной глобальной достижимости линейных периодических систем // Вестн. Удмуртского ун-та. Математика. Механика. Компьют. науки. 2020. Т. 30. Вып. 2. С. 221–236. 9. Попова С.Н. Глобальная управляемость полной совокупности ляпуновских инвариантов периодических систем // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39. № 12. С. 1627–1636.

В. Е. Хартовский (ФИТМ ГрГУ им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь) "О методах асимптотической оценки решения линейных дифференциально-алгебраических систем с запаздыванием" (05.12.2022).

Объект исследования – линейная автономная дифференциально-алгебраическая система с запаздыванием

$$\frac{d}{dt}(Dx(t)) = A(\lambda_h)x(t), \quad t > 0, \tag{1}$$

$$y(t) = C(\lambda_h)x(t), \quad t > 0, \tag{2}$$

где $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $A(\lambda) \in \mathbb{R}^{n\times n}[\lambda]$, $C(\lambda) \in \mathbb{R}^{r\times n}[\lambda]$ ($\mathbb{R}^{k\times m}[\lambda]$ – множество полиномиальных матриц); λ_h – оператор сдвига, определённый для заданного $h>0$ правилом $\lambda_h f(t) = f(t-h)$; $y(t)$, $t>0$, – наблюдаемый выходной сигнал. Решение уравнения (1) однозначно определяется начальным условием $x(t) = \eta(t)$, $t \in [-mh, 0]$, где η – неизвестная кусочно-непрерывная функция. Считаем, что уравнение (1) удовлетворяет условию полной регулярности: $\deg|pD - A(0)| = \operatorname{rank} D$. Заметим, что класс вполне регулярных систем (1) содержит в себе класс систем нейтрального типа. Кроме того, к таким системам в ряде случаев сводятся непрерывно-дискретные системы.

Требуется на основании выхода (2) получить оценку решения $x(t)$ уравнения (1).

Для систем нейтрального типа различные задачи получения оценки решения при помощи асимптотических наблюдателей исследованы в работах [1–3] (см. также библиографию в них), а в статьях [4, 5] построены финитные наблюдатели, ошибка которых есть финитная функция. В настоящем докладе подход, предложенный в [1; 2, с. 375], обобщается на случай системы (1), (2).

Обозначим

$$\deg C(\lambda) = m, \quad B_k = \left(\frac{1}{k!}\frac{d^k}{d\lambda^k}C(\lambda)|_{\lambda=0}\right)^{\mathrm{T}}, \quad k = \overline{0,m},$$

и составим дескрипторное уравнение

$$B_0 g(k+1) + \sum_{i=1}^{m} B_i g(k+1-i) = 0, \quad k = m, m+1, \ldots, \quad g(i) = \widetilde{g}_i, \quad i = \overline{1,m}, \quad \widetilde{g}_i \in \mathbb{R}^r. \tag{3}$$

Решение задачи (3) существует тогда и только тогда, когда $\widetilde{g}_{m-i} = T_i c$, $i = \overline{1,m}$, где $T_i \in \mathbb{R}^{r\times r_0}$ ($r_0 \in \mathbb{N}$) – матрицы, построенные специальным образом, $c \in \mathbb{R}^{r_0}$ – произвольный вектор (см. [6]). Пусть $S \in \mathbb{R}^{r_0\times r_0}$ – любое фиксированное решение системы $B_0T_1S + \sum_{i=1}^m B_iT_i = 0$, $T_kS = T_{k-1}$, $k = \overline{2,m}$. Положим $T = T_m$, $G_0 = B_0T$, $G_i = G_{i-1}S + B_iT$, $i = \overline{1,m-1}$, $G(\lambda) = (\sum_{i=0}^{m-1}\lambda^i G_i)^{\mathrm{T}}$. Способ выбора всех возможных матриц S в зависимости от их спектра описан в работе [7].

Определим наблюдатель

$$\frac{d}{dt}(Dz(t)) = A(\lambda_h)z(t) + \mathfrak{M}_{00}[C(\lambda_h)z_t] + \mathfrak{M}_{01}[z_{1t}] + \mathfrak{M}_{02}[z_{2t}] - \mathfrak{M}_{00}[y_t],$$

$$\dot z_1(t) = \mathfrak{M}_{10}[C(\lambda_h)z_t] + \mathfrak{M}_{11}[z_{1t}] + \mathfrak{M}_{12}[z_{2t}] - \mathfrak{M}_{10}[y_t],$$

$$z_2(t) = M_{20}(\lambda_h)C(\lambda_h)z(t) + M_{21}(\lambda)z_1(t) + M_{22}(\lambda_h)z_2(t) - M_{20}(\lambda_h)y(t), \quad t > t_0. \tag{4}$$

Здесь $z \in \mathbb{R}^n$, $z_i \in \mathbb{R}^{n_i}$, $i = 1, 2$; запись $\mathfrak{M}_{ij}[f_t]$ для кусочно-непрерывной функции $f(t)$ означает функцию вида

$$\mathfrak{M}_{ij}[f_t] = J_{ij}(\lambda_h)f(t) + \sum_{k=0}^{m_{ij}}\int_0^h J_{ij}^{(k)}(s)f(t-kh-s)ds,$$

где $J_{ij}(\lambda)$ – полиномиальная матрица, функции $J_{ij}^{(k)}(s)$ имеют вид

$$J_{ij}^{(k)}(s) = \sum_{\rho=0}^{\tilde m_k} e^{\alpha_{ijk\rho}s}(J_{ij1}^{(k\rho)}(s)\cos(\beta_{ijk\rho}s) + J_{ij2}^{(k\rho)}(s)\sin(\beta_{ijk\rho}s))$$

($\alpha_{ijk\rho}, \beta_{ijk\rho} \in \mathbb{R}$, $J_{ij1}^{(k\rho)}(s)$, $J_{ij2}^{(k\rho)}(s)$ – полиномиальные матрицы подходящих размеров); матрицы $M_{20}(\lambda) \in \mathbb{R}^{n_2\times n}[\lambda]$, $M_{2j}(\lambda) \in \mathbb{R}^{n_2\times n_j}[\lambda]$, $j = 1, 2$, $M_{22}(0) = 0$; t_0 – некоторый момент времени.

Зададим для системы (4) начальные условия

$$z(t) = \tilde{z}(t), \quad z_i(t) = \tilde{z}_i(t), \quad t \in [t_0 - h_1, t_0], \quad i = 3, 4. \tag{5}$$

Здесь h_1 – длина отрезка последействия системы (4), $\tilde{z}$, $\tilde{z}_1$, $\tilde{z}_2$ – кусочно-непрерывные функции. Компонента z вектора решения $\operatorname{col}[z, z_1, z_2]$ системы (4) есть оценка решения x системы (1), $\varepsilon = z - x$ – ошибка оценивания. Обозначим $W(p, \lambda) = pD - A(\lambda)$; Γ_1, Γ_2 – фундаментальные матрицы решений алгебраических уравнений $\gamma D = 0_{1\times n}$, $D\gamma = 0_{n\times 1}$; $\Delta(p, e^{-ph})$ – характеристическая матрица системы (4).

Теорема 1. *Для того чтобы для системы (1), (2) существовал наблюдатель (4) такой, что $\varepsilon(t)$ является векторной компонентой решения однородной $(y \equiv 0)$ системы (4), для которой $|\Delta(p, e^{-ph})| = \nu d(p, e^{-ph})$, где $d(p, e^{-ph})$ – любой наперёд заданный характеристический квазиполином (с достаточно большой величиной $\deg_p d(p, \lambda)$), $\nu \in \mathbb{R}$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия*

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} W(p, e^{-ph}) \\ C(e^{-ph}) \end{bmatrix} = n, \quad p \in \mathbb{C}; \quad \operatorname{rank}\begin{bmatrix} \Gamma_1 A(\lambda)\Gamma_2 \\ C(\lambda)\Gamma_2 \end{bmatrix} = n - \operatorname{rank} D, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{6}$$

Таким образом, выбирая характеристический квазиполином однородной $(y \equiv 0)$ системы (4), можно в силу теоремы 1 построить наблюдатель (4), ошибка оценивания которого стремится к нулю с заданной скоростью.

Предположим, что условия (6) нарушаются. Выясним возможности асимптотической оценки решения системы (1), (2) в этом случае. Обозначим через $\mu_i(S)$ собственные значения матрицы S, ρ_S – спектральный радиус матрицы S, $\rho_S = \max\{|\mu_i(S)|\}$.

Теорема 2. *Для того чтобы для системы (1), (2) существовал наблюдатель (4) такой, что $\|\varepsilon(t)\| \to 0$ при $t \to 0$, каково бы ни было начальное условие (5), достаточно, чтобы существовала матрица S, для которой $\rho_S < 1$, и выполнялись условия*

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} W(p, e^{-ph}) \\ C(e^{-ph}) \\ G(e^{-ph}) \end{bmatrix} = n, \quad p \in \mathbb{C}; \quad \operatorname{rank}\begin{bmatrix} \Gamma_1 A(\lambda)\Gamma_2 \\ C(\lambda)\Gamma_2 \\ G(\lambda)\Gamma_2 \end{bmatrix} = n - \operatorname{rank} D, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{7}$$

Теорема 3. *Пусть для системы (1), (2) выполняются условия (7) и существует матрица S, для которой $\rho_S \leqslant 1$, и размеры всех жордановых клеток матрицы S, отвечающих собственным значениями $\mu_i(S)$ таким, что $|\mu_i(S)| = 1$, равны единице. Тогда существует наблюдатель (4) такой, что для любого начального условия (5) найдутся $\beta \in \mathbb{R}$, $k_0 \in \mathbb{N}$ и функция $\omega(t)$, $\omega(t) \to 0$ при $t \to +\infty$, обеспечивающие неравенство $\|\varepsilon(t)\| \leqslant \beta + \omega(t)$, $t > t_0 + k_0 h$.*

Литература. 1. Хартовский В.Е. Синтез наблюдателей для линейных систем нейтрального типа // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 3. С. 409–422. 2. Хартовский В.Е. Управление линейными системами нейтрального типа: качественный анализ и реализация обратных связей. Гродно, 2022. 3. Хартовский В.Е. К вопросу об асимптотической оценке решения линейных стационарных систем нейтрального типа с соизмеримыми запаздываниями // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 12. С. 1701–1716. 4. Метельский А.В., Хартовский В.Е. Синтез финитного наблюдателя для линейных систем нейтрального типа // Автоматика и телемеханика. 2019. № 12. С. 80–102. 5. Метельский А.В., Хартовский В.Е. О точном восстановлении решения линейных систем нейтрального типа // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 2. С. 265–285. 6. Хартовский В.Е. Об одном линейном автономном дескрипторном уравнении с дискретным временем. I. Приложение к задаче 0-управляемости // Вестн. Удмуртского ун-та. Математика. Механика. Компьют. науки. 2020. Вып. 2. С. 290–311. 7. Хартовский В.Е. Об одном линейном автономном дескрипторном уравнении с дискретным временем. II. Каноническое представление и структурные свойства // Изв. Ин-та математики и информатики Удмуртского гос. ун-та. 2020. Т. 56. С. 102–121.