ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 3, с. 295–302

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.925.51+517.926

О СОХРАНЕНИИ КВАДРАТИЧНОЙ ФУНКЦИИ ЛЯПУНОВА ЛИНЕЙНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ АВТОНОМНОЙ СИСТЕМЫ ПРИ СТАЦИОНАРНЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ ЕЁ КОЭФФИЦИЕНТОВ

© 2023 г. О. Г. Антоновская

Для автономной линейной однородной асимптотически устойчивой дифференциальной системы получены достаточные условия на малость возмущений в классе автономных линейных однородных систем, при выполнении которых квадратичная форма, являющаяся функцией Ляпунова для исходной системы, будет функцией Ляпунова и для возмущённой системы.

DOI: 10.31857/S0374064123030019, EDN: QTWXLY

Введение. Важное место в прямом (втором) методе Ляпунова занимает задача о построении в явном виде функции Ляпунова для тех или иных классов дифференциальных систем [1–3]. Для установления свойства устойчивости и нахождения качественных характеристик нелинейных непрерывных (дискретных) динамических систем, допускающих линеаризацию, вблизи их равновесных состояний могут быть использованы функции Ляпунова квадратичного вида [3, с. 33–45; 4, с. 120–132], построенные для соответствующих линеаризованных систем. При этом могут решаться вопросы построения квадратичной функции Ляпунова с некоторыми заданными свойствами, которые определяются особенностями исходной задачи [5–7]. Например, при решении прикладных динамических задач, когда интерес представляют не только качественные, но и количественные характеристики системы [8, 9], возникает необходимость использования ограничений на величину первой производной (первой разности) квадратичной функции Ляпунова $V(x)$ на заданной поверхности уровня $V(x)=V_0$, причём существенным является такой выбор её параметров, при котором выполнение неравенства $\dot V(x)<0$ $(\Delta V(x)<0)$ обеспечивается с заданным [10, 11] (в том числе максимальным [12, 13]) запасом.

В данной работе изучается вопрос, при каких условиях квадратичная функция Ляпунова, построенная для автономной линейной дифференциальной системы, будет оставаться функцией Ляпунова при изменении коэффициентов системы.

1. Квадратичная функция Ляпунова, удовлетворяющая заданному ограничению, для автономных линейных однородных систем дифференциальных уравнений.

1.1. Для фиксированного числа $n\in\mathbb{N}$ рассмотрим автономную линейную систему дифференциальных уравнений

$$\dot x = Ax, \quad x=(x_1,\ldots,x_n)^{\mathrm{т}}\in\mathbb{R}^n, \tag{1}$$

и квадратичную форму с постоянными коэффициентами

$$V(x)=x^{\mathrm{т}}Kx \quad (K^{\mathrm{т}}=K). \tag{2}$$

Элементы постоянных $n\times n$-матриц A и K вещественные. Первая производная $\dot V_{(1)}(x)$ квадратичной формы (2) в силу системы (1) также является квадратичной формой:

$$\dot V_{(1)}(x)=x^{\mathrm{т}}(A^{\mathrm{т}}K+KA)x. \tag{3}$$

Далее считаем, что собственные значения $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_n$ матрицы коэффициентов A системы (1), т.е. корни характеристического уравнения $\det(A-\lambda E_n)=0$, имеют отрицательные вещественные части, и что квадратичная форма (2) положительно определена (здесь и ниже E_n – единичная $n \times n$-матрица). Это предположение означает, в частности, что у системы (1) имеется [4, с. 35] квадратичная функция Ляпунова.

В работе [10] доказана

Теорема 1. *Пусть квадратичная форма (2) является функцией Ляпунова системы (1) и на заданной поверхности уровня* $V(x) = V_0 = \mathrm{const} > 0$ *функции* $V(x)$ *максимальное значение её первой производной (3) в силу системы (1) равно* δV_0. *Тогда для собственных значений* λ_i, $i = \overline{1,n}$, *матрицы коэффициентов системы (1) справедливо неравенство* $2 \max\limits_{i=\overline{1,n}} \operatorname{Re} \lambda_i \leqslant \delta < 0$, *а коэффициенты квадратичной формы (2) удовлетворяют равенству*

$$\det (A^{\mathrm{T}}K + KA - \delta K) = 0. \tag{4}$$

Замечание. В дальнейшем матрицу $A^{\mathrm{T}}K + KA$ квадратичной формы (3) обозначаем через A_K. Очевидно, что матрица A_K симметрична: $A_K = A_K^{\mathrm{T}}$. Пусть $A_K = (A_{km})_{k,m=1}^n$. Если $A = (a_{ik})_{i,k=1}^n$ и $K = (K_{ik})_{i,k=1}^n$, то для элементов матрицы A_K очевидны равенства

$$A_{km} = \sum_{i=1}^n (K_{im}a_{ik} + K_{ik}a_{im}), \quad k, m = \overline{1,n}, \tag{5}$$

в которых учтена симметричность матрицы K $(K_{ik} = K_{ki}$ для всех $k, i = \overline{1,n})$. В этих обозначениях равенство (4) запишется в виде $\det (A_{km} - \delta K_{km})_{k,m=1}^n = 0$.

Доказательство теоремы 1, приведённое в работе [10], основывается на решении соответствующей экстремальной задачи. Дадим другое её

Доказательство. Так как (2) – положительно определённая квадратичная форма, то корректно задан регулярный пучок $A_K - \mu K$ квадратичных форм [14, гл. 10, § 6], где μ – числовой параметр. Пусть $\mu_1 \leqslant \ldots \leqslant \mu_n$ – характеристические числа этого пучка [14, гл. 10, § 6], т.е. корни уравнения

$$\det (A_K - \mu K) = 0 \tag{6}$$

(все корни этого уравнения вещественные [14, гл. 10, § 6]). Тогда, согласно [14, гл. 10, § 7], имеет место равенство

$$\max_{x \neq \mathbf{0}} \frac{x^{\mathrm{T}} A_K x}{x^{\mathrm{T}} K x} = \mu_n. \tag{7}$$

Так как отношение $x^{\mathrm{T}}A_K x / x^{\mathrm{T}}Kx$ квадратичных форм на любой прямой, проходящей через начало координат, принимает, за исключением точки $x = \mathbf{0}$, одно и то же значение (вообще говоря, своё для каждой прямой), то

$$\max_{x \neq \mathbf{0}} \frac{x^{\mathrm{T}} A_K x}{x^{\mathrm{T}} K x} = \max_{V(x)=V_0>0} \frac{\dot{V}_{(1)}(x)}{V(x)} = \delta. \tag{8}$$

Из равенств (7) и (8) заключаем, что $\mu_n = \delta$, а значит, так как μ_n – корень уравнения (6), справедливо равенство (4).

По условию теоремы 1 квадратичная форма (2) является функцией Ляпунова системы (1), поэтому квадратичная форма (3) отрицательно определена, а значит, $\mu_n = \delta < 0$. Следовательно, для завершения доказательства теоремы остаётся установить справедливость неравенства $\delta \geqslant 2 \max\limits_{i=\overline{1,n}} \operatorname{Re} \lambda_i$. Пусть, без нарушения общности, вещественная часть собственного значения λ_n матрицы A не меньше, чем вещественные части остальных её собственных значений. Могут представиться только два случая: 1) $\operatorname{Im} \lambda_n = 0$; 2) $\operatorname{Im} \lambda_n \neq 0$. Рассмотрим каждый из них отдельно.

В случае 1) обозначим через $y \in \mathbb{R}^n$ собственный вектор матрицы A, отвечающий собственному значению λ_n. Тогда $Ay = \lambda_n y$ и $y^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}} = \lambda_n y^{\mathrm{T}}$. Поэтому верно равенство

$$y^{\mathrm{T}} A_K y = y^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}}K + KA)y = \lambda_n(y^{\mathrm{T}}Ky + y^{\mathrm{T}}Ky) = 2\lambda_n y^{\mathrm{T}}Ky,$$

в силу которого получаем оценку

$$\delta = \max_{x \neq \mathbf{0}} \frac{x^{\mathrm{T}} A_K x}{x^{\mathrm{T}} K x} \geqslant \frac{y^{\mathrm{T}} A_K y}{y^{\mathrm{T}} K y} = \frac{2\lambda_n y^{\mathrm{T}} K y}{y^{\mathrm{T}} K y} = 2\lambda_n = 2\,\mathrm{Re}\,\lambda_n.$$

В случае 2) собственному значению $\lambda_n = \alpha + i\beta$ матрицы A отвечает в пространстве $\mathbb{C}^n$ собственный вектор $y = y_1 + iy_2$, где $y_i \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2$. Раскрывая в равенстве $A(y_1 + iy_2) = (\alpha + i\beta)(y_1 + iy_2)$ скобки и отделяя вещественную и мнимую части, получаем $Ay_1 = \alpha y_1 - \beta y_2$, $Ay_2 = \beta y_1 + \alpha y_2$ и, следовательно, $y_1^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} = \alpha y_1^{\mathrm{T}} - \beta y_2^{\mathrm{T}}$, $y_2^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} = \beta y_1^{\mathrm{T}} + \alpha y_2^{\mathrm{T}}$. В силу двух последних соотношений несложно убедиться в том, что имеет место равенство

$$y_i^{\mathrm{T}} A_K y_i = 2\alpha y_i^{\mathrm{T}} K y_i + (-1)^i \beta (y_1^{\mathrm{T}} K y_2 + y_2^{\mathrm{T}} K y_1), \quad i = 1, 2. \tag{9}$$

Выберем тот вектор y_i, для которого второе слагаемое в правой части равенства (9) неотрицательно. Тогда при таком y_i вследствие (9) справедливо неравенство $y_i^{\mathrm{T}} A_K y_i \geqslant 2\alpha y_i^{\mathrm{T}} K y_i$, в силу которого и положительной определённости квадратичной формы (2) получаем оценку

$$\delta = \max_{x \neq \mathbf{0}} \frac{x^{\mathrm{T}} A_K x}{x^{\mathrm{T}} K x} \geqslant \frac{y_i^{\mathrm{T}} A_K y_i}{y_i^{\mathrm{T}} K y_i} \geqslant \frac{2\alpha y_i^{\mathrm{T}} K y_i}{y_i^{\mathrm{T}} K y_i} = 2\alpha = 2\,\mathrm{Re}\,\lambda_n.$$

Теорема доказана.

1.2. Заметим, что уравнение (6) может быть записано в виде $P_n(\mu) = 0$, где

$$P_n(\mu) = \mu^n + a_1\mu^{n-1} + a_2\mu^{n-2} + \ldots + a_{n-1}\mu + a_n, \tag{10}$$

$$a_k = (-1)^k (\det K)^{-1} \sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_k} \det K^{i_1, i_2, \ldots, i_k}, \quad k = \overline{1, n}, \quad a_n = (-1)^n (\det K)^{-1} \det A_K, \tag{11}$$

а матрица $K^{i_1, i_2, \ldots, i_k}$ получается из матрицы K заменой столбцов с номерами i_1, i_2, $\ldots$, i_k на одноимённые столбцы матрицы A_K. Коэффициенты (11) многочлена (10) получаются, если раскрыть определитель в (6) и разделить получившийся многочлен на коэффициент при старшей степени μ. Как отмечено в доказательстве теоремы 1, все корни многочлена $P_n(\mu)$ (см. (10)) вещественные [14, гл. 10, § 6].

Предположим, что построена квадратичная форма (2), которая является функцией Ляпунова системы (1). Пусть коэффициенты системы (1) изменились, т.е. система приняла вид

$$\dot{x} = (A + \Delta A)x, \tag{12}$$

где $\Delta A = (\Delta a_{ij})_{i,j=1}^n$ – постоянная вещественная матрица. Тогда для матрицы $(A + \Delta A)_K$ первой производной $\dot{V}_{(12)}(x)$ квадратичной формы (2) в силу системы (12) очевидно равенство

$$(A + \Delta A)_K = (A + \Delta A)^{\mathrm{T}} K + K(A + \Delta A) = (A^{\mathrm{T}} K + KA) + ((\Delta A)^{\mathrm{T}} K + K\Delta A) = A_K + (\Delta A)_K.$$

Поэтому величины A_{km} (см. (5)) преобразуются к виду $A_{km} + \Delta A_{km}$, где

$$\Delta A_{km} = \sum_{i=1}^{n} (K_{im}\Delta a_{ik} + K_{ik}\Delta a_{im}), \quad k, m = \overline{1, n}, \tag{13}$$

уравнение (6) примет вид

$$\det\,(A_K + (\Delta A)_K - \mu K) = 0, \tag{14}$$

а вместо многочлена (10) получим многочлен

$$P_n^{\Delta}(\mu) = \mu^n + (a_1 + \Delta a_1)\mu^{n-1} + (a_2 + \Delta a_2)\mu^{n-2} + \ldots + (a_{n-1} + \Delta a_{n-1})\mu + a_n + \Delta a_n, \tag{15}$$

где Δa_k – сумма произведений всех миноров матрицы $(\Delta A)_K = (\Delta A_{ij})_{i,j=1}^n$ до порядка k включительно на соответствующие им алгебраические дополнения из матрицы $K^{i_1,i_2,\ldots,i_k}$. В частности, нужный нам в дальнейшем коэффициент Δa_n равен

$$\Delta a_n = \frac{(-1)^n}{\det K}\sum_{p=1}^{n}\omega_p, \tag{16}$$

здесь

$$\omega_1 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\Delta A_{ij}A_j^i, \quad \omega_n = \det(\Delta A)_K \tag{17}$$

и

$$\omega_q = \sum_{i_1<\ldots<i_q}\sum_{j_1<\ldots<j_q}\begin{vmatrix}\Delta A_{i_1,j_1} & \Delta A_{i_1,j_2} & \ldots & \Delta A_{i_1,j_q}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \Delta A_{i_q,j_1} & \Delta A_{i_q,j_2} & \ldots & \Delta A_{i_q,j_q}\end{vmatrix} A_{j_1,\ldots,j_q}^{i_1,\ldots,i_q}, \quad q = \overline{2, n-1}, \tag{18}$$

где A_j^i – алгебраическое дополнение элемента A_{ij} в матрице A_K, а $A_{j_1,\ldots,j_k}^{i_1,\ldots,i_k}$ – алгебраическое дополнение минора матрицы A_K, построенного на строках с номерами $i_1, \ldots, i_k$ и столбцах с номерами $j_1, \ldots, j_k$. Многочлен (15) и величина (16) получаются, если раскрыть определитель в (14) с учётом равенств (13) и разделить получившийся многочлен на коэффициент при старшей степени μ.

Задача, рассматриваемая в работе, состоит в нахождении условий, которым должны удовлетворять возмущения, чтобы квадратичная функция Ляпунова (2), построенная для системы (1), оставалась функцией Ляпунова и для возмущённой системы (12). В следующем пункте уточним постановку задачи.

2. Об условиях, дающих решение задачи. Функция Ляпунова (2), построенная для системы (1), будет оставаться функцией Ляпунова и для системы (12), если и только если все собственные значения матрицы $A_K + (\Delta A)_K$ будут отрицательными.

2.1. Так как матрица $A_K + (\Delta A)_K$ симметричная, то все её собственные значения вещественны (см., например, [15, с. 204]). Значит, если у матрицы $A_K + (\Delta A)_K$ все собственные значения отрицательны, то все коэффициенты её характеристического многочлена $P_n^{\Delta}(\mu)$ положительны, что очевидно следует из формул Виета. Как хорошо известно [16, с. 92], для многочлена с вещественными коэффициентами (все корни которого не обязательно вещественны) условие положительности всех коэффициентов является необходимым условием того, чтобы все корни этого многочлена имели отрицательную вещественную часть, но, вообще говоря, не достаточным для многочленов степени выше двух. В рассматриваемом же нами случае многочлена, все корни которого вещественны, это необходимое условие является и достаточным. Действительно, если все коэффициенты многочлена, имеющего только вещественные корни, положительны, то значения этого многочлена на неотрицательной полуоси положительны, а значит, все его корни лежат на отрицательной полуоси. Таким образом, справедлива

Теорема 2. *Квадратичная форма (2), являющаяся функцией Ляпунова для системы (1), будет оставаться функцией Ляпунова и для системы (12), если и только если для матрицы* ΔA *выполняются неравенства* $a_k + \Delta a_k > 0$, $k = \overline{1, n}$.

Таким образом, чтобы проверить, будет ли квадратичная форма (2), являющаяся функцией Ляпунова системы (1), также и функцией Ляпунова системы (12), нужно в дополнение к найденным положительным коэффициентам a_k, $k = \overline{1, n}$, (см. формулы (11)) найти величины Δa_k, $k = \overline{1, n}$, (см. формулы (16)) и проверить выполнимость неравенств $a_k + \Delta a_k > 0$, $k = \overline{1, n}$. Для проверки этого необходимого и достаточного условия нужно вычислить все величины Δa_k, $k = \overline{1, n}$, что связано с большим количеством довольно объёмных вычислений. Можно предложить достаточное условие, для проверки которого требуется вычислить фактически только элемент Δa_n.

Чтобы сформулировать это достаточное условие, рассмотрим, наряду с системой (12), также параметрическое семейство уравнений

$$\dot{x} = (A + \tau\Delta A)x, \tag{19}$$

параметр τ в котором изменяется на отрезке $[0,1]$, и в которое системы (1) и (12) входят при $\tau = 0$ и $\tau = 1$ соответственно. Обозначим через $\Delta a_n(\tau)$ величину Δa_n, вычисленную при фиксированном τ для системы (19) по формуле (16), т.е. для системы (19) нужно в формулах (17) и (18) заменить ΔA_{ij} на $\tau\Delta A_{ij}$ и $(\Delta A)_K$ на $(\tau\Delta A)_K$. Тогда очевидно, что величина $\Delta a_n(\tau)$ представляет собой многочлен степени n переменной τ с нулевым свободным членом:

$$\Delta a_n(\tau) = \frac{(-1)^n}{\det K}\sum_{p=1}^{n}\omega_p\tau^p.$$

Обозначим через $P_n^{\tau\Delta}(\mu)$ многочлен $P_n^{\Delta}(\mu)$ (см. (15)), построенный для системы (19). Свободный член многочлена $P_n^{\tau\Delta}(\mu)$ равен $\Delta a_n(\tau) + a_n$ и является многочленом степени n с положительным свободным членом.

Предложение 1. *Если многочлен $\Delta a_n(\tau) + a_n$ при всех $\tau \in [0,1]$ положителен, то квадратичная форма (2), являющаяся функцией Ляпунова для системы (1), будет функцией Ляпунова и для системы (12).*

Доказательство. У многочлена $P_n^{\tau\Delta}(\mu)$, поскольку он при любом $\tau \in [0,1]$ является характеристическим многочленом симметрической матрицы, все корни вещественные. Корни многочлена являются непрерывными функциями его коэффициентов, поэтому корни многочлена $P_n^{\tau\Delta}(\mu)$ – непрерывные функции параметра τ. Так как при $\tau = 0$ все корни лежат на отрицательной полуоси, то, если бы при изменении параметра τ от 0 до 1 хотя бы один из корней перешёл на неотрицательную полуось, он, поскольку является непрерывной функцией τ, должен был бы при некотором значении $\tau_0 \in (0,1]$ стать равным нулю. Но тогда при $\tau = \tau_0$ многочлен $\Delta a_n(\tau) + a_n$, являясь произведением корней многочлена $P_n^{\tau\Delta}(\mu)$, должен равняться нулю, что противоречит условию предложения. Предложение доказано.

2.2. Поставим следующую задачу: для матрицы A найти такое значение $\varepsilon(A) > 0$, чтобы для любой матрицы ΔA, удовлетворяющей неравенству $\|\Delta A\| < \varepsilon(A)$, матрица $A_K + (\Delta A)_K$ была бы невырожденной (а значит, все её собственные значения имели бы отрицательные вещественные части). В приведённой постановке задачи величина $\varepsilon(A)$ зависит от выбора матричной нормы [15, с. 351], но заранее фиксировать эту норму нецелесообразно, а её выбор в каждом конкретном случае должен отдельно оговариваться.

Из теоремы 2 вытекает, что величина $\varepsilon(A)$ равна наибольшему из тех d, при которых для любой матрицы ΔA, принадлежащей открытому шару $\|\Delta A\| < d$, выполняются неравенства $a_k + \Delta a_k > 0$, $k = \overline{1,n}$. Из этой задачи на максимум для системы $n+1$ неравенств (содержащей $n^2 + 1$ неизвестных: n^2 элементов матрицы ΔA и величина d) получить в общем случае для величины $\varepsilon(A)$ выражение через элементы матрицы A, по-видимому, довольно сложно, если вообще возможно. Конечно, приведённое выше неравенство $a_k + \Delta a_k > 0$, $k = \overline{1,n}$, можно, как это следует из предложения 1, заменить условием: свободный член $\Delta a_n(\tau) + a_n$ многочлена $P_n^{\tau\Delta}(\mu)$ при всех $\tau \in [0,1)$ положителен. Но, по-видимому, аналитические трудности нахождения величины $\varepsilon(A)$ из этих условий сравнимы с трудностями нахождения этой величины из приведённой выше системы $n+1$ неравенств. Поэтому сформулируем два достаточных условия, решающих данную задачу.

Матрица $A_K + (\Delta A)_K$ будет невырожденной, если норма матрицы возмущения $(\Delta A)_K$ не превосходит радиуса невырожденности [17, с. 118–119] матрицы A_K. Другими словами, имеет место

Лемма. *Если матрица A_K отрицательно определена, то матрица $A_K + (\Delta A)_K$ будет отрицательно определённой при любой матрице $(\Delta A)_K$, удовлетворяющей неравенству*

$$\|(\Delta A)_K\| < \|A_K^{-1}\|^{-1} = \min_{i=\overline{1,n}} |\Lambda_i(A_K)|,$$

где $\Lambda_i(A_K)$ $(i = \overline{1,n})$ – собственные значения матрицы A_K. (Через $\|\cdot\|$ обозначена спектральная норма матрицы [15, с. 357].)

Из леммы очевидно вытекает

Предложение 2. *Если матрица* A_K *отрицательно определена и выполняется неравенство*

$$\|\Delta A\| < (2\|K\|)^{-1} \min_{i=\overline{1,n}} |\Lambda_i(A_K)|,$$

то отрицательно определённой будет и матрица $A_K + (\Delta A)_K$.

3. Два частных случая построения квадратичной функции Ляпунова с заданным максимумом на её поверхности уровня первой производной. Пусть квадратичная функция Ляпунова для системы (1) строится в соответствии с методикой работы [11], основанной на переходе к каноническим координатам.

3.1. Рассмотрим случай, когда все корни характеристического уравнения системы (1) вещественны и различны; без нарушения общности считаем, что $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n$. Тогда существует линейное преобразование координат

$$x = B\xi, \quad \xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n,$$

где B – невырожденная $n\times n$-матрица, приводящее систему (1) к каноническому виду [1, с. 121]

$$\dot{\xi} = A\xi, \quad i = \overline{1,n}, \quad A = \operatorname{diag}[\lambda_1, \ldots, \lambda_n]. \tag{20}$$

(У матрицы B её k-й столбец является собственным вектором матрицы A, соответствующим собственному значению λ_k, $k = \overline{1,n}$.) При этом квадратичные формы (2) и (3) перейдут соответственно в квадратичные формы $W(\xi)$ и $\dot{W}_{(20)}(\xi)$, причём (см. [10])

$$\max_{V=V_0} \frac{\dot{V}_{(1)}}{V} = \max_{W=V_0} \frac{\dot{W}_{(20)}}{W}, \quad \min_{V=V_0} \frac{\dot{V}_{(1)}}{V} = \min_{W=V_0} \frac{\dot{W}_{(20)}}{W}.$$

Таким образом, не ограничивая общности, можно предполагать, что система (1) имеет канонический вид (20). Тогда равенства (5) примут вид

$$A_{km} = (\lambda_m + \lambda_k)K_{km}, \quad k,m = \overline{1,n},$$

а уравнение (6) запишется следующим образом:

$$\det\left((\lambda_k + \lambda_m - \mu)K_{km}\right)_{k,m=1}^{n} = 0. \tag{21}$$

Построим для системы (1) квадратичную функцию Ляпунова (2), удовлетворяющую равенству $\max\limits_{V=V_0>0} \dot{V}_{(20)} = \delta V_0$, где в качестве заранее выбранной величины δ можно взять любое число из полуинтервала $[2\lambda_n, 0)$.

Квадратичную функцию Ляпунова с $\max\limits_{V=V_0>0} \dot{V}_{(20)} = \delta V_0$ зададим следующим образом:

$$V(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = \sum_{i=1}^{n-2} K_{ii}\xi_i^2 + K_{n-1,n-1}\xi_{n-1}^2 + 2K_{n-1,n}\xi_{n-1}\xi_n + K_{nn}\xi_n^2, \tag{22}$$

где $K_{ii} > 0$, $i = \overline{1,n}$, $K_{n-1,n}^2 = (1 - R(\delta))K_{n-1,n-1}K_{nn}$, а $R(\delta) = (\lambda_{n-1} - \lambda_n)^2(\lambda_{n-1} + \lambda_n - \delta)^{-2}$, т.е. матрица K построенной квадратичной формы имеет вид

$$K = \operatorname{diag}\left[K_{11}, \ldots, K_{n-2,n-2}, \begin{pmatrix} K_{n-1,n-1} & K_{n-1,n} \\ K_{n-1,n} & K_{n,n} \end{pmatrix}\right]. \tag{23}$$

Несложно убедиться в том, что при условии $\delta \in [2\lambda_n, 0)$ величина $R(\delta)$ принадлежит полуинтервалу $(0, 1]$, а квадратичные формы с матрицами K и A_K (матрицы A и K определены в (20) и (23)) соответственно положительно и отрицательно определены. Корнями уравнения (21) являются $\mu_1 = 2\lambda_1$, $\ldots$, $\mu_{n-2} = 2\lambda_{n-2}$, $\mu_{n-1} = 2(\lambda_{n-1} + \lambda_n) - \delta$, $\mu_n = \delta$ (то, что первые $n-2$ из этих значений корни уравнения (21), очевидно, в том, что два последних из них корни, проще всего убедиться непосредственной подстановкой в уравнение (21)). При этом в рассматриваемом случае при выборе матрицы квадратичной формы (23) наибольшим корнем уравнения (21) будет δ.

3.2. Рассмотрим случай, когда все корни характеристического уравнения системы (1) различны, причём среди корней с наибольшей вещественной частью имеются комплексно-сопряжённые между собой.

Пусть сначала корни $\lambda_1, \ \ldots, \ \lambda_{n-2}$ характеристического уравнения вещественны и только $\lambda_{n-1,n} = \alpha \pm i\beta, \ \ \alpha = \max\limits_{i=\overline{1,n}} \operatorname{Re}\lambda_i, \ \ \beta \neq 0.$ Тогда существует линейное невырожденное преобразование координат, приводящее систему (1) к каноническому виду [1, с. 121]

$$\dot{\xi} = A\xi, \quad A = \operatorname{diag}\left[\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-2}, \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}\right] \tag{24}$$

(здесь и в аналогичном случае ниже матрицу коэффициентов получившейся после линейной замены координат дифференциальной системы мы обозначаем снова через A). При этом квадратичные формы (2) и (3) перейдут соответственно в квадратичные формы $W(\xi)$ и $\dot{W}_{(24)}(\xi)$, причём (см. [10]) справедливы равенства

$$\max_{V=V_0} \frac{\dot{V}_{(1)}}{V} = \max_{W=V_0} \frac{\dot{W}_{(25)}}{W}, \quad \min_{V=V_0} \frac{\dot{V}_{(1)}}{V} = \min_{W=V_0} \frac{\dot{W}_{(25)}}{W}.$$

В этом случае для канонической системы дифференциальных уравнений (24) квадратичную функцию Ляпунова, удовлетворяющую условию $\max\limits_{V=V_0} \dot{V} = \delta V_0$, можно искать [11] в виде (22), где

$$(K_{n-1,n-1} + K_{nn})^2 = C(\delta)(K_{n-1,n-1}K_{nn} - K_{n-1,n}^2), \quad C(\delta) = (\delta - 2\alpha)^2\beta^{-2} + 4. \tag{25}$$

Нетрудно убедиться в том, что корнями уравнения (6) являются $\mu_1 = 2\lambda_1, \ \ldots, \ \mu_{n-2} = 2\lambda_{n-2}, \ \mu_{n-1} = 4\alpha - \delta, \ \mu_n = \delta$. В рассматриваемом случае при выборе (25) матрицы квадратичной формы наибольшим корнем уравнения (6) будет δ.

Пусть теперь среди корней характеристического уравнения имеется, кроме пары $\lambda_{n-1,n} = \alpha \pm i\beta, \ \beta \neq 0$, ещё одна пара комплексно-сопряжённых корней, скажем, пара $\lambda_{i-1,i} = \alpha_1 \pm i\beta_1$, $\beta_1 \neq 0$, а остальные корни вещественные. Тогда линейным невырожденным преобразованием координат система (1) может быть приведена к виду, аналогичному (24), но с матрицей

$$A = \operatorname{diag}\left[\lambda_1, \ldots, \lambda_{i-2}, \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ -\beta_1 & \alpha_1 \end{pmatrix}, \lambda_{i+1}, \ldots, \lambda_{n-2}, \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}\right].$$

Если искать квадратичную функцию Ляпунова для канонической системы в виде (22), где $K_{n-1,n-1}$ и K_{nn} связаны равенством (25), считая коэффициенты $K_{i-1,i-1}$ и K_{ii} равными между собой $(K_{i-1,i-1} = K_{ii})$, то корнями уравнения (6) будут $\mu_1 = 2\lambda_1, \ \ldots, \ \mu_{i-2} = 2\lambda_{i-2}$, $\mu_{i-1} = 2\alpha_1, \ \mu_i = 2\alpha_1, \ \mu_{i+1} = 2\lambda_{i+1}, \ \mu_{n-2} = 2\lambda_{n-2}, \ \mu_{n-1} = 4\alpha - \delta, \ \mu_n = \delta$. В рассматриваемом случае при выборе (25) матрицы квадратичной формы наибольшим корнем уравнения (6) будет также δ.

Случай, когда среди корней характеристического уравнения имеется несколько пар комплексно-сопряжённых корней, рассматривается аналогично.

Таким образом, если наибольшему значению вещественных частей корней характеристического уравнения соответствует пара комплексно-сопряжённых корней, корнями уравнения (6) являются $\mu_1 = 2\operatorname{Re}\lambda_1, \ \ldots, \ \mu_{n-2} = 2\operatorname{Re}\lambda_{n-2}, \ \mu_{n-1} = 4\alpha - \delta, \ \mu_n = \delta$. И в рассматриваемом случае при выборе согласно (23), (25) матрицы квадратичной формы наибольшим корнем уравнения (6) будет δ.

Переходя обратно от канонических переменных к переменным $x_1, \ x_2, \ \ldots, \ x_n$, получим квадратичную функцию Ляпунова (2), удовлетворяющую заданным ограничениям.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения. М.; Л., 1950.
2. *Четаев Н.Г.* Устойчивость движения. М., 1966.
3. *Косякин А.А., Шамриков Б.М.* Колебания в цифровых автоматических системах. М., 1983.
4. *Барбашин Е.А.* Функции Ляпунова. М., 1970.
5. *Хусаинов Д.Я., Юнькова Е.А.* Об одном методе нахождения решения матричного уравнения Ляпунова с заданным спектром // Укр. мат. журн. 1984. Т. 36. № 4. С. 528–531.
6. *Сарыбеков Р.А.* Экстремальные квадратичные функции Ляпунова систем уравнений второго порядка // Сиб. мат. журн. 1977. Т. 18. № 5. С. 1159–1167.
7. *Комаров Ю.А., Хусаинов Д.Я.* Некоторые замечания об экстремальной функции Ляпунова для линейных систем // Укр. мат. журн. 1983. Т. 35. № 6. С. 750–753.
8. *Пропой А.И.* О проблеме устойчивости движения // Автоматика и телемеханика. 2000. № 4. С. 51–60.
9. *Антоновская О.Г., Горюнов В.И.* Об одном способе оценки размеров области притяжения неподвижной точки нелинейного точечного отображения произвольной размерности // Изв. вузов. Математика. 2016. № 12. С. 12–18.
10. *Антоновская О.Г.* О построении квадратичной функции Ляпунова с заданными свойствами // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49. № 9. С. 1220–1224.
11. *Антоновская О.Г.* Об определении коэффициентов квадратичной функции Ляпунова с заданными свойствами // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52. № 3. С. 275–281.
12. *Антоновская О.Г.* О максимальном ограничении знакоотрицательности первой производной (первой разности) квадратичной функции Ляпунова // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39. № 11. С. 1562–1563.
13. *Антоновская О.Г.* Построение квадратичных функций Ляпунова, удовлетворяющих заданным ограничениям, для непрерывных и дискретных динамических систем // Изв. вузов. Математика. 2004. № 2 (501). С. 19–23.
14. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М., 1967.
15. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. М., 1989.
16. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. М., 1967.
17. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербаков П.С.* Управление линейными системами при внешних возмущениях: техника линейных матричных неравенств. М., 2014.

Нижегородский государственный
архитектурно-строительный университет

Поступила в редакцию 30.01.2020 г.
После доработки 30.12.2022 г.
Принята к публикации 20.01.2023 г.