ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 3, с. 303–313

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.925.4+517.988.57

ОБ ОДНОЙ НЕКЛАССИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ, ИМЕЮЩЕЙ НЕЛИНЕАРИЗУЕМЫЕ РЕШЕНИЯ

© 2023 г. Д. В. Валовик, В. Ю. Мартынова

Исследуется одна нелинейная задача на собственные значения специального вида, возникающая в электродинамике. Задача ставится для системы двух уравнений с краевыми условиями первого рода и двумя дополнительными локальными условиями. Спектральный параметр в задаче один, ещё два параметра появляются в указанных выше локальных условиях, на которые накладывается дополнительное ограничение. Таким образом, в задаче имеются два неизвестных параметра: один спектральный, второй – некоторый дополнительный параметр, который подбирается так, чтобы существовало нетривиальное решение изучаемой задачи. Доказывается существование нелинеаризуемых решений задачи.

DOI: 10.31857/S0374064123030020, EDN: QUAOCW

1. Постановка задачи. Пусть $\mathrm{I} = (0,1)$, $\bar{\mathrm{I}} = [0,1]$, $\mathbb{R}_+ = (0,+\infty)$, $\mathrm{A} = (0,A)$, где $A > 0$ – известная постоянная, λ, A_1, A_2 – вещественные параметры, a_1, a_2, α_1, $\alpha_2 > 0$ – вещественные постоянные. На протяжении всей статьи индекс j принимает значения 1, 2.

Рассмотрим систему уравнений

$$u_1'' = -(a_1 - \lambda + \alpha_1 u_1^2)u_1, \quad u_2'' = -(a_2 - \lambda + \alpha_2 u_2^2)u_2 \tag{1}$$

с граничными условиями

$$u_1|_{x=0} = 0, \quad u_2|_{x=0} = 0, \tag{2}$$

$$u_1'|_{x=0} = A_1, \quad u_2'|_{x=0} = A_2, \tag{3}$$

$$u_1|_{x=h} = 0, \quad u_2|_{x=h} = 0 \tag{4}$$

и с дополнительным условием

$$A_1^2 + A_2^2 = A^2, \tag{5}$$

где $x \in \bar{\mathrm{I}}$, $A_j \in \mathrm{A}$ и $\lambda, \alpha_j \in \mathbb{R}_+$.

Задача $\mathcal{P}$ состоит в том, чтобы определить такие тройки (λ, A_1, A_2), для которых существуют (нетривиальные) функции $u_j \equiv u_j(x; \lambda, \alpha_j, A_j)$, удовлетворяющие системе (1) и условиям (2)–(5), где u_j дважды непрерывно дифференцируемы по $x \in \bar{\mathrm{I}}$.

Замечание 1. Несмотря на то, что функции u_1, u_2 связаны условием (5):

$$u_1'^2|_{x=0} + u_2'^2|_{x=0} = A^2,$$

уравнения (1) можно изучать отдельно, и поэтому задача $\mathcal{P}$ разбивается на две: задача $\bar{\mathcal{P}}_1$ для функции u_1 и параметров λ, A_1 и задача $\mathcal{P}_2$ для функции u_2 и параметров λ, A_2, где $\lambda \equiv \lambda(A_1)$ определяется из задачи $\mathcal{P}_1$, параметр A_1 подбирается так, чтобы u_2 удовлетворяло второму уравнению в (1) и соответствующим условиям из (2)–(4); параметр A_2 определяется по формуле

$$A_2(A_1) = \sqrt{A^2 - A_1^2} > 0.$$

Отметим, что поскольку изучаемые уравнения нелинейны относительно искомых функций стандартных краевых условий (например, первого рода) уже недостаточно для определения дискретных собственных значений. Необходимо использовать дополнительные условия, которые могут быть как локальными, так и нелокальными (нелокальные условия, в частности, возникают при применении вариационных методов). Мы используем локальные дополнительные условия (3).

Обратим внимание читателя на то, что хотя уравнения изучаемой задачи и интегрируются в эллиптических функциях, мы не используем этот факт. В нелинейной оптике (да и в других разделах нелинейной математической физики) возникают более сложные нелинейности, для которых подход на основе эллиптических функций невозможен. В то же время используемый нами подход с некоторыми модификациями может быть применён и к более сложным нелинейностям (необходимо лишь перейти к другой переменной в интеграле и провести необходимые оценки, см., например, [1]).

2. Разрешимость задачи $\mathcal{P}$. Для удобства введём обозначения $v_j = A_j^{-1}u_j$ и $\beta_j^2 = \alpha_j A_j^2$. В этих обозначениях из (1)–(5) имеем систему

$$v_1'' = -(a_1 - \lambda + \beta_1^2 v_1^2)v_1, \quad v_2'' = -(a_2 - \lambda + \beta_2^2 v_2^2)v_2 \tag{6}$$

с граничными условиями

$$v_1(0) = 0, \quad v_2(0) = 0, \tag{7}$$

$$v_1'(0) = 1, \quad v_2'(0) = 1, \tag{8}$$

$$v_1(1) = 0, \quad v_2(1) = 0 \tag{9}$$

и с дополнительным условием

$$\frac{\beta_1^2}{\alpha_1} + \frac{\beta_2^2}{\alpha_2} = A^2, \tag{10}$$

где $\beta_j \in \mathrm{B}_j = (0, \sqrt{\alpha_j}A)$.

Заметим, что $\beta_j \to +0$ при $A_j \to +0$ при фиксированном $\alpha_j > 0$ и наоборот, т.е. $\beta_j \to +0$ при $\alpha_j \to +0$ при фиксированном $A_j > 0$. Кроме того, если $A_1 \to A - 0$, то $\beta_2 \to +0$ (при фиксированном $\alpha_2 > 0$), а также если $A_2 \to A - 0$, то $\beta_1 \to +0$ (при фиксированном $\alpha_1 > 0$).

Фактически задача $\mathcal{P}$ была эквивалентно переформулирована в новых обозначениях. Теперь задача $\mathcal{P}$ состоит в определении троек $(\lambda, \beta_1, \beta_2)$, для которых существуют (нетривиальные) функции $v_j \equiv v_j(x; \lambda, \beta_j)$, удовлетворяющие системе (6) и условиям (7)–(10), где v_j предполагаются дважды непрерывно дифференцируемыми по $x \in \bar{\mathrm{I}}$.

Из условий (5), (10) и введённых обозначений видно, что задача $\mathcal{P}$ изучается при условии $\beta_j \in (0, \sqrt{\alpha_j}A)$. Несмотря на это, некоторые вспомогательные результаты этого пункта сформулированы (и доказаны) при условии $\beta_j \in \mathbb{R}_+$.

Для начала найдём первые интегралы уравнений системы (6). Умножив на $2v_j'$ и проинтегрировав по $[0, x]$, имеем

$$v_j'^2 = C_j - (a_j - \lambda)v_j^2 - \frac{\beta_j^2}{2}v_j^4. \tag{11}$$

Используя условия (7) и (8), находим значения $C_1 = C_2 = 1$.

Для исследования задачи $\mathcal{P}$ будет модифицирован метод интегрального характеристического уравнения [1]. Введём новые переменные

$$\tau_j = v_j^2, \quad \eta_j = \frac{v_j'}{v_j}. \tag{12}$$

Ниже используем обозначения τ_j, $\tau_j(x)$, $\tau_j(x; \lambda, \beta_j)$, а также η_j, $\eta_j(x)$, $\eta_j(x; \lambda, \beta_j)$.

В новых обозначениях система (6) может быть записана в виде

$$\tau_1' = 2\tau_1\eta_1, \quad \eta_1' = -(\eta_1^2 + a_1 - \lambda + \beta_1^2\tau_1),$$

$$\tau_2' = 2\tau_2\eta_2, \quad \eta_2' = -(\eta_2^2 + a_2 - \lambda + \beta_2^2\tau_2). \tag{13}$$

Соотношения (11) при условиях (7), (8) принимают вид

$$\frac{\beta_j^2}{2}\tau_j^2 + (\eta_j^2 + a_j - \lambda)\tau_j - 1 = 0. \tag{14}$$

Поскольку $\tau_j \geqslant 0$, то, выражая τ_j из (14), получаем

$$\tau_j = \frac{-(\eta_j^2 + a_j - \lambda) + \sqrt{(\eta_1^2 + a_j - \lambda)^2 + 2\beta_j^2}}{\beta_j^2}.$$

Подставив найденные соотношения во второе и четвертое уравнения системы (13), имеем

$$\eta_j' = -\sqrt{(\eta_j^2 + a_j - \lambda)^2 + 2\beta_j^2},$$

откуда следует, что $\eta_j' < 0$ для всех $\lambda \in \mathbb{R}$, т.е. функция $\eta_j(x)$ монотонно убывает. Из второй формулы (12) видно, что $\eta_j(x)$ непрерывна тогда и только тогда, когда v_j не обращается в нуль. Предположим, что v_j имеет $n_j \geqslant 0$ нулей $x_{j,i} \in \mathrm{I}$, $i = \overline{1, n_j}$, тогда $\eta_j(x)$ имеет n_j точек разрыва $x_{j,i}$, $i = \overline{1, n_j}$. Если $n_j = 0$, то v_j не обращается в нуль при $x \in \mathrm{I}$.

Очевидно, что если $v_j(x) \not\equiv 0$, то $v_j'(x_{j.i}) \neq 0$ для всех $i = \overline{1, n_j}$. Действительно, если решение v_j задачи (6) обращается в нуль вместе со своей производной v_j' в какой-то точке, то из классических результатов о (локальном) существовании и единственности решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения следует, что $v_j(x) \equiv 0$ [2, с. 73]. Таким образом, все точки разрыва являются точками разрыва второго рода.

Пусть $\mathrm{I}_{j,i} = (x_{j,i}, x_{j,i+1})$, где $i = \overline{0, n_j}$, $x_{j,0} = 0$, $x_{j,n_j+1} = 1$; если $n_j = 0$, то $\mathrm{I}_{j,0} = \mathrm{I}$.

Из условий (7), (8) следует, что

$$\lim_{x\to+0} \tau_j(x) = 0, \quad \lim_{x\to+0} \eta_j(x) = +\infty. \tag{15}$$

Так как $\eta_j' < 0$, то получаем условия

$$\lim_{x\to x_{j,i}} \tau_j(x) = 0, \quad \lim_{x\to x_{j,i}\pm 0} \eta_j(x) = \pm\infty, \quad i = \overline{1, n_j}. \tag{16}$$

С учётом (9) имеем

$$\lim_{x\to 1-0} \tau_j(x) = 0, \quad \lim_{x\to 1-0} \eta_j(x) = -\infty. \tag{17}$$

Подчеркнём, что условия (17) выполняются только на решениях задачи $\mathcal{P}$.

Таким образом, функции $\tau_j(x)$ и $\eta_j(x)$ могут быть определены на каждом интервале $\mathrm{I}_{j,i}$ как решения уравнений (14) с подходящими условиями, выбранными из (15)–(17).

Теперь рассмотрим уравнение

$$\eta_j' = -w_j(\eta_j; \lambda, \beta_j) \tag{18}$$

на каждом интервале $\mathrm{I}_{j,i}$, где

$$w_j(\eta_j; \lambda, \beta_j) \equiv \sqrt{(\eta_j^2 + a_j - \lambda)^2 + 2\beta_j^2} > 0.$$

Введём также обозначение

$$T_j(\lambda, \beta_j) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds}{w_j(s; \lambda, \beta_j)}. \tag{19}$$

Имеет место следующее

Утверждение 1. *Задача Коши (6)–(8) глобально однозначно разрешима для* $x \in \bar{\mathrm{I}}$, *её (классическое) решение* $v_j \equiv v_j(x;\lambda,\beta_j)$ *непрерывно зависит от точки* $(x,\lambda,\beta_j) \in \bar{\mathrm{I}}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$, *и справедливо равенство*

$$n_jT_j(\lambda,\beta_j) + \int\limits_{\eta_j(1)}^{+\infty} \frac{ds}{w_j(s;\lambda,\beta_j)} = 1, \tag{20}$$

где $n_j \geqslant 0$ *– количество нулей функции* $v_j \equiv v_j(x;\lambda,\beta_j)$, *поскольку* $x \in \mathrm{I}$, *а* $\eta_j(1)$ *не обязательно равно* $-\infty$.

Доказательство. Учитывая, что $w_j(\eta_j;\lambda,\beta_j) > 0$, интегрируя (18) на каждом интервале $\mathrm{I}_{j,i}$, $i = \overline{1,n_j}$, используя условия (15)–(16), приходим к системе

$$0 < x_{j,1} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds}{w_{j,1}(s;\lambda,\beta_j)},$$

$$0 < x_{j,i} - x_{j,i-1} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds}{w_{j,i}(s;\lambda,\beta_j)}, \quad i = \overline{2,n_j},$$

$$0 < 1 - x_{n_j} = \int\limits_{\eta_j(1)}^{+\infty} \frac{ds}{w_{j,n_j+1}(s;\lambda,\beta_j)}, \tag{21}$$

подробный вывод которой дан, например, в работе [1].

Заметим, что в (21) правые части конечны, так как левые части конечны. Следовательно, все несобственные интегралы в (21) сходятся. Из этого факта вытекает существование $\eta_j \equiv \equiv \eta_j(x)$ на каждом интервале $\mathrm{I}_{j,i}$, $i = \overline{1,n_j}$.

Из соотношений (11) следует, что при фиксированных λ, β_j переменная v_j, а значит, и переменная v_j' ограничены.

Учитывая существование функции $\eta_j \equiv \eta_j(x)$ и ограниченность функций v_j и v_j', приходим к выводу, что функции $v_j(x)$ и $v_j'(x)$ определены для всех $x \in \bar{\mathrm{I}}$. Другими словами, доказано, что решение $v_j \equiv v_j(x;\lambda,\beta_j)$ задачи Коши (6)–(8) существует и определено глобально для $x \in \bar{\mathrm{I}}$. Единственность этого решения и его непрерывность (и дифференцируемость) по $x \in \bar{\mathrm{I}}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ и $\beta_j \in \mathbb{R}_+$ являются результатом гладкости правых частей уравнений в (6) относительно v_j, λ, β_j [3, с. 178; 4, с. 118].

Суммируя уравнения в (21), имеем

$$x_{j,1} + x_{j,2} - x_{j,1} + x_{j,3} - x_{j,2} + \ldots + x_{j,n_j} - x_{j,n_j-1} + 1 - x_{j,n_j} =$$

$$= n_j \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds}{w_j(s;\lambda,\beta_j)} + \int\limits_{\eta_j(1)}^{+\infty} \frac{ds}{w_j(s;\lambda,\beta_j)}.$$

Формулы (20) легко получаются из найденного соотношения. Утверждение доказано.

При условиях (9) и (10) формулы (20) приводят к интегральным характеристическим уравнениям (ИХУ), для которых имеет место следующая

Теорема 1. *Тройка* $(\lambda,\beta_1,\beta_2)$ *является решением задачи* $\mathcal{P}$ *тогда и только тогда, когда существуют целые числа* $\bar{n}_j \geqslant 0$ *такие, что* λ, β_1 *и* β_2 *удовлетворяют системе уравнений*

$$\bar{\Phi}_1(\lambda,\beta_1;n_1) \equiv (n_1+1)T_1(\lambda,\beta_1) = 1, \quad \bar{\Phi}_2(\lambda,\beta_2;n_2) \equiv (n_2+1)T_2(\lambda,\beta_2) = 1 \tag{22}$$

при $n_j = \bar{n}_j$. *В этом случае собственные функции* $v_j \equiv v_j(x;\lambda,\beta_j)$, *соответствующие решению* $(\lambda,\beta_1,\beta_2)$, *имеют* $\bar{n}_j$ *простых нулей* $x_{j,i} = iT_j(\lambda,\beta_j) \in \mathrm{I}$, *где* $i = \overline{1,\bar{n}_j}$.

Доказательство. Из формулы (9) видно, что $v_j|_{x=1} = 0$. Так как $\eta_j' < 0$, $\eta_j = v_j'/v_j$, а v_j и v_j' не обращаются в нуль в одной и той же точке, то $\lim\limits_{x\to 1-0} \eta_j(x) = -\infty$. Теперь ИХУ (22) получаются из формулы (20) при условиях (9) и (10). Заметим, что условия (9) приводят к условиям (17).

Из доказательства утверждения 1 следует, что любое решение задачи $\mathcal{P}$ удовлетворяет системе (22) при некотором $n_j = \bar{n}_j$.

Тот факт, что любое решение λ, β_1, β_2 уравнений (22) является решением $(\lambda, \beta_1, \beta_2)$ задачи $\mathcal{P}$, доказывается аналогично тому, как это сделано в статье [5].

Формула для нулей $x_{j,i}$ собственной функции v_j получается из формул (21). Теорема доказана.

С учётом замечания 1 видно, что любое уравнение системы (22) можно изучать независимо от другого. Докажем несколько фактов о функциях T_j, на которые будем опираться при дальнейших рассуждениях.

Утверждение 2. *Для любого фиксированного* $\beta_j \in \mathbb{R}_+$ *справедливы следующие свойства:*

$$\max_{\lambda\in\mathbb{R}} T_j(\lambda, \beta_j) = \delta_j, \tag{23}$$

$$\lim_{\lambda\to\pm\infty} T_j(\lambda, \beta_j) = 0, \tag{24}$$

где $\delta = \delta_j(\beta_j)$ *является конечной положительной величиной.*

Доказательство. Формула (23) получается из следующих рассуждений. Действительно, подынтегральные выражения в (19) положительны на $\mathbb{R}$. Это означает, что $T_j > 0$ и можно найти его максимальное значение, которое обозначим через δ_j. Очевидно, что эти δ_j непрерывно зависят от β_j.

Теперь, используя неравенство

$$\frac{1}{|p|+q} \leqslant \frac{1}{\sqrt{p^2+q^2}} \leqslant \frac{\sqrt{2}}{|p|+q}, \tag{25}$$

где $p \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{R}_+$, выясним поведение T_j при $\lambda \to +\infty$.

В соответствии с (19) и (25) получаем

$$2\bar{T}_j(\lambda, \beta_j) \leqslant T_j(\lambda, \beta_j) \leqslant 2\sqrt{2}\bar{T}_j(\lambda, \beta_j), \tag{26}$$

где

$$\bar{T}_j(\lambda, \beta_j) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{ds}{|s^2 + a_j - \lambda| + \sqrt{2}\beta_j}. \tag{27}$$

В приведённых ниже расчётах используется обозначение $s_* = \sqrt{\lambda - a_j}$, где предполагается, что $\lambda > a_j + \sqrt{2}\beta_j$. Таким образом, имеем

$$\bar{T}_j(\lambda, \beta_j) = \int\limits_0^{s_*} \frac{ds}{\lambda - a_j + \sqrt{2}\beta_j - s^2} + \int\limits_{s_*}^{+\infty} \frac{ds}{s^2 - (\lambda - a_j - \sqrt{2}\beta_j)} = I_1 + I_2,$$

следовательно,

$$2(I_1 + I_2) \leqslant T_j(\lambda, \beta_j) \leqslant 2\sqrt{2}(I_1 + I_2) \tag{28}$$

при условии $\lambda > a_j + \sqrt{2}\beta_j$.

Вычислим интегралы I_1 и I_2:

$$I_1 = \int\limits_0^{s_*} \frac{ds}{\lambda - a_j + \sqrt{2}\beta_j - s^2} = \frac{2\ln(\sqrt{\lambda - a_j + \sqrt{2}\beta_j} + \sqrt{\lambda - a_j}) - \ln(\sqrt{2}\beta_j)}{2\sqrt{\lambda - a_j + \sqrt{2}\beta_j}}, \tag{29}$$

$$I_2 = \int\limits_{s_*}^{+\infty} \frac{ds}{s^2 - (\lambda - a_j - \sqrt{2}\beta_j)} = \frac{2\ln(\sqrt{\lambda - a_j - \sqrt{2}\beta_j} + \sqrt{\lambda - a_j}) - \ln(\sqrt{2}\beta_j)}{2\sqrt{\lambda - a_j - \sqrt{2}\beta_j}}. \qquad (30)$$

После элементарных преобразований находим, что

$$I_1 = O\biggl(\frac{\ln\lambda}{\sqrt{\lambda}}\biggr) \quad \text{и} \quad I_2 = O\biggl(\frac{\ln\lambda}{\sqrt{\lambda}}\biggr) \qquad (31)$$

для достаточно больших положительных λ. Очевидно, что $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} I_j = 0$.

Учитывая неравенство (28), из формул (31) следует, что условие (24) справедливо при $\lambda \to +\infty$.

Рассмотрим случай $\lambda \to -\infty$. Если $\lambda < 0$, то из (27) находим

$$\bar{T}_j(\lambda, \beta_j) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{ds}{s^2 + a_j + |\lambda| + \sqrt{2}\beta_j}. \qquad (32)$$

Интеграл (32) вычисляется точно:

$$\bar{T}_j(\lambda, \beta_j) = \frac{\pi}{2\sqrt{|\lambda| + a_j + \sqrt{2}\beta_j}}. \qquad (33)$$

Учитывая неравенство (26), из формулы (33) следует, что (24) имеет место при $\lambda \to -\infty$. Утверждение доказано.

Утверждение 3. *Пусть* $\delta_j(\beta_j) = \max\limits_{\lambda\in\mathbb{R}} T_j(\lambda, \beta_j)$, *где* $\beta_j \in \mathbb{R}_+$. *Справедливо следующее равенство:*

$$\lim_{\beta_j\to+0} \delta_j(\beta_j) = +\infty. \qquad (34)$$

Доказательство. Пусть $\lambda = a_j$. Тогда, очевидно, $T_j(a_j, \beta_j) \leqslant \delta_j(\beta_j)$. Учитывая (26) и вычисляя T_j и $\bar{T}_j$ при $\lambda = a_j$, получаем неравенства

$$2\bar{T}_j(a_j, \beta_j) \leqslant T_j(a_j, \beta_j) \leqslant \delta_j(\beta_j), \qquad (35)$$

где

$$\bar{T}_j(a_j, \beta_j) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{ds}{s^2 + \sqrt{2}\beta_j} = \frac{\pi}{2\sqrt[4]{2}\sqrt{\beta_j}}. \qquad (36)$$

Из (36) следует, что $\lim\limits_{\beta_j\to+0} \bar{T}_j(a_j, \beta_j) = +\infty$. Формулы (35) и (36) подразумевают выполнение (34). Утверждение доказано.

Используя утверждение 2, можно получить следующее

Утверждение 4. *Для любого* $\beta_j \in \mathbb{R}_+$ *существует целое число* $n_j^0 \geqslant 0$ *такое, что уравнение* $\bar{\Phi}_j(\lambda, \beta_j; n_j) = 1$ *имеет хотя бы одно отрицательное* $\lambda = \lambda_{-n_j}$ *и одно положительное* $\lambda = \lambda_{n_j}$ *решения для любых* $n_j = n_j^0, n_j^0 + 1, \ldots,$ *где* $\lambda_{\pm n_j}$ *зависит от* β_j *и* n_j. *Кроме того,*

$$\lim_{n_j\to+\infty} \lambda_{\pm n_j} = \pm\infty.$$

Доказательство. Действительно, всегда существует целое число n_j^0 такое, что $(n_j+1)\delta_j > 1$ при $n_j = n_j^0, n_j^0+1, \ldots$ (см. формулу (23)). В то же время в соответствии с формулой (24) имеем $(n_j+1)T_j(\lambda, \beta_j) \to +0$ при $\lambda \to \pm\infty$ для любых $n_j = n_j^0, n_j^0+1, \ldots$ Из этого следует, что уравнение $\bar{\Phi}_j = 1$ имеет по крайней мере два решения $\lambda = \lambda$ при каждом $n_j = n_j^0, n_j^0+1, \ldots$ Очевидно, начиная с некоторого целого числа $n_j' \geqslant n_j^0$, эти два решения имеют разные знаки. Рис. 1 объясняет этот факт с геометрической точки зрения. Утверждение доказано.

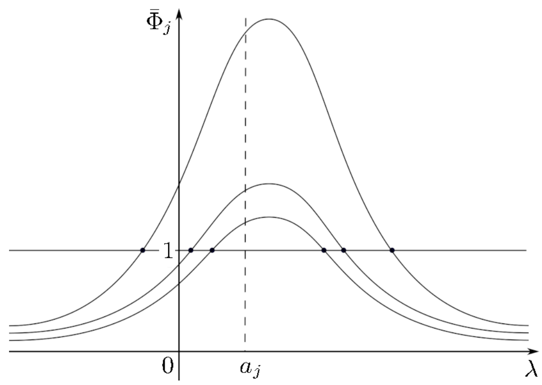

Рис. 1. Геометрический смысл доказательства утверждения 4.

Итак, рассмотрим функцию

$$\lambda \equiv \lambda(\beta_j; n_j).$$

Далее важно изучить, что происходит с решением $\lambda \equiv \lambda(\beta_j; n_j)$ уравнения $\bar{\Phi}_j(\lambda, \beta_j; n_j) = 1$ при $\beta_j \to +0$.

Утверждение 5. *Пусть* $\lambda \equiv \lambda(\beta_j; n_j)$ *– решение уравнения* $\bar{\Phi}_j(\lambda, \beta_j; n_j) = 1$. *Существует целое число* $n_j' \geqslant 0$ *такое, что справедлива формула*

$$\lim_{\beta_j \to +0} \lambda(\beta_j; n_j) = +\infty \tag{37}$$

для каждого $n_j = n_j', n_j'+1, \ldots$

Доказательство. С учётом оценок (26) и (28) необходимо проанализировать результаты расчётов (29) и (30). Из (29) и (30) легко видеть, что I_1 и I_2 увеличиваются при уменьшении $\beta_j > 0$. Таким образом, чем меньше положительные β_j, тем больше становится (положительное) λ, что доказывает (37). Утверждение доказано.

Результаты утверждения 5 можно сформулировать без введения целого числа n_j'. В самом деле, свойство (37) характеризует решения $\lambda \equiv \lambda(\beta_j; n_j)$ уравнения $\bar{\Phi}_j(\lambda, \beta_j; n_j) = 1$, которые не связаны с решениями соответствующей линейной задачи при $\beta_j \to +0$. Говоря о соответствующей линейной задаче, имеем в виду ИХУ $\bar{\Phi}_j(\lambda, 0; n_j) = 1$, где $\lambda \in (-\infty, a_j)$, отвечающее линейной задаче при $\beta_j = 0$, т.е. (линейной) задаче Штурма–Лиувилля для уравнения $u_j'' = -(a_j - \lambda)u_j$ при условиях $u_j(0) = u_j(1) = 0$.

Другой момент, который следует отметить, заключается в следующем. В утверждении 5 говорится только о положительных решениях. Из оценок (26) и (28) и расчётов (32), (33) можно заметить, что при $a_j > 0$ свойство (37) не выполняется для всех отрицательных λ. При этом если брать отрицательные a_j, то свойство (37) будет выполняться лишь для конечного числа отрицательных λ.

Основной результат этой работы сформулирован в следующей теореме.

Теорема 2 (о разрешимости задачи $\mathcal{P}$). *Для любого конечного целого числа* $n > 0$ *существуют не менее* n *решений* $(\lambda, \beta_1, \beta_2)$ *задачи* $\mathcal{P}$, *где* $\beta_2 = \beta_2(\beta_1)$ *определяется из (10).*

Доказательство. Пусть $\lambda = \lambda(\beta_1; \bar{n}_1)$ – решение первого уравнения системы (22) при $n_1 = \bar{n}_1$. Пусть $\lambda_{\min}$ и $\lambda_{\max}$ – минимальное и максимальное значения $\lambda = \lambda(\beta_1; \bar{n}_1)$ при $\beta_1 \in (0, \sqrt{\alpha_1}A)$. Ранее было показано, что $\lim\limits_{\beta_1 \to +0} \lambda(\beta_1; \bar{n}_1) = +\infty$. Это означает, что $\lambda_{\max} = +\infty$.

Заметим, что функция $\lambda = \lambda(\beta_1; \bar{n}_1)$ не обязательно непрерывна относительно β_1 для всех $\beta_1 \in (0, \sqrt{\alpha_1}A)$. Более того, функция $\lambda = \lambda(\beta_1; \bar{n}_1)$ может не существовать для некоторых интервалов $(\beta_1', \beta_1'') \subset (0, \sqrt{\alpha_1}A)$. Все это легко видеть из рис. 1.

Тот факт, что $\lambda_{\max} = +\infty$, даёт возможность выбрать $\lambda_{\min}$ следующим образом. Пусть интервал $(0, \beta_1^0)$, где $\beta_1^0 \leqslant \sqrt{\alpha_1}A$, является максимальным интервалом, для которого функция $\lambda(\beta_1; \bar{n}_1)$ непрерывна относительно $\beta_1 \in (0, \beta_1^0)$, и пусть $\lambda_{\min}'$ – минимальное значение $\lambda(\beta_1; \bar{n}_1)$ при $\beta_1 \in (0, \beta_1^0)$. Заметим, что $\beta_1^0 > 0$ всегда существует. Геометрическая интерпретация приведённого выше рассуждения показана на рис. 2.

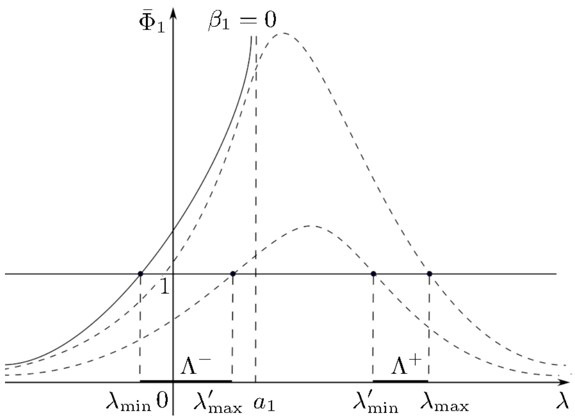

Рис. 2. Графики зависимости $\bar{\Phi}_1$ от λ для различных значений β_1 и фиксированного n_1. Сплошная кривая соответствует линейному случаю, т.е. $\beta_1 = 0$; верхняя штриховая кривая соответствует β_1 вблизи $+0$, нижняя – $\beta_1 = \sqrt{\alpha_1}A$. Интервал $(\lambda_{\min}, \lambda'_{\max})$ всегда остаётся ограниченным, интервал $(\lambda'_{\min}, \lambda_{\max})$ можно сделать сколь угодно больши́м.

Теперь покажем, что можно выбрать удовлетворяющие (10) $\lambda = \lambda(\beta_1; \bar{n}_1)$ и $\beta_2 = \beta_2(\beta_1)$ такие, что второе уравнение в системе (22) выполняется при некотором $n_2 = \bar{n}_2$.

Подставив $\lambda = \lambda(\beta_1; \bar{n}_1)$ и $\beta_2 = \beta_2(\beta_1)$, где β_2 определяется из условия (10) и $\beta_1 \in (0, \beta_1^0)$, в $T = T_2(\lambda(\beta_1; \bar{n}_1), \beta_2(\beta_1))$, оценим его минимальное и максимальное значения.

Итак, пусть

$$T_{\min} = \min_{\beta_2(\beta_1)} T_2(\lambda(\beta_1; \bar{n}_1), \beta_2(\beta_1))$$

и

$$T_{\max} = \max_{\beta_2(\beta_1)} T_2(\lambda(\beta_1; \bar{n}_1), \beta_2(\beta_1))$$

при $\beta_1 \in (0, \beta_1^0)$; в данном случае $\lambda(\beta_1; \bar{n}_1) \in \in (\lambda'_{\min}, \lambda_{\max})$.

Возможен один из двух случаев.

Первый случай. Если $T_{\min} < 1 < T_{\max}$, то в силу непрерывной зависимости λ и β_2 от β_1 и непрерывной зависимости T_2 от λ и β_2 существует $\beta_1 \in (0, \beta_1^0)$ такое, что для $\lambda = \lambda(\beta_1; \bar{n}_1)$ и $\beta_2 = \beta_2(\beta_1)$ верно равенство $T_2(\lambda, \beta_2) = 1$. Таким образом, найдено решение $(\lambda, \beta_1, \beta_2)$ системы (22) при $n_1 = \bar{n}_1$ и $n_2 = 0$.

Второй случай. Если $T_{\max} < 1$, то существует целое число $\bar{n}_2$ такое, что

$$(\bar{n}_2 + 1)T_{\min} < 1 < (\bar{n}_2 + 1)T_{\max}.$$

Теперь, применяя рассуждения, которые использовали выше, заключаем, что существует $\beta_1 \in \in (0, \beta_1^0)$ такое, что для $\lambda = \lambda(\beta_1; \bar{n}_1)$ и $\beta_2 = \beta_2(\beta_1)$ верно равенство $(\bar{n}_2 + 1)T_2(\lambda, \beta_2) = 1$. Таким образом, находим решение $(\lambda, \beta_1, \beta_2)$ системы (22) при $n_1 = \bar{n}_1$ и $n_2 = \bar{n}_2$.

При этом случай $T_{\min} > 1$ невозможен. Действительно, $T_j \to +0$ при $\lambda \to +\infty$ и при фиксированном $\beta_j > 0$, т.е. чтобы получить “маленькие” $T_{\min}$ нужно использовать достаточно больши́е $\lambda = \lambda(\beta_1, n_1)$. Как показано выше, $\lambda = \lambda(\beta_1, n_1) \to +\infty$ при $\beta_1 \to +0$. Однако в этом случае β_2 не стремится к нулю, и, следовательно, можно утверждать, что при достаточно больши́х λ функцию T_2 можно сделать меньше единицы. Таким образом, получаем либо первый случай, либо второй. Геометрическая интерпретация приведённого выше рассуждения показана на рис. 3.

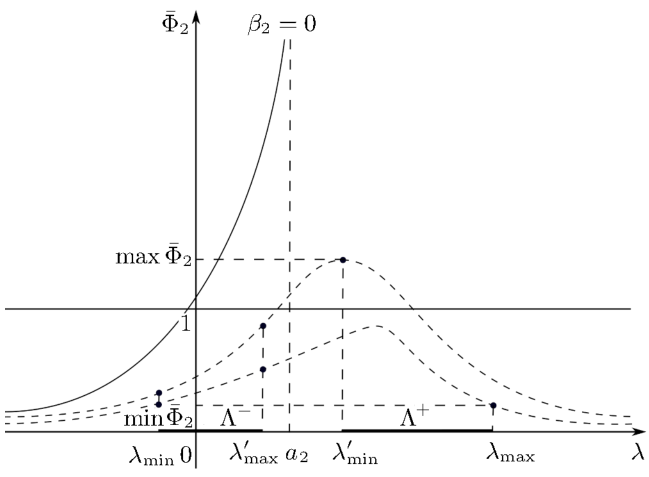

Рис. 3. Графики зависимости $\bar{\Phi}_2$ от λ для различных значений $\beta_2 = \beta_2(\beta_1)$ и фиксированного $\bar{n}_2$. Сплошная кривая соответствует линейному случаю, т.е. $\beta_2 = 0$; две штриховые кривые соответствуют минимально возможному $\beta_2 = \beta_2|_{\beta_1 = \beta_1^0}$ (с максимумом, бо́льшим единицы) и максимально возможному $\beta_2 = \beta_2|_{\beta_1 = 0}$ (с максимумом, меньшим единицы).

Как сказано в утверждении 4, если рассматривать какое-либо уравнение $\bar{\Phi}_j = 1$ отдельно от второго, то можно утверждать, что оно имеет по крайней мере два решения λ для любых возможных n_j, начиная с некоторого n_j^0. Очевидно также, что при больших n_j эти два решения имеют разные знаки. Интересно понять, можно или нет доказать существование по крайней мере двух решений для каждого случая, в котором существует одно решение. Главный факт, который помог нам доказать существование решений задачи $\mathcal{P}$, заключается в том, что интервал $(\lambda'_{\min}, \lambda_{\max})$ можно сделать сколь угодно большим (см. рис. 2), и он играет ключевую роль для исследования второго уравнения системы (22). Действительно, это позволяет доказать, что функцию T_2 можно сделать меньше любого фиксированного значения при достаточно больших $\lambda \in \in (\lambda'_{\min}, \lambda_{\max})$. В то же время интервал $(\lambda_{\min}, \lambda'_{\max})$, содержащий второе решение уравнения $\bar{\Phi}_1 = 1$ (рассматриваемое отдельно от другого уравнения), нельзя выбрать так, чтобы его длина превышала всякое наперёд заданное число (см. рис. 3). Теорема доказана.

Из теоремы 2 вытекает

Следствие 1 (о разрешимости задачи $\mathcal{P}$). *Для любого конечного целого числа $n > 0$ существует не менее n решений (λ, A_1, A_2) задачи $\mathcal{P}$, где $A_2 = A_2(A_1)$ определяется из (5).*

В классической (линейной) теории Штурма–Лиувилля широко используется понятие характеристической функции [6, с. 33]. В случае задачи $\mathcal{P}$ характеристическая функция может быть введена аналогичным образом.

Имеем следующее

Утверждение 6. *Любая тройка $(\lambda, \beta_1, \beta_2)$ при $\lambda \in \mathbb{R}$, $\beta_j \in \mathrm{B}_j$ является решением задачи $\mathcal{P}$ тогда и только тогда, когда она удовлетворяет системе*

$$v_1(1; \lambda, \beta_1) = 0, \quad v_2(1; \lambda, \beta_2) = 0, \tag{38}$$

где $v_j(x; \lambda, \beta_j)$ являются решениями задачи Коши (6)–(8), а $\beta_2 = \beta_2(\beta_1)$ определяется из условия (10).

Доказательство. Пусть $v_j = v_j(x; \lambda, \beta_j)$ – решение задачи Коши (6)–(8), где $\beta_2 = \beta_2(\beta_1)$ определяется из формулы (10). Если тройка λ, β_1, $\beta_2 = \beta_2(\beta_1)$ удовлетворяет (38), то, очевидно, тройка $(\lambda, \beta_1, \beta_2(\beta_1))$ является решением задачи $\mathcal{P}$ и $v_j(x; \lambda, \beta_j)$ – собственные функции.

Пусть тройка $\lambda = \bar{\lambda}^* \in \mathbb{R}$, $\beta_1 = \bar{\beta}_1^* \in \mathrm{B}_1$, $\beta_2 = \bar{\beta}_2^*(\bar{\beta}_1^*)$ – решение (38). Рассмотрим задачу Коши (6)–(8), где $\lambda = \bar{\lambda}^*$, $\beta_1 = \bar{\beta}_1^*$, а $\beta_2 = \bar{\beta}_2^*$ определяется из (10) при $\beta_1 = \bar{\beta}_1^*$. Согласно утверждению 1 нетривиальное решение $v_j = v_j(x; \bar{\lambda}^*, \bar{\beta}_j^*)$ этой задачи Коши существует, единственно и непрерывно зависит от точки $(x, \lambda, \beta_j) \in \bar{\mathrm{I}} \times \mathbb{R} \times \mathrm{B}_j$. Если (38) выполняется для $\lambda = \bar{\lambda}^*$, $\beta_1 = \bar{\beta}_1^*$, $\beta_2 = \bar{\beta}_2^*(\bar{\beta}_1^*)$ для этого решения задачи Коши, то тройка $(\bar{\lambda}^*, \bar{\beta}_1^*, \bar{\beta}_2^*(\bar{\beta}_1^*))$ является решением задачи $\mathcal{P}$. Предположим, что для этого решения задачи Коши система (38) не выполняется при $\lambda = \bar{\lambda}^*$, $\beta_1 = \bar{\beta}_1^*$, $\beta_2 = \bar{\beta}_2^*(\bar{\beta}_1^*)$. Следовательно, существует неединственное решение задачи Коши (6)–(8), где $\lambda = \bar{\lambda}^*$, $\beta_1 = \bar{\beta}_1^*$, $\beta_2 = \bar{\beta}_2^*(\bar{\beta}_1^*)$; для одного из них (38) выполняется, а для другого нет. Этот вывод противоречит утверждению 1. Поэтому предположение о существовании решения задачи Коши (6)–(8), для которой (38) не выполняется, неверно. Утверждение доказано.

Используя теорему 1 и утверждение 6, получаем следующий результат.

Следствие 2. *Любое решение $\lambda \in \mathbb{R}$, $\beta_j \in \mathrm{B}_j$ ИХУ (22), где $\beta_2 = \beta_2(\beta_1)$ определяется из (10), является решением (38) и наоборот.*

Объединяя утверждения 2, 3, 5, теорему 2 и следствие 2, получаем

Следствие 3. *Для любого целого числа $n > 0$ задача $\mathcal{P}$ имеет не менее n решений $(\lambda, \beta_1, \beta_2)$, удовлетворяющих следующим условиям:*

$$v_1(1; \lambda - \delta, \beta_1) \cdot v_1(1; \lambda + \delta, \beta_1) < 0, \quad v_2(1; \lambda - \delta, \beta_2) \cdot v_2(1; \lambda + \delta, \beta_2) < 0,$$

где $v_j(x; \lambda, \beta_j)$ являются решениями задачи Коши (6)–(8), $\beta_2 = \beta_2(\beta_1)$ определяется из (10), $\delta > 0$ – достаточно малая постоянная такая, что интервал $(\lambda - \delta, \lambda + \delta)$ не содержит какого-либо другого решения λ.

Стоит заметить, что вопрос о существовании нелинеаризуемых решений в нелинейных задачах зависит от используемых дополнительных условий.

3. Физический смысл задачи $\mathcal{P}$. Пусть $\Sigma := \{(x, y, z) : 0 < x < 1, \ (y, z) \in \mathbb{R}^2\}$ – плоский диэлектрический волновод, расположенный в декартовой системе координат $Oxyz$. На границах $x = 0$, $x = 1$ волновод имеет идеально проводящие экраны.

Задача $\mathcal{P}$ описывает распространение двух ТЕ-волн в нелинейном волноводе Σ, которые связаны условием (5). Одна из волн гармонически зависит от переменной z, а вторая – от y.

Введём электромагнитное поле $(\mathbf{E},\mathbf{H})e^{-i\omega t}$, которое представляет собой сумму двух ТЕ-волн $\mathbf{E}=\mathbf{E}_1+\mathbf{E}_2$, $\mathbf{H}=\mathbf{H}_1+\mathbf{H}_2$, распространяющихся в волноводе Σ, где $\omega>0$ – круговая частота,

$$\begin{gathered}\mathbf{E}_1=(0,\mathrm{E}_y(x)e^{i\gamma z},0)^{\mathrm{T}},\quad \mathbf{E}_2=(0,0,\mathrm{E}_z(x)e^{i\gamma y})^{\mathrm{T}},\\ \mathbf{H}_1=(\mathrm{H}_{x1}(x)e^{i\gamma z},0,\mathrm{H}_z(x)e^{i\gamma z})^{\mathrm{T}},\quad \mathbf{H}_2=(\mathrm{H}_{x2}(x)e^{i\gamma y},\mathrm{H}_y(x)e^{i\gamma y},0)^{\mathrm{T}},\end{gathered}\tag{39}$$

γ – вещественная постоянная распространения ТЕ-волн. Электромагнитная монохроматическая ТЕ-волна – это волна, имеющая конфигурацию, определяемую формулой $(\mathbf{E}_1,\mathbf{H}_1)e^{-i\omega t}$ или $(\mathbf{E}_2,\mathbf{H}_2)e^{-i\omega t}$, где электрическая и магнитная компоненты электромагнитного поля определены формулами (39).

Диэлектрическая проницаемость внутри волновода описывается диагональным тензором

$$\hat\varepsilon=\begin{pmatrix}\star & 0 & 0\\ 0 & \varepsilon_1+\beta_1\mathrm{E}_y^2 & 0\\ 0 & 0 & \varepsilon_2+\beta_1\mathrm{E}_z^2\end{pmatrix},$$

где $\varepsilon_1,\varepsilon_2>1$, $\beta_1>0$ – вещественные постоянные, $\star$ – элемент тензора, не влияющий на распространение волн. Такой тензор соответствует тензорной нелинейности Керра [7, с. 162]. Скалярный случай нелинейности Керра является основным нелинейным законом в нелинейной оптике [8, 9], а также возникает в других областях нелинейной математической физики [10, 11]. В связи с тем, что основная задача носит векторный характер, логично использовать тензорную нелинейность.

Уравнения Максвелла имеют вид

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}=-i\omega\varepsilon_0\hat\varepsilon\mathbf{E},\quad \operatorname{rot}\mathbf{E}=i\omega\mu_0\mathbf{H},\tag{40}$$

где $\varepsilon_0>0$ – диэлектрическая проницаемость вакуума, $\mu_0>0$ – магнитная проницаемость вакуума.

Таким образом, поля $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ удовлетворяют уравнениям (40) и касательные компоненты $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$ обращаются в нуль на идеально проводящих экранах $(x=0,\ x=1)$.

Подставляя (39) в уравнения Максвелла (40), получаем

$$\mathrm{E}_y''=\gamma^2\mathrm{E}_y-k_0^2(\varepsilon_1+\beta_1\mathrm{E}_y^2)\mathrm{E}_y,\quad \mathrm{E}_z''=\gamma^2\mathrm{E}_z-k_0^2(\varepsilon_2+\beta_1\mathrm{E}_z^2)\mathrm{E}_z,\tag{41}$$

где $k_0^2=\omega^2\mu_0\varepsilon_0$,

$$\begin{gathered}\mathrm{H}_{x1}=-\gamma(\omega\mu_0)^{-1}\mathrm{E}_y,\quad \mathrm{H}_y=-(i\omega\mu_0)^{-1}\mathrm{E}_z',\\ \mathrm{H}_{x2}=\gamma(\omega\mu_0)^{-1}\mathrm{E}_z,\quad \mathrm{H}_z=(i\omega\mu_0)^{-1}\mathrm{E}_y'.\end{gathered}$$

На границах $x=0$, $x=1$ имеем следующие граничные условия:

$$\begin{gathered}\mathrm{E}_y|_{x=0}=0,\quad \mathrm{E}_z|_{x=0}=0,\\ \mathrm{E}_y'|_{x=0}=A_1,\quad \mathrm{E}_z'|_{x=0}=A_2,\\ \mathrm{E}_y|_{x=1}=0,\quad \mathrm{E}_z|_{x=1}=0.\end{gathered}$$

Таким образом, условия (3) имеют ясный физический смысл – это значение одной из компонент поля на границе волновода (условие вполне естественное с точки зрения теории волноводов). Кроме того, будем считать, что квадрат модуля магнитного поля является фиксированной величиной, т.е. имеют место равенства

$$|\mathbf{H}|^2|_{x=0}=\frac{(\mathrm{E}_y')^2+(\mathrm{E}_z')^2}{\omega^2\mu_0^2}\bigg|_{x=0}=-\frac{A^2}{\omega^2\mu_0^2}.$$

Используя обозначения $u_1=\mathrm{E}_y$, $u_2=\mathrm{E}_z$, $\gamma^2=\lambda$, $a_j=k_0^2\varepsilon_j$, $\alpha_j=k_0^2\beta_j$, из (41) получаем систему (6). Сформулированная физическая задача о распространении волн эквивалентна задаче $\mathcal{P}$. Подобная задача была рассмотрена в работе [12].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 22-71-00020).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kurseeva V.Yu., Moskaleva M.A., Valovik D.V.* Asymptotical analysis of a nonlinear Sturm–Liouville problem: linearisable and non-linearisable solutions // Asymptot. Anal. 2020. V. 119. № 1–2. P. 39–59.
2. *Петровский И.Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М., 1984.
3. *Понтрягин Л.С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., 1961.
4. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., 1970.
5. *Валовик Д.В.* Исследование одной нелинейной задачи на собственные значения методом интегрального характеристического уравнения // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 2. С. 175–189.
6. *Марченко В.А.* Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения. Киев, 1977.
7. *Boardman A.D., Egan P., Lederer F., Langbein U., Mihalache D.* Third-Order Nonlinear Electromagnetic TE and TM Guided Waves / Eds. H.-E. Ponath and G.I. Stegeman. Amsterdam; London; New York; Tokyo, 1991.
8. *Ландау Л.Д., Лившиц Е.М.* Элекродинамика сплошных сред. М., 1982.
9. *Boyd R.W.* Nonlinear Optics. New York; London, 2003.
10. *Fibich G.* The Nonlinear Schrödinger Equation. Cham; Heidelberg; New York; Dordrecht; London, 2015.
11. *Cazenave T.* Semilinear Schrödinger equations // Courant lecture notes in mathematics of American Mathematical Society. V. 10. 2003.
12. *Мартынова В.Ю.* Распространение гибридных ТЕ-ТЕ-волн в плоском закрытом волноводе, заполненном нелинейной средой // Изв. вузов. Поволжский регион. Физ.-мат. науки. 2021. № 4 (60). С. 27–45.

Пензенский государственный университет

Поступила в редакцию 18.01.2023 г.
После доработки 18.01.2023 г.
Принята к публикации 14.02.2023 г.