ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 3, с. 333–349

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.928.4

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЁННОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ С ОДНОМАСШТАБНЫМ ВНУТРЕННИМ СЛОЕМ

© 2023 г. Р. Е. Симаков

Рассмотрена краевая задача для сингулярно возмущённой системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с разными степенями малого параметра при вторых производных. Особенность задачи состоит в том, что одно из двух уравнений вырожденной системы имеет двукратный корень, а другое – три непересекающихся простых (однократных) корня. Доказано, что для достаточно малых значений малого параметра задача имеет решение, обладающее быстрым переходом в окрестности некоторой внутренней точки отрезка. Построено и обосновано полное асимптотическое разложение этого решения. Оно качественно отличается от известного разложения в случае, когда все корни вырожденных уравнений являются простыми, но также не совпадает с разложениями в исследованных ранее задачах с двукратными корнями, в частности, внутренний переходный слой оказывается одномасштабным.

DOI: 10.31857/S0374064123030044, EDN: QUJPPV

1. Введение и постановка задачи. Рассмотрим краевую задачу

$$\varepsilon^2\frac{d^2u}{dx^2}=F(u,v,x,\varepsilon),\quad \varepsilon\frac{d^2v}{dx^2}=f(u,v,x,\varepsilon),\quad 0<x<1, \tag{1}$$

$$\frac{du}{dx}(0,\varepsilon)=\frac{du}{dx}(1,\varepsilon)=0,\quad \frac{dv}{dx}(0,\varepsilon)=\frac{dv}{dx}(1,\varepsilon)=0, \tag{2}$$

где $\varepsilon>0$ – малый параметр, $u(x,\varepsilon)$ и $v(x,\varepsilon)$ – искомые скалярные функции, F и f – заданные функции в области $D=I_u\times I_v\times[0,1]\times[0,\varepsilon_0]$, I_u и I_v – некоторые интервалы изменения переменных u и v, $\varepsilon_0>0$.

При $\varepsilon=0$ уравнения (1) принимают вид

$$F(u,v,x,0)=0,\quad f(u,v,x,0)=0. \tag{3}$$

В данной работе ставятся вопросы о существовании и асимптотике по параметру ε решения задачи (1), (2) с переходным слоем в окрестности некоторой внутренней точки x_* отрезка $[0,1]$ (назовём её *точкой перехода*), где решение совершает быстрый переход из малой окрестности одного решения вырожденной системы (3) в малую окрестность другого её решения. Такие решения называются *контрастными структурами типа ступеньки* (КСТС).

Опишем кратко структуру работы. В п. 1 приводятся условия, обеспечивающие существование искомой КСТС в задаче (1), (2). В п. 2 строится формальная асимптотика КСТС, причём построение ведётся раздельно слева и справа от точки перехода. В п. 3 проводится сшивание асимптотик в точке x_* и строится асимптотическое приближение для этой точки. В п. 4 доказывается существование решения задачи (1), (2) с построенной асимптотикой. В п. 5 приводится пример задачи вида (1), (2), на котором иллюстрируется построение асимптотики решения. В п. 6 содержатся некоторые замечания в отношении рассмотренной задачи и других возможных задач о КСТС.

Сформулируем условия, при которых задача (1), (2) будет рассматриваться ниже.

Условие А1. Функция $F(u,v,x,\varepsilon)$ имеет вид

$$F(u,v,x,\varepsilon)=h(x)(u-\varphi(v,x))^2-\varepsilon F_1(u,v,x,\varepsilon),$$

где $h(x)>0$ при $x\in[0,1]$ и $\varphi(v,x)\in I_u$ при $(v,x)\in I_v\times[0,1]$.

Из условия A1 следует, что корень $u = \varphi(v,x)$ первого уравнения (3) является двукратным. Отметим, что КСТС в сингулярно возмущённых задачах с кратными корнями исследовались во многих работах, краткий обзор которых можно найти в [1]. В данной статье асимптотика решения имеет свои качественные особенности, относящиеся, прежде всего, к переходному слою.

Условие A2. Уравнение $g(v,x) := f(\varphi(v,x),v,x,0) = 0$ имеет три простых корня $v = \psi_i(x) \in I_v$, $i = 1,2,3$, причём

$$\psi_1(x) < \psi_2(x) < \psi_3(x), \quad x \in [0,1]. \tag{4}$$

Условие A3. Функции $h(x)$, $\varphi(v,x)$, $\psi_i(x)$, $i = 1,2,3$, $f(u,v,x,\varepsilon)$ и $F_1(u,v,x,\varepsilon)$ являются достаточно гладкими при $(u,v,x,\varepsilon) \in D$.

Требуемый порядок гладкости этих функций зависит от порядка асимптотики, которую мы хотим построить. Так как далее речь пойдёт об асимптотике произвольного порядка, будем считать их бесконечно дифференцируемыми.

Условие A4. Уравнение

$$I(x) := \int\limits_{\psi_1(x)}^{\psi_3(x)} g(v,x)\,dv = 0$$

имеет корень $x = x_0 \in (0,1)$, и

$$I'(x_0) < 0. \tag{5}$$

Будем искать решение задачи (1), (2), удовлетворяющее предельным равенствам

$$\lim_{\varepsilon\to 0} u(x,\varepsilon) = \begin{cases} \varphi(\psi_1(x),x), & 0 \leqslant x < x_0, \\ \varphi(\psi_3(x),x), & x_0 < x \leqslant 1, \end{cases} \quad \lim_{\varepsilon\to 0} v(x,\varepsilon) = \begin{cases} \psi_1(x), & 0 \leqslant x < x_0, \\ \psi_3(x), & x_0 < x \leqslant 1. \end{cases} \tag{6}$$

Чтобы сформулировать остальные условия, определим несколько кривых на плоскости переменных (v,x) и в пространстве переменных (u,v,x):

$$l_1 = \{(v,x) : v = \psi_1(x), \ \ 0 \leqslant x \leqslant x_0\}, \quad l_2 = \{(v,x) : \psi_1(x_0) \leqslant v \leqslant \psi_3(x_0), \ \ x = x_0\},$$

$$l_3 = \{(v,x) : v = \psi_3(x), \ \ x_0 \leqslant x \leqslant 1\},$$

$$L_i = \{(u,v,x) : u = \varphi(v,x), (v,x) \in l_i\}, \quad i = 1,2,3, \quad l = \bigcup_{i=1}^{3} l_i, \quad L = \bigcup_{i=1}^{3} L_i.$$

Отметим, что l_i и L_i, $i = 1,2,3$, – гладкие кривые, а l и L – непрерывные кривые, составленные из трёх гладких звеньев.

Условие A5. $F_1(u,v,x,0) > 0$ в точках кривых L_1 и L_3.

Условие A6. $\partial g(v,x)/\partial v > 0$ в точках кривых l_1 и l_3.

Условие A7. Выполнены неравенства

$$\int\limits_{\psi_1(x_0)}^{v} g(s,x_0)\,ds > 0 \quad \text{при} \quad \psi_1(x_0) < v \leqslant \psi_2(x_0)$$

и

$$\int\limits_{\psi_3(x_0)}^{v} g(s,x_0)\,ds > 0 \quad \text{при} \quad \psi_2(x_0) \leqslant v < \psi_3(x_0).$$

Условие A8. Имеют место неравенства

$$G_1(v,x_0) > 0 \quad \text{при} \quad \psi_1(x_0) \leqslant v \leqslant \psi_2(x_0)$$

и

$$G_3(v, x_0) > 0 \quad \text{при} \quad \psi_2(x_0) \leqslant v \leqslant \psi_3(x_0),$$

где

$$G_i(v,x) := \frac{\partial\varphi}{\partial v}(v,x)g(v,x) + 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}(v,x)\int\limits_{\psi_i(x)}^{v} g(s,x)\,ds + F_1(\varphi(v,x),v,x,0), \quad i = 1,3.$$

Условие A9. $\partial\varphi(v,x)/\partial v > 0$ в точках кривой l.

Условие A10. $\partial f(u,v,x,0)/\partial u < 0$ в точках кривой L.

Заметим, что неравенства в условиях A5–A10 останутся верными при замене x_0 на x_* в определениях кривых l и L, если точка x_* принадлежит достаточно малой и не зависящей от ε окрестности точки x_0.

2. Построение асимптотики. Определим точку перехода x_* как точку пересечения v-компоненты искомого решения с корнем ψ_2: $v(x_*,\varepsilon) = \psi_2(x_*)$, и поставим на отрезках $[0, x_*]$ и $[x_*, 1]$ две вспомогательные задачи, аналогичные задаче (1), (2) с добавлением граничных условий

$$v^{(-)}(x_*,\varepsilon) = \psi_2(x_*), \quad v^{(+)}(x_*,\varepsilon) = \psi_2(x_*). \tag{7}$$

Индексами $^{(-)}$ и $^{(+)}$ будем отмечать функции, определяемые соответственно из левой и правой вспомогательных задач.

Считая x_* фиксированной точкой из достаточно малой окрестности точки x_0, будем строить асимптотики решений вспомогательных задач в виде

$$U^{(\mp)}(x,\varepsilon) = \bar{u}^{(\mp)}(x,\varepsilon) + \Pi^{(\mp)}u(\xi_\mp,\varepsilon) + P^{(\mp)}u(\zeta_\mp,\varepsilon) + Q^{(\mp)}u(\tau,\varepsilon), \tag{8}$$

$$V^{(\mp)}(x,\varepsilon) = \bar{v}^{(\mp)}(x,\varepsilon) + \Pi^{(\mp)}v(\xi_\mp,\varepsilon) + P^{(\mp)}v(\zeta_\mp,\varepsilon) + Q^{(\mp)}v(\tau,\varepsilon). \tag{9}$$

Здесь $\bar{u}^{(\mp)}(x,\varepsilon)$, $\bar{v}^{(\mp)}(x,\varepsilon)$ – регулярные части асимптотики; $\Pi^{(-)}u(\xi_-,\varepsilon)$, $\Pi^{(-)}v(\xi_-,\varepsilon)$ и $P^{(-)}u(\zeta_-,\varepsilon)$, $P^{(-)}v(\zeta_-,\varepsilon)$ – погранслойные части асимптотики в окрестности точки $x = 0$, $\xi_- = x/\sqrt{\varepsilon}$ и $\zeta_- = x/\varepsilon^{3/4}$ – погранслойные переменные; $\Pi^{(+)}u(\xi_+,\varepsilon)$, $\Pi^{(+)}v(\xi_+,\varepsilon)$ и $P^{(+)}u(\zeta_+,\varepsilon)$, $P^{(+)}v(\zeta_+,\varepsilon)$ – погранслойные части асимптотики в окрестности точки $x = 1$, $\xi_+ = (1-x)/\sqrt{\varepsilon}$ и $\zeta_+ = (1-x)/\varepsilon^{3/4}$ – погранслойные переменные; $Q^{(\mp)}u(\tau,\varepsilon)$, $Q^{(\mp)}v(\tau,\varepsilon)$ – внутрислойные части асимптотики, описывающие быстрое изменение решения в окрестности точки перехода x_*, $\tau = (x-x_*)/\sqrt{\varepsilon}$ – внутрислойная переменная. Каждое слагаемое в правых частях представлений (8), (9) будет построено в виде ряда по дробным степеням ε.

2.1. Регулярные части асимптотики. Регулярные части асимптотики строятся в виде рядов по целым степеням $\sqrt{\varepsilon}$:

$$\bar{u}^{(\mp)}(x,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{i/2}\bar{u}_i^{(\mp)}(x), \quad \bar{v}^{(\mp)}(x,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{i/2}\bar{v}_i^{(\mp)}(x).$$

Уравнения для определения функций $\bar{u}_i^{(\mp)}(x)$ и $\bar{v}_i^{(\mp)}(x)$ будем получать стандартным способом (см. [2, с. 29]) из равенств

$$\varepsilon^2\frac{d^2\bar{u}^{(\mp)}}{dx^2} = F(\bar{u}^{(\mp)},\bar{v}^{(\mp)},x,\varepsilon), \tag{10}$$

$$\varepsilon\frac{d^2\bar{v}^{(\mp)}}{dx^2} = f(\bar{u}^{(\mp)},\bar{v}^{(\mp)},x,\varepsilon). \tag{11}$$

В нулевом порядке имеем вырожденные системы уравнений

$$F(\bar{u}_0^{(\mp)},\bar{v}_0^{(\mp)},x,0) = 0, \quad f(\bar{u}_0^{(\mp)},\bar{v}_0^{(\mp)},x,0) = 0,$$

из которых в соответствии с (6) получаем

$$\bar{u}_0^{(-)}(x)=\varphi(\psi_1(x),x),\quad \bar{v}_0^{(-)}(x)=\psi_1(x),\quad 0\leqslant x\leqslant x_*,$$

$$\bar{u}_0^{(+)}(x)=\varphi(\psi_3(x),x),\quad \bar{v}_0^{(+)}(x)=\psi_3(x),\quad x_*\leqslant x\leqslant 1.$$

Введём обозначения

$$\bar{f}_u^{(\mp)}(x):=\frac{\partial f}{\partial u}(\bar{u}_0^{(\mp)}(x),\bar{v}_0^{(\mp)}(x),x,0),\quad \bar{f}_v^{(\mp)}(x):=\frac{\partial f}{\partial v}(\bar{u}_0^{(\mp)}(x),\bar{v}_0^{(\mp)}(x),x,0), \tag{12}$$

$$\bar{\varphi}_v^{(\mp)}(x):=\frac{\partial \varphi}{\partial v}(\bar{v}_0^{(\mp)}(x),x),\quad \bar{g}_v^{(\mp)}(x):=\frac{\partial g}{\partial v}(\bar{v}_0^{(\mp)}(x),x)=\bar{f}_u^{(\mp)}(x)\bar{\varphi}_v^{(\mp)}(x)+\bar{f}_v^{(\mp)}(x).$$

Уравнения (10) не содержат членов порядка $\sqrt{\varepsilon}$, т.е. членов первого порядка. Во втором порядке получаем квадратные уравнения

$$h(x)[\bar{u}_1^{(\mp)}-\bar{\varphi}_v^{(\mp)}(x)\bar{v}_1^{(\mp)}]^2=\bar{F}_1^{(\mp)}(x):=F_1(\bar{u}_0^{(\mp)}(x),\bar{v}_0^{(\mp)}(x),x,0).$$

В силу условия А5 они имеют по два корня, из которых выбираем положительные:

$$\bar{u}_1^{(\mp)}-\bar{\varphi}_v^{(\mp)}(x)\bar{v}_1^{(\mp)}=a^{(\mp)}(x):=\sqrt{h^{-1}(x)\bar{F}_1^{(\mp)}(x)}. \tag{13}$$

Вторые уравнения для $\bar{u}_1^{(\mp)}$, $\bar{v}_1^{(\mp)}$ получаем из равенства (11):

$$\bar{f}_u^{(\mp)}(x)\bar{u}_1^{(\mp)}+\bar{f}_v^{(\mp)}(x)\bar{v}_1^{(\mp)}=0. \tag{14}$$

Определители систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) (13), (14) равны

$$\bar{f}_u^{(\mp)}(x)\bar{\varphi}_v^{(\mp)}(x)+\bar{f}_v^{(\mp)}(x)=\bar{g}_v^{(\mp)}(x).$$

В силу условия А6 СЛАУ (13), (14) однозначно разрешимы:

$$\bar{u}_1^{(\mp)}(x)=\bar{f}_v^{(\mp)}(x)(\bar{g}_v^{(\mp)}(x))^{-1}a^{(\mp)}(x),\quad \bar{v}_1^{(\mp)}(x)=-\bar{f}_u^{(\mp)}(x)(\bar{g}_v^{(\mp)}(x))^{-1}a^{(\mp)}(x).$$

Для каждого $i=2,3,\ldots$ из равенств (10), (11) находятся СЛАУ относительно $\bar{u}_i^{(\mp)}$, $\bar{v}_i^{(\mp)}$ такого же типа, как (13), (14):

$$\bar{u}_i^{(\mp)}-\bar{\varphi}_v^{(\mp)}(x)\bar{v}_i^{(\mp)}=a_i^{(\mp)}(x),\quad \bar{f}_u^{(\mp)}(x)\bar{u}_i^{(\mp)}+\bar{f}_v^{(\mp)}(x)\bar{v}_i^{(\mp)}=b_i^{(\mp)}(x),$$

где $a_i^{(\mp)}(x)$, $b_i^{(\mp)}(x)$ выражаются рекуррентно через $\bar{u}_j^{(\mp)}(x)$, $\bar{v}_j^{(\mp)}(x)$ с номерами $j<i$. Отсюда однозначно определяются функции $\bar{u}_i^{(\mp)}(x)$, $\bar{v}_i^{(\mp)}(x)$.

2.2. Погранслойные части асимптотики. Погранслойные части асимптотики строятся в виде рядов по целым степеням $\sqrt[4]{\varepsilon}$:

$$\Pi^{(\mp)}u(\xi_\mp,\varepsilon)=\sqrt{\varepsilon}\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{i/4}\Pi_i^{(\mp)}u(\xi_\mp),\quad \Pi^{(\mp)}v(\xi_\mp,\varepsilon)=\sqrt{\varepsilon}\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{i/4}\Pi_i^{(\mp)}v(\xi_\mp),$$

$$P^{(\mp)}u(\zeta_\mp,\varepsilon)=\varepsilon^{3/4}\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{i/4}P_i^{(\mp)}u(\zeta_\mp),\quad P^{(\mp)}v(\zeta_\mp,\varepsilon)=\varepsilon^{5/4}\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{i/4}P_i^{(\mp)}v(\zeta_\mp).$$

Функции $\Pi_i^{(\mp)}u(\xi_\mp)$, $\Pi_i^{(\mp)}v(\xi_\mp)$ и $P_i^{(\mp)}u(\zeta_\mp)$, $P_i^{(\mp)}v(\zeta_\mp)$ определяются точно так же, как погранслойные функции в первой вспомогательной задаче в работе [3]. Все они находятся в явном виде и экспоненциально убывают с ростом соответствующей погранслойной переменной.

2.3. Внутрислойные части асимптотики. Внутрислойные части асимптотики строятся в виде рядов по целым степеням $\sqrt[4]{\varepsilon}$:

$$Q^{(\mp)}u(\tau,\varepsilon)=\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{i/4}Q_i^{(\mp)}u(\tau),\quad Q^{(\mp)}v(\tau,\varepsilon)=\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{i/4}Q_i^{(\mp)}v(\tau).$$

Стандартным способом (см. [2, с. 28]) для функций $Q^{(\mp)}u$, $Q^{(\mp)}v$ получаем системы уравнений

$$\varepsilon\frac{d^2Q^{(\mp)}u}{d\tau^2}=Q^{(\mp)}F,\quad \frac{d^2Q^{(\mp)}v}{d\tau^2}=Q^{(\mp)}f, \tag{15}$$

где

$$Q^{(\mp)}F:=[F(\bar u^{(\mp)}+Q^{(\mp)}u,\bar v^{(\mp)}+Q^{(\mp)}v,x,\varepsilon)-F(\bar u^{(\mp)},\bar v^{(\mp)},x,\varepsilon)]|_{x=x_*+\sqrt{\varepsilon}\tau},$$

функции $Q^{(\mp)}f$ имеют аналогичные выражения. Из этих систем также стандартным способом будем последовательно для $i=0,1,2,\ldots$ извлекать уравнения для функций $Q_i^{(\mp)}u$, $Q_i^{(\mp)}v$.

Для $Q_0^{(\mp)}u$, $Q_0^{(\mp)}v$ получаем системы уравнений

$$F(\bar u_0^{(\mp)}(x_*)+Q_0^{(\mp)}u,\bar v_0^{(\mp)}(x_*)+Q_0^{(\mp)}v,x_*,0)=0,$$

$$\frac{d^2Q_0^{(\mp)}v}{d\tau^2}=f(\bar u_0^{(\mp)}(x_*)+Q_0^{(\mp)}u,\bar v_0^{(\mp)}(x_*)+Q_0^{(\mp)}v,x_*,0),$$

здесь и далее до конца этого пункта уравнения для функций с индексами $^{(-)}$ и $^{(+)}$ рассматриваются на полупрямых $\tau\leqslant 0$ и $\tau\geqslant 0$ соответственно. Из первых уравнений этих систем следуют равенства

$$\bar u_0^{(\mp)}(x_*)+Q_0^{(\mp)}u=\varphi(\bar v_0^{(\mp)}(x_*)+Q_0^{(\mp)}v,x_*), \tag{16}$$

в силу которых вторые уравнения, используя вид функции $g(v,x)$ (см. условие A2), можно записать в виде

$$\frac{d^2Q_0^{(\mp)}v}{d\tau^2}=g(\bar v_0^{(\mp)}(x_*)+Q_0^{(\mp)}v,x_*). \tag{17}$$

Чтобы получить граничные условия при $\tau=0$, подставим выражения (9) для $V^{(\mp)}(x,\varepsilon)$ в равенства (7) вместо $v^{(\mp)}(x,\varepsilon)$. В результате получим

$$\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{i/2}\bar v_i^{(\mp)}(x_*)+\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{i/4}Q_i^{(\mp)}v(0)=\psi_2(x_*). \tag{18}$$

Отсюда находим

$$Q_0^{(\mp)}v(0)=\psi_2(x_*)-\bar v_0^{(\mp)}(x_*). \tag{19}$$

Отметим, что $\psi_2(x_*)-\bar v_0^{(-)}(x_*)=\psi_2(x_*)-\psi_1(x_*)>0$ и $\psi_2(x_*)-\bar v_0^{(+)}(x_*)=\psi_2(x_*)-\psi_3(x_*)<0$ (см. (4)).

В качестве вторых граничных условий для функций $Q_0^{(\mp)}v(\tau)$ и также для остальных функций $Q_i^{(\mp)}v(\tau)$, $i=1,2,\ldots$, возьмём стандартные условия на бесконечности:

$$Q_i^{(\mp)}v(\mp\infty)=0,\quad i=0,1,2,\ldots \tag{20}$$

В силу условия A7 задачи (17), (19), (20) для функций $Q_0^{(\mp)}v(\tau)$ сводятся стандартным способом к уравнениям первого порядка

$$\frac{dQ_0^{(\mp)}v}{d\tau}=\left(2\int\limits_0^{Q_0^{(\mp)}v}g(\bar v_0^{(\mp)}(x_*)+s,x_*)\,ds\right)^{1/2} \tag{21}$$

с начальными условиями (19). Уравнения интегрируются в квадратурах, их решения являются возрастающими функциями и имеют экспоненциальные оценки

$$0 < Q_0^{(-)}v(\tau) \leqslant c\exp(\kappa\tau), \quad \tau \leqslant 0; \quad -c\exp(-\kappa\tau) \leqslant Q_0^{(+)}v(\tau) < 0, \quad \tau \geqslant 0.$$

Из равенств (16) находим

$$Q_0^{(\mp)}u(\tau) = \varphi(\bar{v}_0^{(\mp)}(x_*) + Q_0^{(\mp)}v(\tau), x_*) - \bar{u}_0^{(\mp)}(x_*) =$$
$$= \varphi(\bar{v}_0^{(\mp)}(x_*) + Q_0^{(\mp)}v(\tau), x_*) - \varphi(\bar{v}_0^{(\mp)}(x_*), x_*). \tag{22}$$

Функции $Q_0^{(\mp)}u(\tau)$ и их производные также имеют экспоненциальные оценки:

$$|Q_0^{(-)}u(\tau)| \leqslant c\exp(\kappa\tau), \quad \tau \leqslant 0; \quad |Q_0^{(+)}u(\tau)| \leqslant c\exp(-\kappa\tau), \quad \tau \geqslant 0. \tag{23}$$

Несложные вычисления показывают, что справедливы равенства

$$Q_1^{(\mp)}v(\tau) = 0, \quad Q_1^{(\mp)}u(\tau) = 0,$$

а для функций $Q_2^{(\mp)}u$, $Q_2^{(\mp)}v$ вследствие (15) получаем системы уравнений

$$h(x_*)(Q_2^{(\mp)}u - \hat{\varphi}_v^{(\mp)}(x_*, \tau)Q_2^{(\mp)}v + \phi^{(\mp)}(\tau))^2 = B^{(\mp)}(\tau), \tag{24}$$

$$\frac{d^2Q_2^{(\mp)}v}{d\tau^2} = \hat{f}_u^{(\mp)}(x_*, \tau)Q_2^{(\mp)}u + \hat{f}_v^{(\mp)}(x_*, \tau)Q_2^{(\mp)}v + \chi^{(\mp)}(\tau), \tag{25}$$

где

$$\hat{f}_u^{(\mp)}(x, \tau) := \frac{\partial f}{\partial u}(\varphi(\bar{v}_0^{(\mp)}(x) + Q_0^{(\mp)}v(\tau), x), \bar{v}_0^{(\mp)}(x) + Q_0^{(\mp)}v(\tau), x, 0),$$

$$\hat{\varphi}_v^{(\mp)}(x, \tau) := \frac{\partial \varphi}{\partial v}(\bar{v}_0^{(\mp)}(x) + Q_0^{(\mp)}v(\tau), x),$$

$\hat{f}_v^{(\mp)}(x, \tau)$, $\hat{f}_x^{(\mp)}(x, \tau)$ и $\hat{\varphi}_x^{(\mp)}(x, \tau)$ имеют аналогичный смысл,

$$\phi^{(\mp)}(\tau) := \left(\frac{d\bar{u}_0^{(\mp)}}{dx}(x_*) - \hat{\varphi}_v^{(\mp)}(x_*, \tau)\frac{d\bar{v}_0^{(\mp)}}{dx}(x_*) - \hat{\varphi}_x^{(\mp)}(x_*, \tau)\right)\tau + \bar{u}_1^{(\mp)}(x_*) - \hat{\varphi}_v^{(\mp)}(x_*, \tau)\bar{v}_1^{(\mp)}(x_*),$$

$$B^{(\mp)}(\tau) := \frac{d^2Q_0^{(\mp)}u}{d\tau^2}(\tau) + F_1(\varphi(\bar{v}_0^{(\mp)}(x_*) + Q_0^{(\mp)}v(\tau), x_*), \bar{v}_0^{(\mp)}(x_*) + Q_0^{(\mp)}v(\tau), x_*, 0), \tag{26}$$

$$\chi^{(\mp)}(\tau) := (\hat{f}_u^{(\mp)}(x_*, \tau) - \bar{f}_u^{(\mp)}(x_*))\left(\frac{d\bar{u}_0^{(\mp)}}{dx}(x_*)\tau + \bar{u}_1^{(\mp)}(x_*)\right) +$$
$$+ (\hat{f}_v^{(\mp)}(x_*, \tau) - \bar{f}_v^{(\mp)}(x_*))\left(\frac{d\bar{v}_0^{(\mp)}}{dx}(x_*)\tau + \bar{v}_1^{(\mp)}(x_*)\right) + (\hat{f}_x^{(\mp)}(x_*, \tau) - \bar{f}_x^{(\mp)}(x_*))\tau,$$

$\bar{f}_u^{(\mp)}(x)$ и $\bar{f}_v^{(\mp)}(x)$ определены в (12), $\bar{f}_x^{(\mp)}(x)$ вводится аналогичным образом.

Дифференцируя дважды выражения (22) для функций $Q_0^{(\mp)}u(\tau)$ и используя (17) и (21), приходим к равенствам

$$\frac{d^2Q_0^{(\mp)}u}{d\tau^2}(\tau) = \hat{\varphi}_v^{(\mp)}(x_*, \tau)g(\bar{v}_0^{(\mp)}(x_*) + Q_0^{(\mp)}v(\tau), x_*) + 2\hat{\varphi}_{vv}^{(\mp)}(x_*, \tau)\int\limits_{\bar{v}_0^{(\mp)}(x_*)}^{\bar{v}_0^{(\mp)}(x_*) + Q_0^{(\mp)}v(\tau)} g(s, x_*)\, ds.$$

Поэтому выражения (26) для $B^{(\mp)}(\tau)$ можно записать в виде

$$B^{(-)}(\tau)=G_1(\bar v_0^{(-)}(x_*)+Q_0^{(-)}v(\tau),x_*),\quad B^{(+)}(\tau)=G_3(\bar v_0^{(+)}(x_*)+Q_0^{(+)}v(\tau),x_*),$$

функции $G_i(v,x)$ введены в условии A8.

Так как

$$\psi_1(x_*)<\bar v_0^{(-)}(x_*)+Q_0^{(-)}v(\tau)\leqslant\psi_2(x_*)\quad\text{при}\quad\tau\leqslant 0$$

и

$$\psi_2(x_*)\leqslant\bar v_0^{(+)}(x_*)+Q_0^{(+)}v(\tau)<\psi_3(x_*)\quad\text{при}\quad\tau\geqslant 0,$$

из условия A8 следует, что $B^{(-)}(\tau)>0$ при $\tau\leqslant 0$ и $B^{(+)}(\tau)>0$ при $\tau\geqslant 0$. Тогда из уравнений (24) получаем

$$Q_2^{(\mp)}u=\hat\varphi_v^{(\mp)}(x_*,\tau)Q_2^{(\mp)}v+b^{(\mp)}(\tau)-\phi^{(\mp)}(\tau),\tag{27}$$

где

$$b^{(\mp)}(\tau)=\sqrt{h^{-1}(x_*)B^{(\mp)}(\tau)}\geqslant c>0,$$

берём положительные значения корней из $h^{-1}(x_*)B^{(\mp)}(\tau)$.

Из определений (26) для $B^{(\mp)}(\tau)$, используя экспоненциальные оценки функций $Q_0^{(\mp)}v$, $d^2Q_0^{(\mp)}u/d\tau^2$ и равенства (13) для $a^{(\mp)}(x)$, получаем

$$b^{(\mp)}(\mp\infty)=\sqrt{h^{-1}(x_*)B^{(\mp)}(\mp\infty)}=\sqrt{h^{-1}(x_*)\bar F_1^{(\mp)}(x_*)}=a^{(\mp)}(x_*).$$

Кроме того, из выражений для $\phi^{(\mp)}(\tau)$ следует, что $\phi^{(\mp)}(\mp\infty)=a^{(\mp)}(x_*)$, а функции $r_2^{(\mp)}(\tau):=$ $:=b^{(\mp)}(\tau)-\phi^{(\mp)}(\tau)$ имеют экспоненциальные оценки вида (23):

$$|r_2^{(-)}(\tau)|\leqslant c\exp(\kappa\tau),\quad\tau\leqslant 0;\quad |r_2^{(+)}(\tau)|\leqslant c\exp(-\kappa\tau),\quad\tau\geqslant 0.$$

Такие же оценки имеют функции $\chi^{(\mp)}(\tau)$.

Подставляя выражения (27) для $Q_2^{(\mp)}u$ в уравнения (25) и учитывая, что

$$\hat f_u^{(\mp)}(x_*,\tau)\hat\varphi_v^{(\mp)}(x_*,\tau)+\hat f_v^{(\mp)}(x_*,\tau)=\hat g_v^{(\mp)}(x_*,\tau):=\frac{\partial g}{\partial v}(\bar v_0^{(\mp)}(x_*)+Q_0^{(\mp)}v(\tau),x_*),$$

приходим к следующим уравнениям для функций $Q_2^{(\mp)}v(\tau)$:

$$\frac{d^2Q_2^{(\mp)}v}{d\tau^2}=\hat g_v^{(\mp)}(x_*,\tau)Q_2^{(\mp)}v+q_2^{(\mp)}(\tau),\tag{28}$$

где $q_2^{(\mp)}(\tau)=\chi^{(\mp)}(\tau)+\hat f_u^{(\mp)}(x_*,\tau)r_2^{(\mp)}(\tau)$, функции $q_2^{(\mp)}(\tau)$ имеют оценки вида (23).

Граничные условия для $Q_2^{(\mp)}v(\tau)$ следуют из (18) и (20):

$$Q_2^{(\mp)}v(0)=-\bar v_1^{(\mp)}(x_*),\quad Q_2^{(\mp)}v(\mp\infty)=0.\tag{29}$$

Решения задач (28), (29) выражаются формулами

$$Q_2^{(\mp)}v(\tau)=\Phi_{(\mp)}(\tau)\biggl(\frac{Q_2^{(\mp)}v(0)}{\Phi_{(\mp)}(0)}+\int\limits_0^\tau\Phi_{(\mp)}^{-2}(s)\int\limits_{\mp\infty}^s\Phi_{(\mp)}(t)q_2^{(\mp)}(t)\,dt\,ds\biggr),$$

где $\Phi_{(\mp)}(\tau) := dQ_0^{(\mp)}v(\tau)/d\tau$. Отсюда для $Q_2^{(\mp)}v(\tau)$ следуют экспоненциальные оценки вида (23). Зная $Q_2^{(\mp)}v(\tau)$, по формулам (27) находим функции $Q_2^{(\mp)}u(\tau)$, для которых, очевидно, также справедливы оценки вида (23).

При $i = 3, 4, \ldots$ для $Q_i^{(\mp)}u(\tau)$, $Q_i^{(\mp)}v(\tau)$ получаются линейные системы уравнений, которые приводятся к виду, аналогичному (27), (28):

$$Q_i^{(\mp)}u = \hat{\varphi}_v^{(\mp)}(x_*, \tau)Q_i^{(\mp)}v + r_i^{(\mp)}(\tau), \tag{30}$$

$$\frac{d^2Q_i^{(\mp)}v}{d\tau^2} = \hat{g}_v^{(\mp)}(x_*, \tau)Q_i^{(\mp)}v + q_i^{(\mp)}(\tau), \tag{31}$$

где функции $r_i^{(\mp)}(\tau)$ и $q_i^{(\mp)}(\tau)$ выражаются рекуррентно через $Q_j^{(\mp)}u(\tau)$, $Q_j^{(\mp)}v(\tau)$ с номерами $j < i$ и имеют оценки вида (23).

Граничные условия для функций $Q_i^{(\mp)}v(\tau)$ извлекаются из (18), (20):

$$Q_i^{(\mp)}v(0) = -\bar{v}_{i/2}^{(\mp)}(x_*), \quad Q_i^{(\mp)}v(\mp\infty) = 0, \tag{32}$$

где $\bar{v}_{i/2}^{(\mp)}(x_*) = 0$, если i – нечётное число.

Решения задач (31), (32) задаются формулами, аналогичными выражениям для $Q_2^{(\mp)}v(\tau)$, а функции $Q_i^{(\mp)}u(\tau)$ определяются после этого формулами (30). Из этих формул для функций $Q_i^{(\mp)}v(\tau)$, $Q_i^{(\mp)}u(\tau)$ получаются оценки вида (23).

Сохраняя прежние обозначения для внутрислойных и погранслойных функций, будем далее считать, что все они умножены на бесконечно дифференцируемые срезающие функции (см. [2, с. 82]).

3. Сшивание асимптотик в точке перехода. Формальные асимптотические ряды $V^{(\mp)}(x, \varepsilon)$ удовлетворяют в точке перехода равенствам

$$V^{(-)}(x_*, \varepsilon) = V^{(+)}(x_*, \varepsilon) = \psi_2(x_*), \tag{33}$$

причём их построение проводилось для произвольного x_* из достаточно малой окрестности точки x_0. Будем искать асимптотическое приближение для точки перехода в виде

$$x_* = X_n := \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^{i/4} x_i, \tag{34}$$

где x_0 определено в условии А4, а остальные коэффициенты x_i, $i \geqslant 1$, выбираются таким образом, чтобы также выполнялось формальное равенство

$$\sqrt{\varepsilon}\left(\frac{dV^{(-)}}{dx}(X_n, \varepsilon) - \frac{dV^{(+)}}{dx}(X_n, \varepsilon)\right) = O(\varepsilon^{(n+1)/4}). \tag{35}$$

Подставим в (35) ряды (9) с учётом того, что производные $\Pi^{(\mp)}$-функций и $P^{(\mp)}$-функций равны нулю в точке X_n. Придём к равенству

$$\sqrt{\varepsilon}\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{i/2}\left(\frac{d\bar{v}_i^{(-)}}{dx}(X_n) - \frac{d\bar{v}_i^{(+)}}{dx}(X_n)\right) + \sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^{i/4}\left(\frac{dQ_i^{(-)}v}{d\tau}(0, X_n) - \frac{dQ_i^{(+)}v}{d\tau}(0, X_n)\right) = O(\varepsilon^{(n+1)/4}),$$

в записи которого отражён тот факт, что внутрислойные $Q^{(\mp)}$-функции зависят от параметра $x_* = X_n$. Подставим в это равенство выражение (34), разложим левую часть в ряд по целым степеням $\sqrt[4]{\varepsilon}$ и будем приравнивать к нулю коэффициенты разложения при степенях $\varepsilon^0, \ldots$ $\ldots, \varepsilon^{n/4}$. В нулевом порядке, используя выражения (21) для производных, получаем

$$J(x_0) := \frac{dQ_0^{(-)}v}{d\tau}(0,x_0) - \frac{dQ_0^{(+)}v}{d\tau}(0,x_0) = \left(2\int\limits_{\psi_1(x_0)}^{\psi_2(x_0)} g(v,x_0)\,dv\right)^{1/2} - \left(2\int\limits_{\psi_3(x_0)}^{\psi_2(x_0)} g(v,x_0)\,dv\right)^{1/2} = 0,$$

где последнее равенство имеет место в силу условия A4, причём $J'(x_0) < 0$ в силу (5).

Для следующих коэффициентов x_i суммы (34) последовательно при $i = \overline{1,n}$ получаются линейные уравнения

$$J'(x_0)x_i = a_i, \tag{36}$$

где числа a_i рекуррентно выражаются через x_j с номерами $j < i$, которые на i-м шаге уже известны, причём $a_1 = 0$. Так как $J'(x_0) \neq 0$, уравнение (36) имеет единственное решение

$$x_1 = 0, \quad x_i = (J'(x_0))^{-1}a_i, \quad i = \overline{2,n}.$$

Итак, для точки перехода построено асимптотическое приближение (34), обеспечивающее выполнение формальных равенств (35). Докажем, что в этой точке также справедливы формальные равенства

$$U^{(-)}(X_n,\varepsilon) - U^{(+)}(X_n,\varepsilon) = O(\varepsilon^{(n+1)/4}), \quad \sqrt{\varepsilon}\left(\frac{dU^{(-)}}{dx}(X_n,\varepsilon) - \frac{dU^{(+)}}{dx}(X_n,\varepsilon)\right) = O(\varepsilon^{(n+1)/4}). \tag{37}$$

С этой целью введём обозначения

$$u^{(\mp)}(\tau,\varepsilon) = \bar{u}^{(\mp)}(X_n + \sqrt{\varepsilon}\tau,\varepsilon) + Q^{(\mp)}u(\tau,X_n,\varepsilon), \quad v^{(\mp)}(\tau,\varepsilon) = \bar{v}^{(\mp)}(X_n + \sqrt{\varepsilon}\tau,\varepsilon) + Q^{(\mp)}v(\tau,X_n,\varepsilon)$$

и запишем разложения $u^{(\mp)}(\tau,\varepsilon)$, $v^{(\mp)}(\tau,\varepsilon)$ в ряды по целым степеням $\sqrt[4]{\varepsilon}$:

$$u^{(-)}(\tau,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i/4}u_i^{(-)}(\tau), \quad v^{(-)}(\tau,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i/4}v_i^{(-)}(\tau), \quad \tau \leqslant 0, \tag{38}$$

$$u^{(+)}(\tau,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i/4}u_i^{(+)}(\tau), \quad v^{(+)}(\tau,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i/4}v_i^{(+)}(\tau), \quad \tau \geqslant 0. \tag{39}$$

Главные члены этих разложений имеют вид

$$u_0^{(\mp)}(\tau) = \bar{u}_0^{(\mp)}(x_0) + Q_0^{(\mp)}u(\tau,x_0), \quad v_0^{(\mp)}(\tau) = \bar{v}_0^{(\mp)}(x_0) + Q_0^{(\mp)}v(\tau,x_0).$$

Из (33), (35) вытекают равенства

$$v_i^{(-)}(0) = v_i^{(+)}(0), \quad \frac{dv_i^{(-)}}{d\tau}(0) = \frac{dv_i^{(+)}}{d\tau}(0), \quad i = \overline{0,n}, \tag{40}$$

причём

$$v_0^{(\mp)}(0) = \psi_2(x_0), \quad \frac{dv_0^{(\mp)}}{d\tau}(0) = \frac{dQ_0^{(\mp)}v}{d\tau}(0,x_0) = \left(2\int\limits_{\psi_1(x_0)}^{\psi_2(x_0)} g(v,x_0)\,dv\right)^{1/2} =: \Phi_0. \tag{41}$$

Докажем, что имеют место аналогичные равенства для $u_i^{(\mp)}(\tau)$:

$$u_i^{(-)}(0) = u_i^{(+)}(0), \quad \frac{du_i^{(-)}}{d\tau}(0) = \frac{du_i^{(+)}}{d\tau}(0), \quad i = \overline{0,n}. \tag{42}$$

Отсюда вытекают формальные равенства (37). Введём для $i=\overline{0,n}$ функции

$$u_i(\tau)=\begin{cases}u_i^{(-)}(\tau), & \tau\leqslant 0,\\ u_i^{(+)}(\tau), & \tau>0,\end{cases}\qquad v_i(\tau)=\begin{cases}v_i^{(-)}(\tau), & \tau\leqslant 0,\\ v_i^{(+)}(\tau), & \tau\geqslant 0.\end{cases}$$

Из уравнений (17) следует, что функция $v_0(\tau)$ является решением уравнения

$$\frac{d^2v_0}{d\tau^2}=g(v_0,x_0),\quad -\infty<\tau<\infty,$$

а равенства (41) показывают, что она удовлетворяет начальным условиям

$$v_0(0)=\psi_2(x_0),\quad \frac{dv_0}{d\tau}(0)=\Phi_0.$$

Тогда $v_0(\tau)$ – бесконечно гладкая функция при $-\infty<\tau<\infty$.

Функцию $u_0(\tau)$ в силу равенств (16) можно записать в виде $u_0(\tau)=\varphi(v_0(\tau),x_0)$, откуда следует, что $u_0(\tau)$ также является бесконечно гладкой функцией при всех τ и, значит, выполнены равенства (42) при $i=0$.

Докажем, что $u_i(\tau)$ и $v_i(\tau)$ – бесконечно гладкие функции для всех $i=\overline{1,n}$. Для $u^{(\mp)}(\tau,\varepsilon)$, $v^{(\mp)}(\tau,\varepsilon)$ из (10), (11) и (15) запишем системы уравнений

$$\varepsilon\frac{d^2u^{(\mp)}}{d\tau^2}=F(u^{(\mp)},v^{(\mp)},X_n+\sqrt{\varepsilon}\tau,\varepsilon),\quad \frac{d^2v^{(\mp)}}{d\tau^2}=f(u^{(\mp)},v^{(\mp)},X_n+\sqrt{\varepsilon}\tau,\varepsilon).$$

Подставим в них разложения (38) и (39). Точно так же как в п. 2.3 извлекались уравнения для $Q_i^{(\mp)}u$, $Q_i^{(\mp)}v$, отсюда для $u_i^{(\mp)}$, $v_i^{(\mp)}$ получим системы уравнений

$$u_i^{(\mp)}=\frac{\partial\varphi}{\partial v}(v_0(\tau),x_0)v_i^{(\mp)}+r_i(\tau),\tag{43}$$

$$\frac{d^2v_i^{(\mp)}}{d\tau^2}=\frac{\partial g}{\partial v}(v_0(\tau),x_0)v_i^{(\mp)}+q_i(\tau),\tag{44}$$

где $r_i(\tau)$ и $q_i(\tau)$ выражаются рекуррентно через $u_j(\tau)$, $v_j(\tau)$ с номерами $j<i$ и являются бесконечно гладкими функциями, если таковыми являются $u_j(\tau)$, $v_j(\tau)$. Из (44) и (40) следует, что функция $v_i(\tau)$ является решением уравнения

$$\frac{d^2v_i}{d\tau^2}=\frac{\partial g}{\partial v}(v_0(\tau),x_0)v_i+q_i(\tau),\quad -\infty<\tau<\infty,$$

с начальными условиями

$$v_i(0)=v_i^{(\mp)}(0),\quad \frac{dv_i}{d\tau}(0)=\frac{dv_i^{(\mp)}}{d\tau}(0).$$

Поэтому $v_i(\tau)$ – бесконечно гладкая функция при $-\infty<\tau<\infty$. Из (43) следует теперь, что $u_i(\tau)$ также бесконечно гладкая функция.

Таким образом, выполнены равенства (42) и, значит, в точке X_n справедливы формальные равенства (37).

4. Обоснование асимптотики.

4.1. Теорема об асимптотике решения. Обозначим через $U_n^{(\mp)}(x,\varepsilon,x_*)$ и $V_n^{(\mp)}(x,\varepsilon,x_*)$ следующие частичные суммы формальных асимптотических рядов (8), (9):

$$U_n^{(\mp)}(x,\varepsilon,x_*)=\sum_{i=0}^{n}\varepsilon^{i/2}\bar{u}_i^{(\mp)}(x)+\sqrt{\varepsilon}\sum_{i=0}^{2n}\varepsilon^{i/4}\Pi_i^{(\mp)}u(\xi_\mp)+$$
$$+\varepsilon^{3/4}\sum_{i=0}^{2n}\varepsilon^{i/4}P_i^{(\mp)}u(\zeta_\mp)+\sum_{i=0}^{2n+1}\varepsilon^{i/4}Q_i^{(\mp)}u(\tau,x_*),\tag{45}$$

$$V_n^{(\mp)}(x,\varepsilon,x_*)=\sum_{i=0}^{n}\varepsilon^{i/2}\bar v_i^{(\mp)}(x)+\sqrt{\varepsilon}\sum_{i=0}^{2n}\varepsilon^{i/4}\Pi_i^{(\mp)}v(\xi_\mp)+$$
$$+\varepsilon^{5/4}\sum_{i=0}^{2n-2}\varepsilon^{i/4}P_i^{(\mp)}v(\zeta_\mp)+\sum_{i=0}^{2n+1}\varepsilon^{i/4}Q_i^{(\mp)}v(\tau,x_*). \tag{46}$$

Из алгоритма построения асимптотики следуют равенства

$$L_\varepsilon(U_n^{(-)},V_n^{(-)})=O(\varepsilon^{n/2+1}),\quad M_\varepsilon(V_n^{(-)},U_n^{(-)})=O(\varepsilon^{(n+1)/2}),\quad x\in(0,x_*),$$
$$L_\varepsilon(U_n^{(+)},V_n^{(+)})=O(\varepsilon^{n/2+1}),\quad M_\varepsilon(V_n^{(+)},U_n^{(+)})=O(\varepsilon^{(n+1)/2}),\quad x\in(x_*,1),$$
$$\frac{dU_n^{(-)}}{dx}(0,\varepsilon,x_*)=\frac{dU_n^{(+)}}{dx}(1,\varepsilon,x_*)=0,\quad \frac{dV_n^{(-)}}{dx}(0,\varepsilon,x_*)=\frac{dV_n^{(+)}}{dx}(1,\varepsilon,x_*)=0,$$
$$V_n^{(-)}(x_*,\varepsilon,x_*)=V_n^{(+)}(x_*,\varepsilon,x_*)=\psi_2(x_*),$$

где

$$L_\varepsilon(U,V):=\varepsilon^2\frac{d^2U}{dx^2}-F(U,V,x,\varepsilon),\quad M_\varepsilon(V,U):=\varepsilon\frac{d^2V}{dx^2}-f(U,V,x,\varepsilon). \tag{47}$$

Теорема. *Пусть выполнены условия A1–A10. Тогда для любого целого $n\geqslant 0$ при всех достаточно малых ε существует решение $u(x,\varepsilon)$, $v(x,\varepsilon)$ задачи (1), (2), для которого справедливы асимптотические равенства*

$$u(x,\varepsilon)=U_n(x,\varepsilon)+O(\varepsilon^{(n+1)/2}),\quad v(x,\varepsilon)=V_n(x,\varepsilon)+O(\varepsilon^{(n+1)/2}),\quad x\in[0,1], \tag{48}$$

где

$$U_n(x,\varepsilon)=\begin{cases}U_n^{(-)}(x,\varepsilon,X_{2n+1}), & 0\leqslant x\leqslant X_{2n+1},\\ U_n^{(+)}(x,\varepsilon,X_{2n+1}), & X_{2n+1}<x\leqslant 1;\end{cases}$$
$$V_n(x,\varepsilon)=\begin{cases}V_n^{(-)}(x,\varepsilon,X_{2n+1}), & 0\leqslant x\leqslant X_{2n+1},\\ V_n^{(+)}(x,\varepsilon,X_{2n+1}), & X_{2n+1}<x\leqslant 1;\end{cases}\quad \tau=\frac{x-X_{2n+1}}{\sqrt{\varepsilon}}. \tag{49}$$

4.2. О методе доказательства теоремы. Докажем теорему с помощью асимптотического метода дифференциальных неравенств, т.е. построив верхнее и нижнее решения задачи (1), (2) на основе формальных асимптотических рядов (8), (9) (см. [4]). Напомним понятия верхнего и нижнего решений для задачи (1), (2).

Определение. Две пары функций $\overline{U}(x,\varepsilon)$, $\overline{V}(x,\varepsilon)$ и $\underline{U}(x,\varepsilon)$, $\underline{V}(x,\varepsilon)$, принадлежащих по переменной x классу $C^{(2)}(0,1)\bigcap C^{(1)}[0,1]$, называются *упорядоченными верхним и нижним решениями* задачи (1), (2), если они удовлетворяют следующим условиям:

1) при $x\in[0,1]$ выполнены неравенства (условие упорядоченности)

$$\underline{U}(x,\varepsilon)\leqslant\overline{U}(x,\varepsilon)\quad\text{и}\quad\underline{V}(x,\varepsilon)\leqslant\overline{V}(x,\varepsilon);$$

2) при $x\in(0,1)$ справедливы неравенства

$$L_\varepsilon(\overline{U},\overline{V})\leqslant 0\leqslant L_\varepsilon(\underline{U},\underline{V}),\quad M_\varepsilon(\overline{V},\overline{U})\leqslant 0\leqslant M_\varepsilon(\underline{V},\underline{U})$$

(операторы L_ε и M_ε определены равенствами (47));

3) имеют место неравенства

$$\frac{d\overline{U}}{dx}(0,\varepsilon)\leqslant 0\leqslant\frac{d\underline{U}}{dx}(0,\varepsilon),\quad \frac{d\overline{V}}{dx}(0,\varepsilon)\leqslant 0\leqslant\frac{d\underline{V}}{dx}(0,\varepsilon),$$
$$\frac{d\overline{U}}{dx}(1,\varepsilon)\geqslant 0\geqslant\frac{d\underline{U}}{dx}(1,\varepsilon),\quad \frac{d\overline{V}}{dx}(1,\varepsilon)\geqslant 0\geqslant\frac{d\underline{V}}{dx}(1,\varepsilon).$$

В случае если верхнее и нижнее решения

$$\overline{U}(x,\varepsilon)=\begin{cases}\overline{U}^{(-)}(x,\varepsilon), & 0\leqslant x\leqslant \overline{x},\\ \overline{U}^{(+)}(x,\varepsilon), & \overline{x}\leqslant x\leqslant 1,\end{cases}\quad \overline{V}(x,\varepsilon)=\begin{cases}\overline{V}^{(-)}(x,\varepsilon), & 0\leqslant x\leqslant \overline{x},\\ \overline{V}^{(+)}(x,\varepsilon), & \overline{x}\leqslant x\leqslant 1,\end{cases}\tag{50}$$

$$\underline{U}(x,\varepsilon)=\begin{cases}\underline{U}^{(-)}(x,\varepsilon), & 0\leqslant x\leqslant \underline{x},\\ \underline{U}^{(+)}(x,\varepsilon), & \underline{x}\leqslant x\leqslant 1,\end{cases}\quad \underline{V}(x,\varepsilon)=\begin{cases}\underline{V}^{(-)}(x,\varepsilon), & 0\leqslant x\leqslant \underline{x},\\ \underline{V}^{(+)}(x,\varepsilon), & \underline{x}\leqslant x\leqslant 1,\end{cases}\tag{51}$$

не являются гладкими в точках $\overline{x}$ и $\underline{x}$ соответственно, они должны удовлетворять дополнительным условиям (см. [4]):

4) справедливы неравенства

$$\frac{d\overline{U}^{(-)}}{dx}(\overline{x},\varepsilon)\geqslant\frac{d\overline{U}^{(+)}}{dx}(\overline{x},\varepsilon),\quad \frac{d\overline{V}^{(-)}}{dx}(\overline{x},\varepsilon)\geqslant\frac{d\overline{V}^{(+)}}{dx}(\overline{x},\varepsilon);$$

5) справедливы неравенства

$$\frac{d\underline{U}^{(-)}}{dx}(\underline{x},\varepsilon)\leqslant\frac{d\underline{U}^{(+)}}{dx}(\underline{x},\varepsilon),\quad \frac{d\underline{V}^{(-)}}{dx}(\underline{x},\varepsilon)\leqslant\frac{d\underline{V}^{(+)}}{dx}(\underline{x},\varepsilon).$$

При этом неравенства условия 2) должны выполняться всюду на интервале $(0,1)$, за исключением точек $\overline{x}$ и $\underline{x}$ для верхнего и нижнего решений соответственно.

Условие 2) сформулировано для случая, когда функции F и f удовлетворяют в области

$$G_0=\{(u,v,x,\varepsilon):\underline{U}(x,\varepsilon)\leqslant u\leqslant\overline{U}(x,\varepsilon),\ \ \underline{V}(x,\varepsilon)\leqslant v\leqslant\overline{V}(x,\varepsilon),\ \ 0\leqslant x\leqslant 1,\ \ 0\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon_0\}\tag{52}$$

условию квазимонотонности, т.е. функция $F(u,v,x,\varepsilon)$ является невозрастающей функцией аргумента v, а функция $f(u,v,x,\varepsilon)$ – невозрастающей функцией аргумента u. Ниже будет показано, что в рассматриваемой задаче это свойство имеет место.

Если существуют упорядоченные верхнее и нижнее решения задачи (1), (2), то эта задача имеет решение $u=u(x,\varepsilon)$, $v=v(x,\varepsilon)$ (возможно, не единственное), удовлетворяющее неравенствам

$$\underline{U}(x,\varepsilon)\leqslant u(x,\varepsilon)\leqslant\overline{U}(x,\varepsilon),\quad \underline{V}(x,\varepsilon)\leqslant v(x,\varepsilon)\leqslant\overline{V}(x,\varepsilon),\quad x\in[0,1].\tag{53}$$

4.3. Оценки производных функции *F*. Введём обозначения

$$\tilde{U}^{(\mp)}(x,\varepsilon,x_*):=\bar{u}_0^{(\mp)}(x)+Q_0^{(\mp)}u(\tau,x_*)+\sqrt{\varepsilon}(\bar{u}_1^{(\mp)}(x)+\Pi_0^{(\mp)}u(\xi_\mp)+Q_2^{(\mp)}u(\tau,x_*)),$$

$$\tilde{V}^{(\mp)}(x,\varepsilon,x_*):=\bar{v}_0^{(\mp)}(x)+Q_0^{(\mp)}v(\tau,x_*)+\sqrt{\varepsilon}(\bar{v}_1^{(\mp)}(x)+\Pi_0^{(\mp)}v(\xi_\mp)+Q_2^{(\mp)}v(\tau,x_*)),$$

$$\tilde{F}_u^{(\mp)}(x,\varepsilon,x_*):=\frac{\partial F}{\partial u}(\tilde{U}^{(\mp)}(x,\varepsilon,x_*),\tilde{V}^{(\mp)}(x,\varepsilon,x_*),x,\varepsilon),$$

аналогично определяется $\tilde{F}_v^{(\mp)}$.

Для производных $\tilde{F}_u^{(\mp)}(x,\varepsilon,x_*)$ и $\tilde{F}_v^{(\mp)}(x,\varepsilon,x_*)$ при достаточно малых ε нетрудно получить оценки (см. [3])

$$\tilde{F}_u^{(-)}(x,\varepsilon,x_*)\geqslant c_0\sqrt{\varepsilon}>0,\quad x\in[0,x_*],\quad \tilde{F}_u^{(+)}(x,\varepsilon,x_*)\geqslant c_0\sqrt{\varepsilon}>0,\quad x\in[x_*,1],\tag{54}$$

$$\tilde{F}_v^{(-)}(x,\varepsilon,x_*)\leqslant -c\sqrt{\varepsilon}<0,\quad x\in[0,x_*],\quad \tilde{F}_v^{(+)}(x,\varepsilon,x_*)\leqslant -c\sqrt{\varepsilon}<0,\quad x\in[x_*,1].\tag{55}$$

Так как при $n\geqslant 1$ имеют место равенства

$$U_n^{(\mp)}(x,\varepsilon,x_*)=\tilde{U}^{(\mp)}(x,\varepsilon,x_*)+O(\varepsilon^{3/4}),\quad V_n^{(\mp)}(x,\varepsilon,x_*)=\tilde{V}^{(\mp)}(x,\varepsilon,x_*)+O(\varepsilon^{3/4}),$$

оценки (55) обеспечивают квазимонотонность функции F. Отметим, что при доказательстве этих оценок используется условие A9.

4.4. Верхнее и нижнее решения задачи (1), (2). Введём точки $\overline{x}(\varepsilon)$ и $\underline{x}(\varepsilon)$:

$$\overline{x}(\varepsilon)=X_{2n+1}-\varepsilon^{(n+1)/2}\delta,\quad \underline{x}(\varepsilon)=X_{2n+1}+\varepsilon^{(n+1)/2}\delta,$$

где δ – положительное число, которое будет выбрано ниже. Верхнее и нижнее решения задачи (1), (2) построим раздельно слева и справа от точек $\overline{x}$ и $\underline{x}$ соответственно в виде (50), (51). В точках $\overline{x}$ и $\underline{x}$ будем сшивать функции $\overline{U}^{(\mp)}$, $\overline{V}^{(\mp)}$ и $\underline{U}^{(\mp)}$, $\underline{V}^{(\mp)}$ так, чтобы они удовлетворяли равенствам

$$\overline{U}^{(\mp)}(\overline{x},\varepsilon)=\frac{U_n^{(-)}(\overline{x},\varepsilon,\overline{x})+U_n^{(+)}(\overline{x},\varepsilon,\overline{x})}{2}+\varepsilon^{(n+1)/2}\mu,\quad \overline{V}^{(\mp)}(\overline{x},\varepsilon)=\psi_2(\overline{x})+\varepsilon^{(n+1)/2}\mu,\tag{56}$$

$$\underline{U}^{(\mp)}(\underline{x},\varepsilon)=\frac{U_n^{(-)}(\underline{x},\varepsilon,\underline{x})+U_n^{(+)}(\underline{x},\varepsilon,\underline{x})}{2}-\varepsilon^{(n+1)/2}\mu,\quad \underline{V}^{(\mp)}(\underline{x},\varepsilon)=\psi_2(\underline{x})-\varepsilon^{(n+1)/2}\mu.\tag{57}$$

Отсюда последует непрерывность функций $\overline{U}$, $\overline{V}$ и $\underline{U}$, $\underline{V}$. Здесь μ – положительное число, которое выбирается далее вместе с δ так, чтобы обеспечить выполнение условий 4) и 5) определения.

Будем строить функции $\overline{U}^{(\mp)}$, $\overline{V}^{(\mp)}$, $\underline{U}^{(\mp)}$, $\underline{V}^{(\mp)}$ как модификацию функций $U_n^{(\mp)}$ и $V_n^{(\mp)}$, определённых в (45), (46):

$$\overline{U}^{(\mp)}(x,\varepsilon)=U_n^{(\mp)}(x,\varepsilon,\overline{x})+\varepsilon^{(n+1)/2}(\alpha^{(\mp)}(x)+e^{-\xi_\mp}+\overline{Q}^{(\mp)}u(\overline{\tau})+\overline{\Lambda}_\mp e^{\pm\gamma\overline{\sigma}}),$$

$$\underline{U}^{(\mp)}(x,\varepsilon)=U_n^{(\mp)}(x,\varepsilon,\underline{x})-\varepsilon^{(n+1)/2}(\alpha^{(\mp)}(x)+e^{-\xi_\mp}+\underline{Q}^{(\mp)}u(\underline{\tau})+\underline{\Lambda}_\mp e^{\pm\gamma\underline{\sigma}}),$$

$$\overline{V}^{(\mp)}(x,\varepsilon)=V_n^{(\mp)}(x,\varepsilon,\overline{x})+\varepsilon^{(n+1)/2}(\beta^{(\mp)}(x)+e^{-\xi_\mp}+\overline{Q}^{(\mp)}v(\overline{\tau}))+\varepsilon^{n/2+1}k\overline{\Lambda}_\mp(1-e^{\pm\gamma\overline{\sigma}}),$$

$$\underline{V}^{(\mp)}(x,\varepsilon)=V_n^{(\mp)}(x,\varepsilon,\underline{x})-\varepsilon^{(n+1)/2}(\beta^{(\mp)}(x)+e^{-\xi_\mp}+\underline{Q}^{(\mp)}v(\underline{\tau}))-\varepsilon^{n/2+1}k\underline{\Lambda}_\mp(1-e^{\pm\gamma\underline{\sigma}}),$$

где

$$\overline{\tau}=\frac{x-\overline{x}}{\sqrt{\varepsilon}},\quad \overline{\sigma}=\frac{x-\overline{x}}{\varepsilon^{3/4}},\quad \underline{\tau}=\frac{x-\underline{x}}{\sqrt{\varepsilon}},\quad \underline{\sigma}=\frac{x-\underline{x}}{\varepsilon^{3/4}},\quad \gamma=\sqrt{c_0},$$

постоянная c_0 определена в (54). Считаем, что все функции, зависящие от "растянутых" переменных, умножены на срезающие функции.

Определим функции $\alpha^{(\mp)}(x)$ и $\beta^{(\mp)}(x)$ как решения СЛАУ

$$\alpha^{(\mp)}-\bar{\varphi}_v^{(\mp)}(x)\beta^{(\mp)}=A,\quad \bar{f}_u^{(\mp)}(x)\alpha^{(\mp)}+\bar{f}_v^{(\mp)}(x)\beta^{(\mp)}=A,$$

где $A>0$ – число, которое будет выбрано ниже достаточно большим. Так как определители этих систем, равные $\bar{g}_v^{(\mp)}(x)$, отличны от нуля в силу условия A6, существуют единственные решения

$$\alpha^{(\mp)}(x)=\frac{\bar{f}_v^{(\mp)}(x)+\bar{\varphi}_v^{(\mp)}(x)}{\bar{g}_v^{(\mp)}(x)}A,\quad \beta^{(\mp)}(x)=\frac{1-\bar{f}_u^{(\mp)}(x)}{\bar{g}_v^{(\mp)}(x)}A.$$

В следующем пункте будет показано как выбрать числа A, δ, μ, k, $\overline{\Lambda}_\mp$, $\underline{\Lambda}_\mp$ и функции $\overline{Q}^{(\mp)}u$, $\overline{Q}^{(\mp)}v$, $\underline{Q}^{(\mp)}u$, $\underline{Q}^{(\mp)}v$, чтобы для всех достаточно малых ε две пары функций (50) и (51) были верхним и нижним решениями задачи (1), (2).

4.5. Проверка выполнения условий определения. Пусть $n\geqslant 1$. Заметим, что функции $F(u,v,x,\varepsilon)$ (в силу неравенств (55)) и $f(u,v,x,\varepsilon)$ (в силу условия A10) удовлетворяют условию квазимонотонности для достаточно малых ε в области G_0 (см. (52)).

Проверим выполнение неравенств $L_\varepsilon(\overline{U},\overline{V}) \leqslant 0$ и $M_\varepsilon(\overline{V},\overline{U}) \leqslant 0$ условия 2) на интервале $(0,\overline{x})$, где $\overline{U} = \overline{U}^{(-)}$, $\overline{V} = \overline{V}^{(-)}$. Выражения для $L_\varepsilon(\overline{U},\overline{V})$ и $M_\varepsilon(\overline{V},\overline{U})$ после длинных, но простых преобразований принимают вид

$$L_\varepsilon(\overline{U},\overline{V}) = \varepsilon^2\frac{d^2\overline{U}^{(-)}}{dx^2} - F(\overline{U}^{(-)},\overline{V}^{(-)},x,\varepsilon) = O(\varepsilon^{n/2+1}) - \tilde{F}_u^{(-)}(x,\varepsilon,\overline{x})\varepsilon^{(n+1)/2}A -$$

$$- \tilde{F}_u^{(-)}(x,\varepsilon,\overline{x})\varepsilon^{(n+1)/2}(\overline{Q}^{(-)}u - \hat{\varphi}_v^{(-)}(\overline{x},\overline{\tau},\overline{x})\overline{Q}^{(-)}v + O(Ae^{\kappa\overline{\tau}})) -$$
$$- \varepsilon^{(n+1)/2}\overline{\Lambda}_- e^{\gamma\overline{\sigma}}(\tilde{F}_u^{(-)}(x,\varepsilon,\overline{x}) - c_0\sqrt{\varepsilon}) + \varepsilon^{n/2+5/4}O(A) + \varepsilon^{n+1}O(A^2), \tag{58}$$

$$M_\varepsilon(\overline{V},\overline{U}) = \varepsilon\frac{d^2\overline{V}^{(-)}}{dx^2} - f(\overline{U}^{(-)},\overline{V}^{(-)},x,\varepsilon) = O(\varepsilon^{(n+1)/2}) - \varepsilon^{(n+1)/2}A +$$

$$+ \varepsilon^{(n+1)/2}\left(\frac{d^2\overline{Q}^{(-)}v}{d\overline{\tau}^2} - \hat{f}_u^{(-)}(\overline{x},\overline{\tau},\overline{x})\overline{Q}^{(-)}u - \hat{f}_v^{(-)}(\overline{x},\overline{\tau},\overline{x})\overline{Q}^{(-)}v + O(Ae^{\kappa\overline{\tau}})\right) -$$
$$- \varepsilon^{(n+1)/2}\overline{\Lambda}_- e^{\gamma\overline{\sigma}}(\hat{f}_u^{(-)}(x,\overline{\tau},\overline{x}) + kc_0) + \varepsilon^{n/2+1}O(A) + \varepsilon^{n+1}O(A^2). \tag{59}$$

Определим функции $\overline{Q}^{(-)}u$, $\overline{Q}^{(-)}v$ как решение задачи

$$\overline{Q}^{(-)}u - \hat{\varphi}_v^{(-)}(\overline{x},\overline{\tau},\overline{x})\overline{Q}^{(-)}v = \overline{C}^{(-)}Ae^{\kappa\overline{\tau}},$$

$$\frac{d^2\overline{Q}^{(-)}v}{d\overline{\tau}^2} = \hat{f}_u^{(-)}(\overline{x},\overline{\tau},\overline{x})\overline{Q}^{(-)}u + \hat{f}_v^{(-)}(\overline{x},\overline{\tau},\overline{x})\overline{Q}^{(-)}v - \overline{C}^{(-)}Ae^{\kappa\overline{\tau}},$$
$$\overline{Q}^{(-)}v(0) = \mu - \beta^{(-)}(\overline{x}), \quad \overline{Q}^{(-)}v(-\infty) = 0, \tag{60}$$

где число $\overline{C}^{(-)}$ выбирается достаточно большим, чтобы слагаемые $O(Ae^{\kappa\overline{\tau}})$ в правых частях равенств (58), (59) удовлетворяли неравенствам $|O(Ae^{\kappa\overline{\tau}})| \leqslant \overline{C}^{(-)}Ae^{\kappa\overline{\tau}}$. Эта задача аналогична задаче (30)–(32), и её решение находится в явном виде

$$\overline{Q}^{(-)}v(\overline{\tau},\overline{x}) = \Phi_{(-)}(\overline{\tau},\overline{x})\left(\frac{\mu - \beta^{(-)}(\overline{x})}{\Phi_{(-)}(0,\overline{x})} + \int\limits_0^{\overline{\tau}}\Phi_{(-)}^{-2}(s,\overline{x})\int\limits_{-\infty}^{s}\Phi_{(-)}(t,\overline{x})\overline{q}^{(-)}(t,\overline{x})\,dt\,ds\right),$$

$$\overline{Q}^{(-)}u(\overline{\tau},\overline{x}) = \hat{\varphi}_v^{(-)}(\overline{x},\overline{\tau},\overline{x})\overline{Q}^{(-)}v(\overline{\tau},\overline{x}) + \overline{C}^{(-)}Ae^{\kappa\overline{\tau}},$$

где $\overline{q}^{(-)}(t,\overline{x}) = (\hat{f}_u^{(-)}(\overline{x},t,\overline{x}) - 1)\overline{C}^{(-)}Ae^{\kappa t}$.

Первое граничное условие (60) обеспечивает выполнение второго равенства в (56) для знака $(-)$. Определим число $\overline{\Lambda}_-$ так, чтобы выполнялось первое равенство в (56):

$$\overline{\Lambda}_- = \frac{U_n^{(+)}(\overline{x},\varepsilon,\overline{x}) - U_n^{(-)}(\overline{x},\varepsilon,\overline{x})}{2\varepsilon^{(n+1)/2}} - \alpha^{(-)}(\overline{x}) - \overline{Q}^{(-)}u(0,\overline{x}) + \mu.$$

Число $\overline{\Lambda}_-$ зависит от ε, но является ограниченным при $\varepsilon \to 0$, так как разность в числителе дроби есть величина порядка $O(\varepsilon^{(n+1)/2})$. Заметим, что $\overline{\Lambda}_- > 0$ при достаточно большом μ.

Выражение (58) теперь принимает вид

$$L_\varepsilon(\overline{U},\overline{V}) = O(\varepsilon^{n/2+1}) - \tilde{F}_u^{(-)}(x,\varepsilon,\overline{x})\varepsilon^{(n+1)/2}A - \tilde{F}_u^{(-)}(x,\varepsilon,\overline{x})\varepsilon^{(n+1)/2}(\overline{C}^{(-)}Ae^{\kappa\overline{\tau}} + O(Ae^{\kappa\overline{\tau}})) -$$

$$- \varepsilon^{(n+1)/2}\overline{\Lambda}_- e^{\gamma\overline{\sigma}}(\tilde{F}_u^{(-)}(x,\varepsilon,\overline{x}) - c_0\sqrt{\varepsilon}) + \varepsilon^{n/2+5/4}O(A) + \varepsilon^{n+1}O(A^2).$$

Первое слагаемое в правой части равенства не зависит от A, поэтому сумму первых двух слагаемых в силу (54) можно сделать отрицательной выбором достаточно большого A. Третье слагаемое является отрицательным при достаточно большом $\overline{C}^{(-)}$. С учётом (54) четвёртое слагаемое также будет отрицательным при $\overline{\Lambda}_- > 0$. Так как $n \geqslant 1$, то пятое и шестое слагаемые имеют более высокий порядок малости по ε, чем первые четыре, и, значит, при достаточно малых ε не изменят знака всей суммы, т.е. будет выполнено неравенство

$$L_\varepsilon(\overline{U}, \overline{V}) < 0, \quad x \in (0, \overline{x}).$$

Выражение (59) принимает вид

$$M_\varepsilon(\overline{V}, \overline{U}) = O(\varepsilon^{(n+1)/2}) - \varepsilon^{(n+1)/2} A - \varepsilon^{(n+1)/2}(\overline{C}^{(-)} A e^{\kappa\overline{\tau}} + O(A e^{\kappa\overline{\tau}})) -$$

$$- \varepsilon^{(n+1)/2} \overline{\Lambda}_- e^{\gamma\overline{\sigma}} (\hat{f}_u^{(-)}(x, \overline{\tau}, \overline{x}) + kc_0) + \varepsilon^{n/2+1} O(A) + \varepsilon^{n+1} O(A^2).$$

С той лишь разницей, что здесь отрицательность четвёртого слагаемого обеспечивается за счёт выбора достаточно большого k, отсюда получаем выполнение неравенства

$$M_\varepsilon(\overline{V}, \overline{U}) < 0, \quad x \in (0, \overline{x}).$$

На интервале $(\overline{x}, 1)$, где $\overline{U} = \overline{U}^{(+)}$, $\overline{V} = \overline{V}^{(+)}$, неравенства $L_\varepsilon(\overline{U}, \overline{V}) < 0$ и $M_\varepsilon(\overline{V}, \overline{U}) < 0$ проверяются точно так же. Аналогичным образом доказывается, что на интервалах $(0, \underline{x})$ и $(\underline{x}, 1)$ выполнены неравенства для нижнего решения $L_\varepsilon(\underline{U}, \underline{V}) > 0$ и $M_\varepsilon(\underline{V}, \underline{U}) > 0$.

Таким образом, функции $\overline{U}$, $\overline{V}$ и $\underline{U}$, $\underline{V}$ удовлетворяют условию 2) определения для случая негладких верхнего и нижнего решений. Кроме того, эти функции являются непрерывными на отрезке $[0, 1]$, так как $\overline{U}^{(\mp)}$, $\overline{V}^{(\mp)}$ и $\underline{U}^{(\mp)}$, $\underline{V}^{(\mp)}$ по построению удовлетворяют равенствам (56), (57).

Условие 1) упорядоченности верхнего и нижнего решений проверяется стандартным способом (см. [5]).

Легко проверяется, что функции $\overline{U}$, $\overline{V}$ и $\underline{U}$, $\underline{V}$ удовлетворяют условию 3) определения.

Перейдём к проверке условия 4). Рассмотрим разность

$$\frac{d\overline{U}^{(-)}}{dx}(\overline{x}, \varepsilon) - \frac{d\overline{U}^{(+)}}{dx}(\overline{x}, \varepsilon) = \frac{dU_n^{(-)}}{dx}(\overline{x}, \varepsilon, \overline{x}) - \frac{dU_n^{(+)}}{dx}(\overline{x}, \varepsilon, \overline{x}) + \varepsilon^{n/2-1/4}\gamma(\overline{\Lambda}_- + \overline{\Lambda}_+) +$$

$$+ \varepsilon^{(n+1)/2}\left(\frac{d\alpha^{(-)}}{dx}(\overline{x}) - \frac{d\alpha^{(+)}}{dx}(\overline{x})\right) + \varepsilon^{n/2}\left(\frac{d\overline{Q}^{(-)}u}{d\overline{\tau}}(0, \overline{x}) - \frac{d\overline{Q}^{(+)}u}{d\overline{\tau}}(0, \overline{x})\right). \qquad (61)$$

Из формальных равенств (37) следует, что

$$\frac{dU_n^{(-)}}{dx}(X_{2n+1}, \varepsilon, X_{2n+1}) - \frac{dU_n^{(+)}}{dx}(X_{2n+1}, \varepsilon, X_{2n+1}) = O(\varepsilon^{n/2}),$$

а так как $\overline{x} - X_{2n+1} = O(\varepsilon^{(n+1)/2})$, то это равенство останется верным и при замене X_{2n+1} на $\overline{x}$. При этом выражение (61) примет вид

$$\frac{d\overline{U}^{(-)}}{dx}(\overline{x}, \varepsilon) - \frac{d\overline{U}^{(+)}}{dx}(\overline{x}, \varepsilon) = \varepsilon^{n/2-1/4}\gamma(\overline{\Lambda}_- + \overline{\Lambda}_+) + O(\varepsilon^{n/2}).$$

Выше было показано, что $\overline{\Lambda}_- > 0$ при достаточно большом μ; такое же неравенство получается для $\overline{\Lambda}_+$. Следовательно, при достаточно малых ε рассматриваемая разность будет положительной, т.е. будет выполнено первое неравенство условия 4).

Разность производных V-компонент верхнего решения приводится к виду

$$\frac{d\overline{V}^{(-)}}{dx}(\overline{x},\varepsilon) - \frac{d\overline{V}^{(+)}}{dx}(\overline{x},\varepsilon) = O(\varepsilon^{n/2}) - \varepsilon^{n/2}\delta J'(x_0) + O(\varepsilon^{n/2+1/4}),$$

где слагаемое $O(\varepsilon^{n/2})$ не зависит от δ. Так как $J'(x_0) < 0$ в силу (5), отсюда следует, что при достаточно большом δ и достаточно малых ε разность в левой части равенства будет положительной, т.е. будет выполнено второе неравенство из условия 4).

Условие 5) определения проверяется точно так же.

Таким образом, при $n \geqslant 1$ две пары функций $\overline{U}(x,\varepsilon)$, $\overline{V}(x,\varepsilon)$ и $\underline{U}(x,\varepsilon)$, $\underline{V}(x,\varepsilon)$, определённые формулами (50) и (51), являются для достаточно больших A, k, δ, μ и достаточно малых ε упорядоченными верхним и нижним решениями задачи (1), (2).

4.6. Завершение доказательства теоремы. Из существования упорядоченных верхнего и нижнего решений задачи (1), (2) следует, что эта задача для достаточно малых ε имеет решение $u(x,\varepsilon)$, $v(x,\varepsilon)$, удовлетворяющее неравенствам (53), а так как $\overline{U}$, $\overline{V}$ и $\underline{U}$, $\underline{V}$ отличаются от U_n, V_n на величины порядка $O(\varepsilon^{n/2})$, то и решение $u(x,\varepsilon)$, $v(x,\varepsilon)$ отличается от U_n, V_n на величины того же порядка, т.е.

$$u(x,\varepsilon) = U_n(x,\varepsilon) + O(\varepsilon^{n/2}), \quad v(x,\varepsilon) = V_n(x,\varepsilon) + O(\varepsilon^{n/2}), \quad x \in [0,1].$$

Эти оценки нетрудно улучшить, если написать их для номера $n+1$ и воспользоваться тем, что $U_{n+1}(x,\varepsilon) = U_n(x,\varepsilon) + O(\varepsilon^{(n+1)/2})$, $V_{n+1}(x,\varepsilon) = V_n(x,\varepsilon) + O(\varepsilon^{(n+1)/2})$, $x \in [0,1]$. Тогда для $n \geqslant 0$ получим равенства (48). Теорема доказана.

Следствие 1. *Имеют место предельные равенства (6).*

Следствие 2. *Предельным положением при* $\varepsilon \to 0$ *кривой* $l_\varepsilon = \{(u,v,x) : u = u(x,\varepsilon),\ v = v(x,\varepsilon),\ 0 \leqslant x \leqslant 1\}$ *(т.е. графика решения задачи (1), (2)) является кривая* L.

Следствие 3. *При каждом* $m = \overline{0, n-1}$ *для решения* $u(x,\varepsilon)$, $v(x,\varepsilon)$ *справедливы равенства вида (48), в которых* n *заменено на* m.

Следствие 4. *Для производных решения задачи (1), (2) справедливы асимптотические представления*

$$\frac{du}{dx}(x,\varepsilon) = \frac{dU_n}{dx}(x,\varepsilon) + O(\varepsilon^{n/2}), \quad \frac{dv}{dx}(x,\varepsilon) = \frac{dV_n}{dx}(x,\varepsilon) + O(\varepsilon^{n/2}), \quad x \in [0,1].$$

5. Пример. Рассмотрим краевую задачу для системы уравнений

$$\varepsilon^2\frac{d^2u}{dx^2} = (u-v)^2 - \varepsilon, \quad \varepsilon\frac{d^2v}{dx^2} = v^3 - u + (v^2-1)\left(x - \frac{1}{2}\right), \quad 0 < x < 1, \tag{62}$$

с граничными условиями (2). Легко проверяется выполнение условий A1–A10, где

$$\varphi(v,x) = v, \quad g(v,x) = (v^2-1)\left(v + x - \frac{1}{2}\right), \quad \psi_1(x) = -1, \quad \psi_2(x) = \frac{1}{2} - x, \quad \psi_3(x) = 1,$$

$$I(x) = \frac{4}{3}\left(\frac{1}{2} - x\right), \quad x_0 = \frac{1}{2}.$$

Построим асимптотику решения нулевого порядка, т.е. функции $U_0(x,\varepsilon)$, $V_0(x,\varepsilon)$ (см. (49)). Для функций регулярной части находим $\bar{u}_0^{(\mp)}(x) = \bar{v}_0^{(\mp)}(x) = \mp 1$. Все погранслойные функции нулевого порядка оказываются равными нулю (это связано с тем, что в данном примере $\bar{u}_0^{(\mp)}(x)$ и $\bar{v}_0^{(\mp)}(x)$ – постоянные).

Внутрислойную часть асимптотики следует строить при $x_* = X_1 = x_0 + \varepsilon^{1/4} x_1 = x_0 = 1/2$. Функции $Q_0^{(\mp)} v(\tau)$ определяются как решения задач (21), (19). В отличие от общего случая, в данном примере удаётся найти их в явном виде:

$$Q_0^{(\mp)} v(\tau) = \frac{\pm 2}{1 + \exp(\mp\sqrt{2}\tau)}.$$

Из (22) следует равенство $Q_0^{(\mp)} u(\tau) = Q_0^{(\mp)} v(\tau)$.

Таким образом, асимптотика нулевого порядка в задаче (62), (2) имеет вид

$$U_0(x,\varepsilon) = V_0(x,\varepsilon) = \begin{cases} -1 + \dfrac{2}{1+\exp(-\sqrt{2}\tau)}, & 0 \leqslant x \leqslant 1/2, \\ 1 - \dfrac{2}{1+\exp(\sqrt{2}\tau)}, & 1/2 \leqslant x \leqslant 1, \end{cases} \quad \tau = \frac{x - 1/2}{\sqrt{\varepsilon}}.$$

По доказанной теореме существует решение этой задачи, которое отличается от $U_0(x,\varepsilon)$, $V_0(x,\varepsilon)$ на величину $O(\sqrt{\varepsilon})$.

6. Заключительные замечания.

1. В данной задаче внутренний переходный слой описывается функциями, зависящими от одной растянутой переменной τ, т.е. является одномасштабным, что нехарактерно для систем обыкновенных дифференциальных уравнений вида (1) с различными степенями малого параметра при вторых производных. В исследованных ранее задачах такого типа с кратным корнем вырожденного уравнения внутренний слой оказывался двухмасштабным. Для случая простых корней одномасштабный внутренний слой был описан, например, в работе [6].

2. Если функция h (см. условие A1) зависит не только от x, но также от u и v, причём $h(u,v,x) > 0$ при $(u,v,x) \in I_u \times I_v \times [0,1]$, то качественные особенности асимптотики решения с переходным слоем сохраняются, но выкладки становятся более громоздкими.

3. Представляет интерес случай, когда корень $u = \varphi(v,x)$ первого уравнения (3) является трёхкратным.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Нефёдов Н.Н.* Развитие методов асимптотического анализа переходных слоев в уравнениях реакции–диффузии–адвекции: теория и применение // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2021. Т. 61. № 12. С. 2074–2094.
2. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М., 1990.
3. *Бутузов В.Ф., Симаков Р.Е.* Асимптотика решения сингулярно возмущённой системы уравнений с многозонным внутренним слоем // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 4. С. 435–465.
4. *Нефёдов Н.Н.* Метод дифференциальных неравенств для некоторых классов нелинейных сингулярно возмущённых задач с внутренними слоями // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31. № 7. С. 1132–1139.
5. *Бутузов В.Ф., Левашова Н.Т., Мельникова А.А.* Контрастная структура типа ступеньки в сингулярно возмущённой системе уравнений с различными степенями малого параметра // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2012. Т. 52. № 11. С. 1983–2003.
6. *Левашова Н.Т., Петровская Е.С.* Применение метода дифференциальных неравенств для обоснования асимптотики решения системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений в виде контрастной структуры типа ступеньки // Учен. зап. физ. ф-та Моск. ун-та. 2014. № 3. С. 143101.

Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова

Поступила в редакцию 19.11.2022 г.
После доработки 26.01.2023 г.
Принята к публикации 14.02.2023 г.