ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 3, с. 350–357

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.95

НЕЛОКАЛЬНАЯ ЗАДАЧА С ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ СКЛЕИВАНИЯ ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ КАПУТО

© 2023 г. О. Х. Абдуллаев

Для параболо-гиперболического уравнения с двумя линиями изменения типа, содержащего нелинейное нагруженное слагаемое, исследуется нелокальная задача с интегральным условием склеивания. Единственность решения задачи доказывается методом интегралов энергии, а существование – с применением теории интегральных уравнений. Определяются классы и достаточные условия для заданных функций, обеспечивающих однозначную разрешимость исследуемой задачи.

DOI: 10.31857/S0374064123030056, EDN: QUNKQU

Введение. Данная работа посвящена исследованию нелокальной задачи с интегральными условиями склеивания для нагруженного параболо-гиперболического уравнения

$$0=\begin{cases} u_{xx}-{}_CD_{oy}^{\alpha}u+f_1(x,y;u(x;0)) & \text{при}\quad x>0,\quad y>0,\\ u_{xx}-u_{yy}+f_2(x,y;u(x+y;0)) & \text{при}\quad x>0,\quad y<0,\\ u_{xx}-u_{yy}+f_3(x,y;u_y(0;x+y)) & \text{при}\quad x<0,\quad y>0\end{cases} \tag{1}$$

с оператором Капуто [1, с. 108]

$${}_CD_{0y}^{\alpha}f(y)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^y (y-z)^{-\alpha}f'(z)\,dz$$

дробного порядка $0<\alpha<1$, где $f_i(\cdot)$, $i=1,2,3,$ – заданные функционалы, действующие на следы решения уравнения (1) и его производной по переменной y.

Локальная задача с разрывными условиями склеивания (но без интегрального слагаемого) для уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{1-\operatorname{sign}(xy)}{2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{1+\operatorname{sign}(xy)}{2}\,{}_CD_{0t}^{\alpha}u=f(x,y),\quad \alpha\in(0,1),$$

была изучена в статье [2]. Следует отметить, что это уравнение линейное (причём без нагруженной части). При исследовании поставленной задачи с линейными условиями для него были получены линейное дифференциальное уравнение (относительно $u(x,0)=\tau_1(x)$) и линейное интегральное уравнение типа Вольтерры второго рода (относительно $u_y(0,y)=\tau_2'(y)$) со слабой особенностью, однозначная разрешимость которой сразу следует из теории интегральных уравнений.

Локальные и нелокальные задачи с непрерывными и разрывными условиями склеивания для нагруженных уравнений параболо-гиперболических типа с одной линией изменения типа, содержащие различные интегро-дифференциальные операторы целого и дробного порядков, были изучены в работах [3–6] и др. Хотелось бы отметить, что уравнения и задачи, рассмотренные в этих работах, не содержат нелинейные части.

Задачи для уравнений смешанного типа с двумя и тремя линиями изменения типа целого и дробного порядка рассмотрены в статьях [7–10] и др.

В работах [11] и [12] доказана однозначная разрешимость различных локальных и нелокальных краевых задач с интегральными условиями склеивания для параболо-гиперболического уравнения с нелинейной нагруженной частью и дифференциальным оператором Капуто, имеющего только одну линию изменения типа.

1. Постановка задачи и основные функциональные соотношения. Рассмотрим уравнение (1) в конечной области $\Omega \subset R^2$, ограниченной отрезками A_1A_2, A_2B_2 прямых $x=l$, $y=h$ при $x>0$, $y>0$ и A_1C_1, C_1B_1 на характеристиках $x-y=l$, $x+y=0$ уравнения (1) при $x>0$, $y<0$, а также отрезками B_1C_2, C_2B_2 на характеристиках $x+y=0$, $y-x=h$ уравнения (1) при $x<0$, $y>0$, здесь $l,h=\mathrm{const}>0$. Параболическую часть смешанной области Ω обозначим через Ω_1, а гиперболические части – через Ω_2 при $x>0$ и Ω_3 при $x<0$.

Задача NL. Требуется найти решение $u(x;y)$ уравнения (1) из класса функций

$$W=\{u: u\in C(\bar\Omega)\bigcap C^1(\Omega_3\bigcup B_1C_2)\bigcap C^2(\Omega_2\bigcup\Omega_3);\, u_{xx},\ \ {}_CD^{\alpha}_{0y}u\in C(\Omega_1)\},$$

удовлетворяющее краевым условиям

$$u(l;t)=\varphi(y),\quad 0\leqslant y\leqslant h, \tag{2}$$

$$u(x;-x)=\psi(x),\quad 0\leqslant x\leqslant l/2, \tag{3}$$

$$\frac{d}{dy}u(-y/2;y/2)=a_1(y)u_x(-0;y)+a_2(y)u_y(-0;y)+a_3(y)u(0;y)+a_4(y),\quad 0<y<h, \tag{4}$$

и интегральным условиям склеивания

$$\lim_{y\to+0}y^{1-\alpha}u_y(x;y)=\lambda_1(x)u_y(x;-0)+\lambda_2(x)u_x(x;-0)+\lambda_3(x)\int\limits_0^x r_1(t)u^{p_1}(t;0)\,dt+$$
$$+\lambda_4(x)u^{p_2}(x;0)+\lambda_5(x),\quad 0<x<l, \tag{5}$$

$$u_x(+0;y)=\mu_1(y)u_x(-0;y)+\mu_2(y)u_y(-0;y)+\mu_3(y)\int\limits_0^y r_2(t)u(0;t)\,dt+$$
$$+\mu_4(y)u(0;y)+\mu_5(y),\quad 0<y<h, \tag{6}$$

где $a_k(y)$, $\lambda_k(x)$, $\mu_k(y)$, $k=\overline{1,5}$, $\varphi(y)$, $\psi(x)$, $r_1(x)$, $r_2(y)$ – заданные достаточно гладкие функции, причём $\sum_{k=1}^4\lambda_k^2(x)\neq0$, $\sum_{i=1}^3 a_k^2(x)\neq0$ и $\sum_{k=1}^4\mu_k^2(x)\neq0$.

Учитывая решение задачи Коши для уравнения (1) с начальными данными

$$u(x,0)=\tau_1(x),\quad 0\leqslant x\leqslant l;\quad u_y(x,-0)=\nu_1^-(x),\quad 0<x<l,$$

$$u(0,y)=\tau_2(y),\quad 0\leqslant y\leqslant h;\quad u_x(-0,y)=\nu_2^-(y),\quad 0<y<h,$$

а также используя краевые условия (3) и (4), находим основные функциональные соотношения

$$\nu_1^-(x)=\tau_1'(x)-\psi'\left(\frac{x}{2}\right)-\frac12\int\limits_0^x f_2\left(\frac{\xi+x}{2},\frac{\xi-x}{2};\tau_1(\xi)\right)d\xi,\quad 0<x<l, \tag{7}$$

и

$$(2a_1(y)+1)\nu_2^-(y)=(1-2a_2(y))\tau_2'(y)-2a_3(y)\tau_2(y)-$$
$$-\frac12\int\limits_0^y f_3\left(\frac{\xi+x}{2},\frac{\xi-x}{2};\tau_2'(\xi)\right)d\xi-2a_4(y),\quad 0<y<h, \tag{8}$$

соответственно из гиперболических областей Ω_2 и Ω_3.

2. Исследование задачи NL. Введём обозначения

$$\lim_{y\to+0} y^{1-\alpha}u_y(x,y)={\nu_1}^+(x),\quad u_x(+0,y)={\nu_2}^+(y).$$

Из интегральных условий склеивания (5), (6) имеем

$${\nu_1}^+(x)=\lambda_1(x)\nu_1^-(x)+\lambda_2(x)\tau_1'(x)+\lambda_3(x)\int\limits_0^x r_1(t)\tau_1^{p_1}(t)\,dt+\lambda_4(x)\tau_1^{p_2}(x)+\lambda_5(x),\quad 0<x<l, \tag{9}$$

$${\nu_2}^+(y)=\mu_1(y)\nu_2^-(y)+\mu_2(y)\tau_2'(y)+\mu_3(y)\int\limits_0^y r_2(t)\tau_2(t)\,dt+\mu_4(y)\tau_2(y)+\mu_5(y),\quad 0<y<h. \tag{10}$$

Далее из параболического уравнения (1) при $y\to+0$ с учётом равенства $\lim\limits_{y\to0}D_{0y}^{\alpha-1}f(y)=$ $=\Gamma(\alpha)\lim\limits_{y\to0}y^{1-\alpha}f(y)$ (см. [13, с. 35]) и интегрального условия склеивания (9) получим

$$\tau_1''(x)-\Gamma(\alpha)\lambda_1(x)\nu_1^-(x)-\Gamma(\alpha)\lambda_2(x)\tau_1'(x)-\Gamma(\alpha)\lambda_3(x)\int\limits_0^x r_1(t)\tau_1^{p_1}(t)\,dt-$$

$$-\Gamma(\alpha)\lambda_4(x)\tau_1^{p_2}(x)+f_1(x,0;\tau_1(x))-\Gamma(\alpha)\lambda_5(x)=0. \tag{11}$$

Подставив (7) в (11), запишем интегро-дифференциальное уравнение относительно $\tau_1(x)$:

$$\tau_1''(x)-\Gamma(\alpha)(\lambda_1(x)+\lambda_2(x))\tau_1'(x)-\Gamma(\alpha)\lambda_3(x)\int\limits_0^x r_1(t)\tau_1^{p_1}(t)\,dt-\Gamma(\alpha)\lambda_4(x)\tau_1^{p_2}(x)+f_1(x,0;\tau_1(x))+$$

$$+\frac{\Gamma(\alpha)}{2}\lambda_1(x)\int\limits_0^x f_2\left(\frac{\xi+x}{2},\frac{\xi-x}{2};\tau_1(\xi)\right)d\xi-\Gamma(\alpha)\lambda_5(x)+\Gamma(\alpha)\lambda_1(x)\psi'\left(\frac{x}{2}\right)=0. \tag{12}$$

Уравнение (12) запишем в следующем виде:

$$\tau_1''(x)-\beta(x)\tau_1'(x)+\Phi(x;\tau_1(x))=g(x), \tag{13}$$

где $\beta(x)=\Gamma(\alpha)(\lambda_1(x)+\lambda_2(x))$,

$$\Phi(x;\tau_1(x))=f_1(x,0;\tau_1(x))+\frac{\Gamma(\alpha)}{2}\lambda_1(x)\int\limits_0^x f_2\left(\frac{\xi+x}{2},\frac{\xi-x}{2};\tau_1(\xi)\right)d\xi-$$

$$-\Gamma(\alpha)\lambda_3(x)\int\limits_0^x r_1(t)\tau_1^{p_1}(t)\,dt-\Gamma(\alpha)\lambda_4(x)\tau_1^{p_2}(x), \tag{14}$$

$$g(x)=\Gamma(\alpha)\lambda_5(x)+\Gamma(\alpha)\lambda_1(x)\psi'(x/2).$$

Пусть существуют значения p_1 и p_2, удовлетворяющие неравенству

$$|z_1^{p_i}(x)-z_2^{p_i}(x)|\leqslant L(p_i)|z_1(x)-z_2(x)|,\quad L(p_i)=\mathrm{const}>0,\quad i=1,2, \tag{15}$$

для всех функций $z_i(x)\in C[0,l]\bigcap C^2(0,l)$, $i=1,2$, кроме того, функции $f_i(\cdot)$, $j=1,2,3$, удовлетворяют условию Липшица по третьему аргументу, т.е. имеют место оценки

$$|f_1(x,0;z_1(x))-f_1(x,0;z_2(x))|\leqslant L_1|z_1(x)-z_2(x)|,\quad L_1=\mathrm{const}>0, \tag{16}$$

$$\left|f_2\left(\frac{\xi+x}{2},\frac{\xi-x}{2};z_1(\xi)\right)-f_2\left(\frac{\xi+x}{2},\frac{\xi-x}{2};z_2(\xi)\right)\right|\leqslant L_2|z_1(\xi)-z_2(\xi)|,\quad L_2=\mathrm{const}>0,\quad (17)$$

$$\left|f_3\left(\frac{\xi-y}{2},\frac{\xi+y}{2};z_1(\xi)\right)-f_3\left(\frac{\xi-y}{2},\frac{\xi+y}{2};z_2(\xi)\right)\right|\leqslant L_3|z_1(\xi)-z_2(\xi)|,\quad L_3=\mathrm{const}>0.\quad (18)$$

Тогда справедлива

Теорема. *Пусть числа* $p_1,p_2\geqslant 1,$ $a_3(y)\mu_1(y)\neq 0,$ *функции* $f_i(\cdot)\in C(\bar{\Omega}_i\times\mathbb{R})\bigcap C^1(\Omega_i\times\times\mathbb{R}),$ $i=1,2,3,$ *удовлетворяют условию Липшица по третьему аргументу и имеют место условия*

$$\lambda_i(x),\lambda_5(x),r_1(x)\in C[0,l]\bigcap C^1(0,l),\quad i=\overline{1,4},\quad \psi(x)\in C[0,l/2]\bigcap C^2(0,l/2),\qquad (19)$$

$$a_i(y),\mu_i(y),\mu_5(y),\varphi(y),r_2(y)\in C[0,h]\bigcap C^1(0,h),\quad i=\overline{1,4},\qquad (20)$$

$$2a_1(y)+1\neq 0,\quad \mu_i(y)(1-2a_2(y))+\mu_2(y)(2a_1(y)+1)\neq 0,\qquad (21)$$

$$l^2e^{\beta_0}(L_1+c_3+l(c_1L_2+c_2))<1,\qquad (22)$$

где $\beta_0=\Gamma(\alpha)(\|\lambda_1(x)\|_C+\|\lambda_2(x)\|_C),$ $c_1=\Gamma(\alpha)\|\lambda_1(x)\|_C/2,$ $c_2=\Gamma(\alpha)L(p_1)\|\lambda_3(x)\|_C\|r_1(x)\|_C,$ $c_3=\Gamma(\alpha)L(p_2)\|\lambda_4(x)\|_C.$ *Тогда решение задачи NL существует и единственно.*

Доказательство. Заметим, что нелинейное дифференциальное уравнение (13) с условиями $\tau_1(0)=\psi(0)$ и $\tau_1(l)=\varphi(0)$ (эти условия вытекают из краевых условий (2) и (3)) легко сводится к нелинейному интегральному уравнению вида

$$\tau_1(x)-g_1(x)=\int\limits_0^l\Phi(z;\tau_1(z))K_1(x,z)\,dz\equiv I(\tau_1),\qquad (23)$$

где

$$K_1(x,z)=B^-(x)\begin{cases}\delta(x)\int\limits_z^l B(t)\,dt-\int\limits_x^l B(t)\,dt & \text{при}\ \ 0\leqslant z\leqslant x,\\ \delta(x)\int\limits_z^l B(t)\,dt-\int\limits_z^l B(t)\,dt & \text{при}\ \ x\leqslant z\leqslant l,\end{cases}$$

$$g_1(x)=\int\limits_0^l g(z)K_1(x,z)dx+(\varphi(0)-\psi(0))\delta(x)+\psi(0),\quad \delta(x)=\int\limits_x^l B(t)\,dt\Big/\int\limits_0^l B(t)\,dt,$$

$B(x)=\exp(\int_0^x\beta(t)\,dt),$ $B^-(x)=\exp(-\int_0^x\beta(t)\,dt),$ причём, учитывая класс заданных функций (19), имеем

$$|K_1(x,z)|\leqslant k_{01}=le^{\beta_0},\quad |g_1(x)|\leqslant g_{01}=\Gamma(\alpha)k_{01}l(\|\lambda_5(x)\|_C+\|\lambda_1(x)\varphi'(x/2)\|_C)+|\varphi(0)|.\quad (24)$$

В случае если $p_1=p_2=1$ и $f_j(\cdot),$ $j=1,2,3,$ – линейные функции относительно третьего аргумента, однозначная разрешимость интегрального уравнения (23) следует из единственности решений линейных интегральных уравнений Фредгольма второго рода [14, с. 78, теорема 2] (т.е. в этом случае отдельно доказывается единственность решения задачи).

Пусть функции $f_i(\cdot),$ $j=1,2,$ удовлетворяют условиям (16) и (17), тогда из (14), учитывая класс заданных функций (см. (19)) и используя неравенство (15), получаем

$$|\Phi(z;\tilde{\tau}_1(z))-\Phi(z;\tilde{\tau}_2(z))|\leqslant L_1|\tilde{\tau}_1(z)-\tilde{\tau}_2(z)|+c_1L_2\left|\int\limits_0^x|\tilde{\tau}_1(z)-\tilde{\tau}_2(z)|\,dz\right|+$$

$$+ c_2\bigg|\int\limits_0^x |\tilde\tau_1(z) - \tilde\tau_2(z)|\,dz\bigg| + c_3|\tilde\tau_1(z) - \tilde\tau_2(z)| =$$

$$= (L_1 + c_3)|\tilde\tau_1(z) - \tilde\tau_2(z)| + (c_1L_2 + c_2)\bigg|\int\limits_0^x |\tilde\tau_1(z) - \tilde\tau_2(z)|\,dz\bigg|, \tag{25}$$

где $\tilde\tau(x) = \tau_1(x)$. Разрешимость интегрального уравнения (23) доказываем методом последовательных приближений, при этом функциональную последовательность относительно функции $\tilde\tau(x)$ построим с помощью рекуррентного уравнения

$$\tilde\tau_n(x) = \int\limits_0^l \Phi(z;\tilde\tau_{n-1}(z))K_1(x,z)\,dz + g_1(x),$$

где $\tilde\tau_0(x) = g_1(x)$.

Учитывая неравенства $|\Phi(z;\tilde\tau(z))| \leqslant \Phi_0$, $\Phi_0 = \mathrm{const} > 0$, и (24), (25), можно убедиться в справедливости соотношений

$$|\tilde\tau_1(x) - \tilde\tau_0(x)| \leqslant k_{01}l\Phi_0, \quad |\tilde\tau_2(x) - \tilde\tau_1(x)| \leqslant k_{01}^2 l^2(L_1 + c_3 + l(c_1L_2 + c_2))\Phi_0, \quad \ldots$$

$$\ldots, \quad |\tilde\tau_n(x) - \tilde\tau_{n-1}(x)| \leqslant k_{01}^n l^n (L_1 + c_3 + l(c_1L_2 + c_2))^{n-1}\Phi_0. \tag{26}$$

В силу условия (22) из оценки (26) следует, что оператор в правой части интегрального уравнения (23) является сжимающим. Следовательно, для оператора $I(\tau_1)$ существует единственная неподвижная точка, т.е. интегральное уравнение (23) имеет единственное решение в классе $C[0,l]\bigcap C^2(0,l)$. После определения функции $\tau_1(x)$ из функционального соотношения (7) находим $\nu_1(x)$. Таким образом, решение исследуемой задачи в области Ω_2 можно восстановить как решение задачи Коши.

Далее, воспользовавшись решением первой краевой задачи для параболического уравнения в области Ω_1, находим второе функциональное соотношение между функциями $\tau_2(y)$ и $\nu_2^+(y)$ на отрезке B_1B_2, которое имеет вид [2, формула (2.12); 15, формула (11)]

$$\nu_2^+(y) = -\int\limits_0^y K(y-t)\tau_2'(t)\,dt + \Phi_1(y), \tag{27}$$

где

$$K(y-t) = \frac{1}{(y-t)^\beta}\bigg[\frac{1}{\Gamma(1-\beta)} + 2\sum_{n=1}^\infty e_{1,\beta}^{1,1-\beta}\bigg(-\frac{2nl}{(y-t)^\beta}\bigg)\bigg], \quad \beta = \frac{\alpha}{2},$$

$$\Phi_1(y) = 2\int\limits_0^y \sum_{m=0}^\infty (y-\eta)^{-\beta-1} e_{1,\beta}^{1,-\beta}\bigg(-\frac{2ml+1}{(y-\eta)^\beta}\bigg)\varphi(\eta)\,d\eta -$$

$$- \int\limits_0^l \sum_{m=0}^\infty y^{-\alpha} e_{1,\beta}^{1,1-\alpha}\bigg(-\frac{2ml-\xi}{y^\beta}\bigg)\tau_1(\xi)\,d\xi - \lim_{x\to+0}\int\limits_0^y\int\limits_0^l G_x(x,y,\xi,\eta)f_1(\xi,\eta,\tau_1(\xi))\,d\xi\,d\eta,$$

$$V(x,y;\eta) = \lim_{\xi\to l} G_\xi(x,y;\xi,\eta) = \frac{1}{y-\eta}\sum_{n=-\infty}^\infty \mathrm{sign}\,(x + (2n+1)l) e_{1,\beta}^{1,0}\bigg(-\frac{x+(2n+1)l}{(y-\eta)^\beta}\bigg),$$

$$\bar G(x,\xi,y) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^y \eta^{-\alpha}G(x,y,\xi,\eta)\,d\eta,$$

$$e_{1,\beta}^{1,\gamma}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!\Gamma(\gamma - \beta n)}$$

– функция типа Райта [13, с. 23], а

$$G(x,y,\xi,\eta) = \frac{(y-\eta)^{\alpha/2-1}}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[e_{1,\alpha/2}^{1,\alpha/2}\left(-\frac{|x-\xi+2nl|}{(y-\eta)^{\alpha/2}}\right) - e_{1,\alpha/2}^{1,\alpha/2}\left(-\frac{|x+\xi+2nl|}{(y-\eta)^{\alpha/2}}\right)\right]$$

– функции Грина первой краевой задачи [13, с. 123; 16]. Заметим, что ядро $K(y-t)$, представленное в виде ряда функций типа Райта, имеет слабую особенность (см. [13, формулы (2.2.5), (2.2.24)]), т.е. $|K(y-t)| \leqslant \mathrm{const} \times (y-t)^{-\beta}$. Также можно убедится, что $|\Phi_1(y)| \leqslant \mathrm{const}$ (см. [13, с. 108]).

Пусть $2a_1(y)+1 \neq 0$. Тогда, учитывая (8), (10) и (27), получаем

$$A_1(y)\tau_2'(y) - A_2(y)\int_0^y \tau_2'(t)\,dt + \mu_3(y)\int_0^y \tau_2'(z)\,dz\int_z^y r_2(t)\,dt +$$

$$+\int_0^y K(y-t)\tau_2'(t)\,dt - \tilde{A}_3(y)\int_0^y f_3\left(\frac{t-y}{2}, \frac{t+y}{2}; \tau_2'(t)\right)dt = F(y),$$

$$F(y) = \Phi_1(y) + \psi(0)\left(\mu_3(y)\int_0^y r_2(t)\,dt - A_2(y)\right) - \mu_5(y) + \frac{2a_4(y)\mu_1(y)}{1+2a_1(y)},$$

где $\tilde{A}_3(y)\mu_1(y)/(2+4a_1(y))$. Далее, учитывая условие (21), последнее уравнение запишем в виде

$$\tau_2'(y) + \int_0^y K_2(t,y)\tau_2'(t)\,dt = F^*(y) - A^*(y)\int_0^y f_3\left(\frac{t-y}{2}, \frac{t+y}{2}; \tau_2'(t)\right)dt, \tag{28}$$

где

$$K_2(t,y) = \frac{\mu_3(y)\int_t^y r_2(z)\,dz + K(y-t) - A_2(y)}{A_1(y)}, \quad A^*(y) = -\frac{\tilde{A}_3(y)}{A_1(y)}, \quad F^*(y) = \frac{F(y)}{A_1(y)},$$

причём, учитывая класс заданных функций (см. (20)) и неравенства $|K(y-t)| \leqslant \mathrm{const} \times$ $\times (y-t)^{-\beta}$, $|\Phi_1(y)| \leqslant \mathrm{const}$, имеем

$$|A^*(y)| \leqslant A_0, \quad |K_2(t,y)| \leqslant k_{02}(y-t)^{-\beta}, \quad |F^*(y)| \leqslant F_0, \quad \left|f_3\left(\frac{t-y}{2}, \frac{t+y}{2}; \tau_2'(t)\right)\right| \leqslant f_{03},$$

где $A_0, k_{02}, F_0, f_{03} = \mathrm{const} > 0$.

Так как ядро интегрального уравнения (28) имеет слабую особенность и правая часть этого уравнения является непрерывной функцией, то, основываясь на теории интегральных уравнений Вольтерры второго рода, запишем решение в виде

$$\tau_2'(y) = F^*(y) + \int_0^y R(t,y)F^*(t)\,dt - A^*(y)\int_0^y f_3\left(\frac{t-y}{2}, \frac{t+y}{2}; \tau_2'(t)\right)dt -$$

$$-\int_0^y R(t,y)A^*(t)\,dt\int_0^t f_3\left(\frac{z-t}{2}, \frac{z+t}{2}; \tau_2'(z)\right)dt, \tag{29}$$

где $R(t,y)$ – резольвента ядра $K_2(t,y)$, причём $|R(t,y)| \leqslant r_0(y-t)^{-\beta}$, $r_0 = \mathrm{const} > 0$. Полученное уравнение (29) исследуем также методом последовательных приближений.

Рассмотрим рекуррентное уравнение

$$\tau_n^*(y) = -A^*(y)\int\limits_0^y f_3\left(\frac{t-y}{2}, \frac{t+y}{2}; \tau_{n-1}^*(t)\right)dt -$$

$$-\int\limits_0^y R(t,y)A^*(t)\,dt\int\limits_0^t f_3\left(\frac{z-t}{2}, \frac{z+t}{2}; \tau_{n-1}^*(z)\right)dz + \tilde{F}(y), \tag{30}$$

где $\tilde{F}(y) = F^*(y) + \int_0^y R(t,y)F^*(t)\,dt$, причём $|\tilde{F}(y)| \leqslant \tilde{F}_0$.

Пусть функция $f_3(\,\cdot\,,\cdot\,;\tau_2'(t))$ удовлетворяет условию Липшица по третьему аргументу (см. условие (18)), т.е.

$$|f_3(\,\cdot\,,\cdot\,;\tau_1^*(t)) - f_3(\,\cdot\,,\cdot\,;\tau_2^*(t))| \leqslant L_3|\tau_1^*(t) - \tau_2^*(t)|, \quad L_3 = \mathrm{const} > 0,$$

где $\tau^*(t) = \tau_2'(t)$. Тогда, предполагая $\tau_0^*(y) = \tilde{F}(y)$ и учитывая (30), составим функциональную последовательность относительно $\tau^*(y)$, сходимость которой следует из неравенств

$$|\tau_1^*(y) - \tau_0^*(y)| \leqslant \left|A^*(y)\int\limits_0^y f_3\left(\frac{t-y}{2}, \frac{t+y}{2}; \tau_0^*(t)\right)dt\right| +$$

$$+\left|\int\limits_0^y R(t,y)A^*(t)\,dt\int\limits_0^t f_3\left(\frac{z-t}{2}, \frac{z+t}{2}; \tau_0^*(z)\right)dz\right| \leqslant A_0f_{03}y + A_0r_0f_{03}\frac{y^2}{2} \leqslant cy,$$

$$|\tau_2^*(y) - \tau_1^*(y)| \leqslant cL_3\left|A^*(y)\int\limits_0^y t\,dt\right| + c\left|\int\limits_0^y A^*(t)R(t,y)\,dt\int\limits_0^t z\,dz\right| \leqslant$$

$$\leqslant cA_0L_3\frac{y^2}{2!} + cA_0r_0\frac{y^3}{3!} \leqslant cA_0(L_3+r_0)\frac{y^2}{2!}, \quad \ldots$$

$$\ldots, \quad |\tau_n^*(y) - \tau_{n-1}^*(y)| \leqslant cA_0(L_3+r_0)^{n-1}\frac{y^n}{n!}$$

при $0 < y < h \leqslant 1$. Отметим также, что если $1 < y < h < \infty$, то можно получить аналогичные неравенства, из которых следует сходимость функциональной последовательности $\{\tau_n^*(y)\}$.

Пусть предел последовательности $\{\tau_n^*(y)\}$ есть функция $\hat{\tau}_2(y)$, т.е. $\tau_2'(y) = \hat{\tau}_2(y)$, тогда, учитывая равенство $\tau_2(0) = \psi(0)$, находим

$$\tau_2(y) = \int\limits_0^y \hat{\tau}(t)\,dt + \psi(0).$$

Пусть $2a_1(y)+1\equiv 0$. Тогда при выполнении одного из условий: $2a_2(y)-1\neq 0$ или $a_3(y)\neq 0$, из (8) можно найти $\tau_2(y)$. Далее, определяя из соотношения (27) функцию $\nu_2^+(y)$, находим $\nu_2^-(y)$ из интегрального условия склеивания (10) при условии $\mu_1(y) \neq 0$. Следовательно, решение задачи NL можно будет восстановить и в областях Ω_1 и Ω_3 соответственно как решение первой краевой задачи [13, с. 108; 16] и задачи Коши [2]. Так как искомые функции являются решениями нелинейных интегральных и функциональных уравнений, для которых с помощью принципа сжимающих отображений найдены условия однозначной разрешимости, из полученного результата также следует единственность решения поставленной задачи. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J.* Theory and applications of fractional differential equations // North-Holland Mathematics Studies. V. 204. Amsterdam, 2006.
2. *Kadirkulov B.J.* Boundary problems for mixed parabolic-hyperbolic equations with two lines of changing type and fractional derivative // Electronic J. of Differ. Equat. 2014. V. 57. P. 1–7.
3. *Сабитов К.Б., Мелишева Е.П.* Задача Дирихле для нагруженного уравнения смешанного типа в прямоугольной области // Изв. вузов. Математика. 2013. № 7. С. 62–76.
4. *Сабитов К.Б.* Начально-граничная задача для параболо-гиперболического уравнения с нагруженными слагаемыми // Изв. вузов. Математика. 2015. № 6. С. 31–42.
5. *Abdullaev O.Kh., Sadarangani K.* Non-local problems with integral gluing condition for loaded mixed type equations involving the Caputo fractional derivative // Electron. J. of Differ. Equat. 2016. V. 164. P. 1–10.
6. *Исломов Б.И., Абдуллаев О.Х.* Задача типа Геллерштедта для нагруженного уравнения параболико-гиперболического типа с операторами Капуто и Эрдели–Кобера дробного порядка // Изв. вузов. Математика. 2020. № 106. С. 33–46.
7. *Ефимов А.В.* О краевых задачах с операторами Сайго для уравнения смешанного типа с дробной производной // Вестн. Самарского гос. техн. ун-та. 2004. Т. 26. С. 16–20.
8. *Елеев В.А., Лесев В.Н.* О двух краевых задачах для смешанных уравнений с перпендикулярными линиями изменения типа // Владикавказ. мат. журн. 2001. Т. 3. № 4. С. 9–22.
9. *Karimov E.T., Sotvoldiev A.I.* Existence of solutions to non-local problems for parabolic-hyperbolic equations with three lines of type changing // Electron. J. of Differ. Equat. 2013. V. 138. P. 1–5.
10. *Исломов Б., Холбеков Ж.* Аналог задачи Трикоми для нагруженного параболо-гиперболического уравнения с тремя линиями изменения типа-I // Узбекский мат. журн. 2015. № 4. С. 47–57.
11. *Yuldashev T.K., Abdullaev O.Kh.* Unique solvability of a boundary value problem for a loaded fractional parabolic-hyperbolic equation with nonlinear terms // Lobachevskii J. of Math. 2021. V. 42. № 5. P. 1113–1123.
12. *Abdullaev O.Kh.* Solvability of BVPs for the parabolic-hyperbolic equation with non-linear loaded term // J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys. 2021. V. 14. № 2. P. 133–145.
13. *Псху А.В.* Уравнения в частных производственных дробного порядка. М., 2005.
14. *Михлин С.Г.* Лекции по линейным интегральным уравнениям. М., 1959.
15. *Сопуев А., Дж. Т. Джураев* Краевые задачи для вырождающегося параболо-гиперболического уравнения // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25. № 6. С. 1009–1015.
16. *Mamchuev M.O.* Solutions of the main boundary value problems for the time-fractional telegraph equation by the Green function method // Fract. Calc. Appl. Anal. 2017. V. 20. № 1. P. 190–211.

Институт математики имени В.И. Романовского,
г. Ташкент, Узбекистан
Ташкентский международный университет Кимё,
Узбекистан

Поступила в редакцию 10.08.2021 г.
После доработки 11.12.2022 г.
Принята к публикации 14.02.2023 г.