ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 3, с. 358–367

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.95

НЕЛОКАЛЬНАЯ ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ПО ВРЕМЕНИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ БАЛКИ С ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ

© 2023 г. У. Д. Дурдиев

Исследована прямая задача для поперечных колебаний однородной балки конечной длины с нелокальными по времени условиями, получены необходимое и достаточное условия существования её решения. Для прямой задачи изучена обратная задача по определению коэффициентов, зависящих от времен, при младшей производной и правой части уравнения. Доказаны существование и единственность решения обратной задачи. Для решения используется метод разделения переменных, с помощью которого задачи сводятся к интегральному уравнению и к системе интегральных уравнений.

DOI: 10.31857/S0374064123030068, EDN: QUWSCE

Введение. Большинство задач о колебаниях балок находят широкое применение в строительной механике, в теории устойчивости ходовых валов, а их решения приводят к дифференциальным уравнениям высших порядков [1, с. 143–147]. В статье [2] приведён подробный анализ зарубежных публикаций и результатов в области динамического поведения неоднородных балок. В работах [3–6] исследуется разрешимость начально-краевых задач для уравнения колебания балки с различными краевыми условиями. Аналитическому решению дифференциального уравнения поперечных колебаний кусочно-однородной балки в частотной области для любого вида краевых условий посвящена статья [7].

Задачи определения коэффициентов или правой части дифференциального уравнения по некоторым известным данным от его решения получили название *обратных задач* математической физики. Обратные задачи по определению ядер в интегро-дифференциальных уравнениях из теории вязкоупругости исследованы в [8–10]. В работах [11–13] применён метод решения обратных задач, основанный на представлении решения двумерных обратных задач в виде тригонометрического полинома по одной из пространственных переменных. В статье [14] рассматривается обратная задача по определению зависящего от времени коэффициента в уравнении поперечных колебаний балки, который с физической точки зрения представляет собой её жёсткость. С численными методами решений обратных задач можно ознакомиться в работах [15–20]. В работе [21] рассмотрена обратная задача, связанная с восстановлением второго момента площади поперечного сечения для балки с использованием схемы сдвигающейся равномерно распределённой нагрузки. Эффективность вариационного метода для решения обратной задачи нахождения коэффициентов в уравнении Эйлера–Бернулли продемонстрирована в статье [22].

В данной работе изучены прямая задача с нелокальными по времени условиями и обратная задача с интегральными условиями переопределения для уравнения поперечных колебаний однородной балки.

1. Постановка задачи. Рассмотрим следующее уравнение поперечных колебаний балки длины l, опирающейся на концы:

$$w_{tt} + a^2 w_{xxxx} + q(t)w = f(x,t), \quad (x,t) \in \Sigma, \tag{1}$$

где $a^2 = EJ/(\rho S)$, $f(x,t)$ – внешняя сила, ρ – плотность балки, S – площадь её поперечного сечения, E – модуль упругости материала, J – момент инерции поперечного сечения балки относительно горизонтальной оси, $\Sigma = \{(x,t) : 0 < x < l, \ \ 0 < t \leqslant T\}$ – прямоугольная область, T – временнóй интервал. По всей длине балка поддерживается упругим основанием с коэффициентом жёсткости $q(t)$.

Прямая задача. Найти в области Σ решение уравнения (1), удовлетворяющее следующим начальным и краевым условиям:

$$w(x,0)+\delta_1 w(x,T)=\varphi(x), \quad w_t(x,0)+\delta_2 w_t(x,T)=\psi(x), \quad x\in[0,l], \tag{2}$$

$$\varphi(0)=\psi(0)=0, \quad \varphi(l)=\psi(l)=0,$$

$$w(0,t)=w_{xx}(0,t)=w(l,t)=w_{xx}(l,t)=0, \quad 0\leqslant t\leqslant T. \tag{3}$$

Определение. Решением задачи (1)–(3) назовём функцию $w(x,t)$ из класса $C^{4,2}_{x,t}(\Sigma)$, удовлетворяющую условиям (2), (3) и обращающую уравнение (1) в тождество, при положительных числах δ_1, δ_2 и достаточно гладких функциях $q(t)$, $f(x,t)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$.

Обратная задача. Пусть $f(x,t)=g(t)f_0(x)$. Найти функции $q(t)$ и $g(t)$, $t\in[0,T]$, по известным равенствам

$$\int\limits_0^l y_i(x)w(x,t)\,dx=Y_i(t), \quad i=1,2, \tag{4}$$

где $y_i(x)$, $Y_i(t)$, – заданные достаточно гладкие функции, удовлетворяющие условиям согласования

$$\int\limits_0^l y_i(x)\varphi(x)\,dx=Y_i(0)+\delta_1 Y_i(T), \quad \int\limits_0^l y_i(x)\psi(x)\,dx=Y_i'(0)+\delta_2 Y_i'(T), \quad Y(t)\neq 0. \tag{5}$$

2. Исследование прямой задачи. С помощью обозначения $F(x,t):=f(x,t)-q(t)w(x,t)$ уравнение (1) примет вид $w_{tt}+a^2w_{xxxx}=F(x,t)$.

Решение задачи (1)–(3) ищется как

$$w(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty} w_k(t)X_k(x), \tag{6}$$

где $w_k(t)=\sqrt{(2/l)}\int_0^l w(x,t)\sin(\mu_k x)\,dx$, $X_k(x)=\sqrt{(2/l)}\sin(\mu_k x)$, $\mu_k=\pi k/l$, $k\in\mathbb{N}$.

Подставив функцию (6) в уравнение (1) и условия (2), после разделения переменных получим задачу

$$w_k''(t)+\lambda_k^2 w_k(t)=F_k(t;q,w), \quad \lambda_k=a\mu_k^2, \quad k\in\mathbb{N}, \quad 0<t\leqslant T, \tag{7}$$

$$w_k(0)+\delta_1 w_k(T)=\varphi_k, \quad w_k'(0)+\delta_2 w_k'(T)=\psi_k, \quad k\in\mathbb{N}, \tag{8}$$

где

$$F_k(t;q,w)=f_k(t)-q(t)w_k(t), \tag{9}$$

$$f_k(t)=\sqrt{\frac{2}{l}}\int\limits_0^l f(x,t)\sin(\mu_k x)\,dx, \tag{10}$$

$$\varphi_k=\sqrt{\frac{2}{l}}\int\limits_0^l \varphi(x)\sin(\mu_k x)\,dx, \quad \psi_k=\sqrt{\frac{2}{l}}\int\limits_0^l \psi(x)\sin(\mu_k x)\,dx, \quad k\in\mathbb{N}. \tag{11}$$

Решение задачи (7), (8) запишем в следующем виде [23]:

$$w_k(t)=\frac{1}{\rho_k(T)}E_k(t)+\int\limits_0^T G_k(t,s)F_k(s;q,w)\,ds, \tag{12}$$

где

$$\rho_k(T) = 1 + (\delta_1 + \delta_2)\cos(\lambda_k T) + \delta_1\delta_2,$$

$$E_k(t) = \varphi_k(\cos\lambda_k t + \delta_2\cos(\lambda_k(T-t))) + \frac{\psi_k}{\lambda_k}(\sin(\lambda_k t) - \delta_1\sin(\lambda_k(T-t))),$$

$$G_k(t,s) = \begin{cases} -\dfrac{1}{\lambda_k\rho_k(T)}[\delta_1\sin(\lambda_k(T-t))\cos(\lambda_k s) + \delta_2\cos(\lambda_k(T-t))\sin(\lambda_k s) + \\ + \delta_1\delta_2\sin(\lambda_k(s-t))], & s\in[0,t], \\ -\dfrac{1}{\lambda_k\rho_k(T)}[\delta_1\sin(\lambda_k(T-t))\cos(\lambda_k s) + \delta_2\cos(\lambda_k(T-t))\sin(\lambda_k s) + \\ + \delta_1\delta_2\sin(\lambda_k(s-t))] + \dfrac{1}{\lambda_k}\sin(\lambda_k(s-t)), & s\in[t,T]. \end{cases}$$

Подставив выражение (12) в (6), получим

$$w(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{\rho_k(T)}E_k(t) + \int_0^T G_k(t,s)F_k(s;q,w)\,ds\right\}\sin(\mu_k x). \tag{13}$$

Нетрудно видеть, что при $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$ и условии $1+\delta_1\delta_2 > \delta_1+\delta_2$ справедливо неравенство

$$\frac{1}{\rho_k(T)} \leqslant \frac{1}{1-(\delta_1+\delta_2)+\delta_1\delta_2} \equiv \beta > 0. \tag{14}$$

Теорема 1 [24]. *Пусть $\alpha, \lambda, \mu > 0$ и $g(t)$ – непрерывно дифференцируемая неотрицательная функция на отрезке $[a,b]$, причём $a < b \leqslant +\infty$. Кроме того, предположим, что $\omega(t)$ интегрируема и неотрицательна на $[a,b]$ и такая, что выполняется неравенство*

$$\omega(t) \leqslant \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\zeta)^{\alpha-1}\omega(\zeta)\,d\zeta + \mu\int_a^b \omega(\zeta)\,d\zeta + g(t)$$

для каждых $t\in[a,b)$. Если $0 \leqslant \mu(b-a)E_{\alpha,2}(\lambda(b-a)^\alpha) < 1$, то

$$\omega(t) \leqslant E_\alpha(\lambda(t-a)^\alpha)\omega_0 + g(t) - E_\alpha(\lambda(t-a)^\alpha)g(a) + \lambda\int_a^t (t-\zeta)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t-\zeta)^\alpha)g(\zeta)\,d\zeta,$$

где

$$\omega_0 \leqslant \frac{1}{1-\mu(b-a)E_{\alpha,2}(\lambda(b-a)^\alpha)} \times$$

$$\times\left(\mu\int_a^b g(\zeta)\,d\zeta - \mu(b-a)E_{\alpha,2}(\lambda(b-a)^\alpha)g(a) + \mu\lambda\int_a^b (b-\zeta)^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(\lambda(b-\zeta)^\alpha)g(\zeta)\,d\zeta\right).$$

В теореме 1 используется двухпараметрическая функция Миттаг-Лёффлера

$$E_{\alpha,\gamma} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\gamma+\alpha k)}, \quad \alpha,\gamma > 0, \quad z\in\mathbb{R}, \tag{15}$$

в частности, при $\gamma = 1$ она становится однопараметрической функцией Миттаг-Лёффлера, т.е. $E_{\alpha,1}(z) = E_\alpha(z)$ [25, с. 40–49].

Подставив в (12) функцию $F_k(t;q,w)$ (9), имеем

$$w_k(t)=\frac{1}{\rho_k(T)}E_k(t)+\int\limits_0^T f_k(s)G_k(t,s)\,ds-\int\limits_0^T q(s)w_k(s)G_k(t,s)\,ds.$$

Оценим эту функцию с учётом вида функции $E_k(t)$ при $t\in[0,T]$:

$$|w_k(t)|\leqslant\beta(1+\delta_2)|\varphi_k|+\frac{\beta(1+\delta_1)}{\lambda_k}|\psi_k|+\frac{\beta\delta}{\lambda_k}\int\limits_0^T|f_k(s)|\,ds+\frac{\beta}{\lambda_k^2}\int\limits_t^T|f_k(s)|\,ds+$$

$$+\frac{\bar q\beta\delta}{\lambda_k}\int\limits_0^t|w_k(s)|\,ds+\frac{\bar q\beta}{\lambda_k}\left(\delta+\frac{1}{\lambda_k}\right)\int\limits_0^T|w_k(s)|\,ds,$$

где $\delta=\delta_1+\delta_2+\delta_1\delta_2$, $\bar q=\max\limits_{s\in[0,T]}|q(s)|$. Применив теорему 1 при $\alpha=1$ к последнему неравенству, ввиду (15) получим следующее утверждение.

Лемма 1. *Пусть* $0<C_{2k}(e^{C_{1k}T}-1)/C_{1k}<1$, *тогда справедлива оценка*

$$|w_k(t)|\leqslant\lambda_k\widetilde{C}g_k,\quad k\in\mathbb{N},\tag{16}$$

где

$$C_{1k}=\frac{\bar q\beta\delta}{\lambda_k},\quad C_{2k}=\frac{\bar q\beta}{\lambda_k}\left(\delta+\frac{1}{\lambda_k}\right),\quad \widetilde{C}=\frac{\delta}{\lambda_1\delta(2-e^{C_{1k}T})+e^{C_{1k}T}-1},\quad k\in\mathbb{N},$$

$$g_k=\beta(1+\delta_2)|\varphi_k|+\frac{\beta(1+\delta_1)}{\lambda_k}|\psi_k|+\frac{\beta}{\lambda_k}\left(\delta+\frac{1}{\lambda_1}\right)\int\limits_0^T|f_k(s)|\,ds,\quad k\in\mathbb{N}.\tag{17}$$

Далее, учитывая (17), из оценки (16) имеем

$$|w_k(t)|\leqslant\overline{C}_1(\lambda_k|\varphi_k|+|\psi_k|+\|f_k(t)\|),$$

где $\|f_k\|=\max\limits_{0\leqslant t\leqslant T}|f_k(t)|$. Используя равенство (7) и неравенство (12), получаем оценку

$$|w_k''(t)|\leqslant\overline{C}_2(\lambda_k^3|\varphi_k|+\lambda_k^2|\psi_k|+\lambda_k^2\|f_k(t)\|+\bar q|w_k|)\leqslant\overline{C}_2(\bar q+\lambda_k^2)(\lambda_k|\varphi_k|+|\psi_k|+\|f_k(t)\|).$$

Таким образом, доказана следующая

Лемма 2. *При любом* $t\in[0,T]$ *и для достаточно больших* k *справедливы оценки*

$$|w_k(t)|\leqslant\overline{C}_1(k^2|\varphi_k|+|\psi_k|+\|f_k(t)\|_C),\quad |w_k''(t)|\leqslant\overline{C}_2(k^6|\varphi_k|+k^4|\psi_k|+k^4\|f_k(t)\|_C),$$

здесь и далее $\overline{C}_i$ *– положительные постоянные.*

Формально из (6) составим ряды

$$w_{tt}=\sum_{k=1}^{\infty}w_k''(t)\sin(\mu_kx),\tag{18}$$

$$w_{xxxx}=\sum_{k=1}^{\infty}\mu_k^4w_k(t)\sin(\mu_kx).\tag{19}$$

Ряды (6), (18) и (19) при любых $(x,t)\in\overline{\Sigma}$ на основании леммы 1 мажорируются рядом

$$\overline{C}_3\sum_{k=1}^{\infty}(k^6|\varphi_k|+k^4|\psi_k|+k^4\|f_k(t)\|).$$

Имеет место следующая вспомогательная

Лемма 3. *Если выполнены условия*

$$\varphi(x)\in C^6[0,l],\quad \varphi^{VII}(x)\in L_2[0,l],$$

$$\varphi(0)=\varphi(l)=\varphi''(0)=\varphi''(l)=\varphi^{IV}(0)=\varphi^{IV}(l)=\varphi^{VI}(0)=\varphi^{VI}(l)=0,$$

$$\psi(x)\in C^4[0,l],\quad \psi^V(x)\in L_2[0,l],\quad \psi(0)=\psi(l)=\psi''(0)=\psi''(l)=\psi^{IV}(0)=\psi^{IV}(l)=0,$$

$$f(x,t)\in C(\overline{\Sigma})\bigcap C_x^4(\Sigma),\quad f^V_{xxxxx}(x,t)\in L_2(\Sigma),$$

$$f(0,t)=f(l,t)=f''_{xx}(0,t)=f''_{xx}(l,t)=f^{IV}_{xxxx}(0,t)=f^{IV}_{xxxx}(l,t)=0,$$

то имеют место равенства

$$\varphi_k=\frac{1}{\mu_k^7}\varphi_k^{VII},\quad \psi_k=\frac{1}{\mu_k^5}\psi_k^V,\quad f_k(t)=\frac{1}{\mu_k^5}f_k^V(t),\tag{20}$$

где

$$\varphi_k^{VII}=\sqrt{\frac{2}{l}}\int\limits_0^l\varphi^{VII}(x)\cos(\mu_kx)\,dx,\quad \psi_k^V=\sqrt{\frac{2}{l}}\int\limits_0^l\psi^V(x)\cos(\mu_kx)\,dx,$$

$$f_k^V(t)=\sqrt{\frac{2}{l}}\int\limits_0^l f^V_{xxxxx}(x,t)\cos(\mu_kx)\,dx,$$

и справедливы оценки

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\varphi_k^{VII}|^2\leqslant\|\varphi^{VII}\|_{L_2[0,l]},\quad \sum_{n=1}^{\infty}|\psi_k^V|^2\leqslant\|\psi^V\|_{L_2[0,l]},\quad \sum_{n=1}^{\infty}|f_k^V(t)|^2\leqslant\|f^V(t)\|_{L_2[0,l]\times C[0,T]}.\tag{21}$$

Применив в интеграле для φ_k метод интегрирования по частям семь раз, а в интегралах для ψ_k и $f_k(t)$ – пять раз (см. (10) и (11)), с учётом условий леммы 3 получим равенства (20). Неравенства (21) представляют собой неравенства Бесселя для коэффициентов разложений Фурье функций φ_k^{VII} и ψ_k^V по системе косинусов $\{\sqrt{(2/l)}\cos(\mu_kx)\}$ на интервале $(0,l)$. Если функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и $f(x,t)$ удовлетворяют условиям леммы 2, то в силу представлений (20) и (21) ряды (6), (18) и (19) сходятся равномерно в прямоугольнике $\overline{\Sigma}$, следовательно, функция (13) является решением задачи (1)–(3).

3. Исследования обратной задачи. Пусть $f(x,t)=f_0(x)g(t)$, где $f_0(x)$ – известная функция. Тогда $F_k(t;g,q,w)=f_{0k}g(t)-q(t)w_k(t)$. Умножив обе части уравнения (1) на $y_i(x)$, $i=1,2$, и проинтегрировав от 0 до l по переменной x, с учётом условий (4) получим уравнения

$$g(t)\int\limits_0^l f_0(x)y_1(x)\,dx-q(t)Y_1(t)=Y_1''(t)+a^2\sqrt{\frac{l}{2}}\sum_{k=1}^{\infty}\mu_k^4w_k(t)y_{1k},\tag{22}$$

$$g(t)\int\limits_0^l f_0(x)y_2(x)\,dx-q(t)Y_2(t)=Y_2''(t)+a^2\sqrt{\frac{l}{2}}\sum_{k=1}^{\infty}\mu_k^4w_k(t)y_{2k},\tag{23}$$

где $y_{ik}=\sqrt{(2/l)}\int_0^l y_i(x)\sin(\mu_kx)\,dx$, $k=1,2$.

Введём обозначения

$$\int_0^l f_0(x)y_1(x)\,dx = \alpha_1, \quad \int_0^l f_0(x)y_2(x)\,dx = \alpha_2$$

и предположим, что

$$\mathcal{Y}(t) = \alpha_2 Y_1(t) - \alpha_1 Y_2(t) \neq 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{24}$$

Тогда из (22) и (23) находим

$$g(t) = [\mathcal{Y}(t)]^{-1}\Big\{Y_1(t)Y_2''(t) - Y_2(t)Y_1''(t) + a^2\sqrt{\frac{l}{2}}\sum_{k=1}^{\infty}\mu_k^4 w_k(t)(Y_1(t)y_{2k} - Y_2(t)y_{1k})\Big\}, \tag{25}$$

$$q(t) = [\mathcal{Y}(t)]^{-1}\Big\{\alpha_1 Y_2''(t) - \alpha_2 Y_1''(t) + a^2\sqrt{\frac{l}{2}}\sum_{k=1}^{\infty}\mu_k^4 w_k(t)(\alpha_1 y_{2k} - \alpha_2 y_{1k})\Big\}. \tag{26}$$

После подстановки функции (12) в (25) и (26) получим следующие интегральные уравнения относительно функций $g(t)$ и $q(t)$:

$$g(t) = [\mathcal{Y}(t)]^{-1}\Big\{Y_1(t)Y_2''(t) - Y_2(t)Y_1''(t) +$$

$$+ a^2\sqrt{\frac{l}{2}}\sum_{k=1}^{\infty}\mu_k^4\Big\{\frac{1}{\rho_k(T)}E_k(t) + \int_0^T G_k(t,s)F_k(s;g,q,w)\,ds\Big\}(Y_1(t)y_{2k} - Y_2(t)y_{1k})\Big\}, \tag{27}$$

$$q(t) = [\mathcal{Y}(t)]^{-1}\Big\{\alpha_1 Y_2''(t) - \alpha_2 Y_1''(t) +$$

$$+ a^2\sqrt{\frac{l}{2}}\sum_{k=1}^{\infty}\mu_k^4\Big\{\frac{1}{\rho_k(T)}E_k(t) + \int_0^T G_k(t,s)F_k(s;g,q,w)\,ds\Big\}(\alpha_1 y_{2k} - \alpha_2 y_{1k})\Big\}. \tag{28}$$

Рассмотрим функциональное пространство $B_{2,T}^7$ [23] – множество всех функций вида (6), рассматриваемых в $\overline{\Sigma}$ с нормой $\|w(x,t)\|_{B_{2,T}^7} = J_T(u)$, где $w_k(t) \in C[0,T]$ и

$$J_T(w) \equiv \Big\{\sum_{k=1}^{\infty}(\mu_k^7\|w_k(t)\|_{C[0,T]})^2\Big\}^{1/2} < +\infty.$$

В дальнейшем будем обозначать через $E_{2,T}^7$ топологическое произведение $B_{2,T}^7 \times C[0,T] \times \times C[0,T]$, где норма элемента $z = \{w, g, q\}$ определяется по формуле

$$\|z\|_{E_{2,T}^7} = \|w(x,t)\|_{B_{2,T}^7} + \|g(t)\|_{C[0,T]} + \|q(t)\|_{C[0,T]}.$$

Известно, что пространства $B_{2,T}^7$ и $E_{2,T}^7$ являются банаховыми пространствами [26].

Теперь рассмотрим в пространстве $E_{2,T}^7$ оператор

$$\Lambda(w,g,q) = \{\Lambda_1(w,g,q), \Lambda_2(w,g,q), \Lambda_3(w,g,q)\},$$

где

$$\Lambda_1(w,g,q) = \tilde{w}(x,t) \equiv \sum_{k=1}^{\infty}\tilde{w}_k(t)\sin(\mu_k x), \quad \Lambda_2(w,g,q) = \tilde{g}(t), \quad \Lambda_3(w,g,q) = \tilde{q}(t),$$

а функции $\tilde{w}_k(t)$, $k \in \mathbb{N}$, $\tilde{g}(t)$ и $\tilde{q}(t)$ равны правым частям (12), (27) и (28) соответственно.

Учитывая неравенство (14), имеем

$$\bigg\{\sum_{k=1}^{\infty}(\mu_k^7\|\tilde w_k(t)\|_{C[0,T]})^2\bigg\}^{1/2}\leqslant\sqrt{\frac{2}{l}}\beta(1+\delta_2)\bigg(\sum_{k=1}^{\infty}(\mu_k^7|\varphi_k|)^2\bigg)^{1/2}+\sqrt{\frac{2}{l}}\beta(1+\delta_2)\bigg(\sum_{k=1}^{\infty}(\mu_k^5|\psi_k|)^2\bigg)^{1/2}+$$

$$+\sqrt{\frac{2}{l}}\kappa T\|g(t)\|_{C[0,T]}\bigg(\sum_{k=1}^{\infty}(\mu_k^5|f_k|)^2\bigg)^{1/2}+\sqrt{\frac{2}{l}}\kappa T\|q(t)\|_{C[0,T]}\bigg(\sum_{k=1}^{\infty}(\mu_k^7\|w_k(t)\|_{C[0,T]})^2\bigg)^{1/2},\qquad(29)$$

где $\kappa=1+2\beta\delta$,

$$\|\tilde g(t)\|_{C[0,T]}\leqslant\|[\mathcal{Y}(t)]^{-1}\|_{C[0,T]}\bigg\{\|Y_1(t)Y_2''(t)-Y_2(t)Y_1''(t)\|_{C[0,T]}+a^2\sqrt{\frac{l}{2}}\bigg[\|Y_1(t)\|_{C[0,T]}\bigg(\sum_{k=1}^{\infty}\mu_k^{-6}y_{2k}^2\bigg)^{1/2}+$$

$$+\|Y_2(t)\|_{C[0,T]}\bigg(\sum_{k=1}^{\infty}\mu_k^{-6}y_{1k}^2\bigg)^{1/2}\bigg]\bigg[\beta(1+\delta_2)\bigg(\sum_{k=1}^{\infty}(\mu_k^7|\varphi_k|)^2\bigg)^{1/2}+\beta(1+\delta_1)\bigg(\sum_{k=1}^{\infty}(\mu_k^5|\psi_k|)^2\bigg)^{1/2}+$$

$$+\kappa T\|g(t)\|_{C[0,T]}\bigg(\sum_{k=1}^{\infty}(\mu_k^5|f_k|)^2\bigg)^{1/2}+\kappa T\|q(t)\|_{C[0,T]}\bigg(\sum_{k=1}^{\infty}(\mu_k^7\|w_k(t)\|_{C[0,T]})^2\bigg)^{1/2}\bigg]\bigg\},\qquad(30)$$

$$\|\tilde q(t)\|_{C[0,T]}\leqslant\|[\mathcal{Y}(t)]^{-1}\|_{C[0,T]}\bigg\{\|\alpha_1Y_2''(t)-\alpha_2Y_1''(t)\|_{C[0,T]}+a^2\sqrt{\frac{l}{2}}\bigg[\alpha_1\bigg(\sum_{k=1}^{\infty}\mu_k^{-6}y_{2k}^2\bigg)^{1/2}+$$

$$+\alpha_2\bigg(\sum_{k=1}^{\infty}\mu_k^{-6}y_{1k}^2\bigg)^{1/2}\bigg]\bigg[\beta(1+\delta_2)\bigg(\sum_{k=1}^{\infty}(\mu_k^7|\varphi_k|)^2\bigg)^{1/2}+\beta(1+\delta_1)\bigg(\sum_{k=1}^{\infty}(\mu_k^5|\psi_k|)^2\bigg)^{1/2}+$$

$$+\kappa T\|g(t)\|_{C[0,T]}\bigg(\sum_{k=1}^{\infty}(\mu_k^5|f_k|)^2\bigg)^{1/2}+\kappa T\|q(t)\|_{C[0,T]}\bigg(\sum_{k=1}^{\infty}(\mu_k^7\|w_k(t)\|_{C[0,T]})^2\bigg)^{1/2}\bigg]\bigg\}.\qquad(31)$$

Из (29)–(31) соответственно получим оценки

$$\bigg\{\sum_{k=1}^{\infty}(\mu_k^7\|\tilde w_k(t)\|_{C[0,T]})^2\bigg\}^{1/2}\leqslant\frac{2\beta}{l}(1+\delta_2)\|\varphi^{VII}(x)\|_{L_2[0,l]}+\frac{2\beta}{l}(1+\delta_1)\|\psi^{V}(x)\|_{L_2[0,l]}+$$

$$+\frac{2\beta}{l}\kappa T\|g(t)\|_{C[0,T]}\|f_0^V(x)\|_{L_2[0,l]}+\sqrt{\frac{2}{l}}\kappa T\|q(t)\|_{C[0,T]}\|w(x,t)\|_{B^7_{2,T}(x,t)},$$

$$\|\tilde g(t)\|_{C[0,T]}\leqslant\|[\mathcal{Y}(t)]^{-1}\|_{C[0,T]}\bigg\{\|Y_1(t)Y_2''(t)-Y_2(t)Y_1''(t)\|_{C[0,T]}+$$

$$+a^2\bigg[\|Y_1(t)\|_{C[0,T]}\bigg(\sum_{k=1}^{\infty}\mu_k^{-6}y_{2k}^2\bigg)^{1/2}+\|Y_2(t)\|_{C[0,T]}\bigg(\sum_{k=1}^{\infty}\mu_k^{-6}y_{1k}^2\bigg)^{1/2}\bigg]\bigg[\beta(1+\delta_2)\|\varphi^{VII}(x)\|_{L_2[0,l]}+$$

$$+\beta(1+\delta_1)\|\psi^{V}(x)\|_{L_2[0,l]}+\kappa T\|g(t)\|_{C[0,T]}\|f_0^V(x)\|_{L_2[0,l]}+\sqrt{\frac{l}{2}}\kappa T\|q(t)\|_{C[0,T]}\|w(x,t)\|_{B^7_{2,T}(x,t)}\bigg]\bigg\},$$

$$\|\tilde q(t)\|_{C[0,T]}\leqslant\|[\mathcal{Y}(t)]^{-1}\|_{C[0,T]}\bigg\{\|\alpha_1Y_2''(t)-\alpha_2Y_1''(t)\|_{C[0,T]}+$$

$$+a^2\bigg[\alpha_1\bigg(\sum_{k=1}^{\infty}\mu_k^{-6}y_{2k}^2\bigg)^{1/2}+\alpha_2\bigg(\sum_{k=1}^{\infty}\mu_k^{-6}y_{1k}^2\bigg)^{1/2}\bigg]\bigg[\beta(1+\delta_2)\|\varphi^{VII}(x)\|_{L_2[0,l]}+$$

$$+\beta(1+\delta_1)\|\psi^V(x)\|_{L_2[0,l]}+\kappa T\|g(t)\|_{C[0,T]}\|f_0^V(x)\|_{L_2[0,l]}+\sqrt{\frac{l}{2}}\kappa T\|q(t)\|_{C[0,T]}\|w(x,t)\|_{B^7_{2,T}(x,t)}\Bigg]\Bigg\}$$

или

$$\left\{\sum_{k=1}^{\infty}(\mu_k^7\|\tilde w_k(t)\|_{C[0,T]})^2\right\}^{1/2}\leqslant L_1(T)+M_1(T)\|g(t)\|_{C[0,T]}+N_1(T)\|q(t)\|_{C[0,T]}\|w(x,t)\|_{B^7_{2,T}(x,t)}, \quad (32)$$

$$\|\tilde g(t)\|_{C[0,T]}\leqslant L_2(T)+M_2(T)\|g(t)\|_{C[0,T]}+N_2(T)\|q(t)\|_{C[0,T]}\|w(x,t)\|_{B^7_{2,T}(x,t)}, \quad (33)$$

$$\|\tilde q(t)\|_{C[0,T]}\leqslant L_3(T)+M_3(T)\|g(t)\|_{C[0,T]}+N_3(T)\|q(t)\|_{C[0,T]}\|w(x,t)\|_{B^7_{2,T}(x,t)}, \quad (34)$$

где

$$L_1(T)=\frac{2\beta}{l}(1+\delta_2)\|\varphi^{VII}(x)\|_{L_2[0,l]}+\frac{2\beta}{l}(1+\delta_1)\|\psi^V(x)\|_{L_2[0,l]},$$

$$M_1(T)=\frac{2\beta}{l}\kappa T\|f_0^V(x)\|_{L_2[0,l]},\quad N_1(T)=\sqrt{\frac{2}{l}}\kappa T,$$

$$L_2(T)=\|[\mathcal{Y}(t)]^{-1}\|_{C[0,T]}\Bigg\{\|Y_1(t)Y_2''(t)-Y_2(t)Y_1''(t)\|_{C[0,T]}+a^2\Bigg[\|Y_1(t)\|_{C[0,T]}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\mu_k^{-6}y_{2k}^2\right)^{1/2}+$$

$$+\|Y_2(t)\|_{C[0,T]}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\mu_k^{-6}y_{1k}^2\right)^{1/2}\Bigg]\Big[\beta(1+\delta_2)\|\varphi^{VII}(x)\|_{L_2[0,l]}+\beta(1+\delta_1)\|\psi^V(x)\|_{L_2[0,l]}\Big]\Bigg\},$$

$$M_2(T)=a^2\|[\mathcal{Y}(t)]^{-1}\|_{C[0,T]}\Bigg[\|Y_1(t)\|_{C[0,T]}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\mu_k^{-6}y_{2k}^2\right)^{1/2}+\|Y_2(t)\|_{C[0,T]}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\mu_k^{-6}y_{1k}^2\right)^{1/2}\Bigg]\times$$

$$\times\kappa T\|f_0^V(x)\|_{L_2[0,l]},$$

$$N_2(T)=a^2\sqrt{\frac{l}{2}}\|[\mathcal{Y}(t)]^{-1}\|_{C[0,T]}\Bigg[\|Y_1(t)\|_{C[0,T]}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\mu_k^{-6}y_{2k}^2\right)^{1/2}+\|Y_2(t)\|_{C[0,T]}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\mu_k^{-6}y_{1k}^2\right)^{1/2}\Bigg]\kappa T,$$

$$L_3(T)=\|[\mathcal{Y}(t)]^{-1}\|_{C[0,T]}\Bigg\{\|\alpha_1Y_2''(t)-\alpha_2Y_1''(t)\|_{C[0,T]}+$$

$$+a^2\Bigg[\alpha_1\left(\sum_{k=1}^{\infty}\mu_k^{-6}y_{2k}^2\right)^{1/2}+\alpha_2\left(\sum_{k=1}^{\infty}\mu_k^{-6}y_{1k}^2\right)^{1/2}\Bigg]\Big[\beta(1+\delta_2)\|\varphi^{VII}(x)\|_{L_2[0,l]}+\beta(1+\delta_1)\|\psi^V(x)\|_{L_2[0,l]}\Big]\Bigg\},$$

$$M_3(T)=a^2\|[\mathcal{Y}(t)]^{-1}\|_{C[0,T]}\Bigg[\alpha_1\left(\sum_{k=1}^{\infty}\mu_k^{-6}y_{2k}^2\right)^{1/2}+\alpha_2\left(\sum_{k=1}^{\infty}\mu_k^{-6}y_{1k}^2\right)^{1/2}\Bigg]\kappa T\|f_0^V(x)\|_{L_2[0,l]},$$

$$N_3(T)=a^2\sqrt{\frac{l}{2}}\|[\mathcal{Y}(t)]^{-1}\|_{C[0,T]}\Bigg[\alpha_1\left(\sum_{k=1}^{\infty}\mu_k^{-6}y_{2k}^2\right)^{1/2}+\alpha_2\left(\sum_{k=1}^{\infty}\mu_k^{-6}y_{1k}^2\right)^{1/2}\Bigg]\kappa T.$$

Из неравенств (32)–(34) следует оценка

$$\|\tilde w(x,t)\|_{B^7_{2,T}}+\|\tilde g(t)\|_{C[0,T]}+\|\tilde q(t)\|_{C[0,T]}\leqslant$$

$$\leqslant L(T)+M(T)\|g(t)\|_{C[0,T]}+N(T)\|q(t)\|_{C[0,T]}\|w(x,t)\|_{B^7_{2,T}(x,t)}, \quad (35)$$

где $L(T)=L_1(T)+L_2(T)+L_3(T)$, $M(T)=M_1(T)+M_2(T)+M_3(T)$, $N(T)=N_1(T)+N_2(T)+$ $+N_3(T)$.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1, леммы 2, (24) и следующее условие:*

$$(L(T)+2)(M(T)+N(T)(L(T)+2)) < 2. \tag{36}$$

Тогда задача (1)–(4) имеет единственное решение в шаре $B_R = \{z : \|z\|_{E^7_{2,T}} \leqslant R\}$.

Доказательство. Введём обозначение $z = (w(x,t), g(t), q(t))^*$ и запишем систему уравнений (13), (27), (28) в операторном виде

$$z = Az, \tag{37}$$

где $A = (A_1, A_2, A_3)^*$, $A_1(z)$, $A_2(z)$ и $A_3(z)$ определяются правыми частями (13), (27) и (28), соответственно.

Аналогично из (35) получаем, что для любых $z, z_1, z_2 \in B_R$ справедливы оценки

$$\|Az\|_{E^7_{2,T}} \leqslant L(T) + M(T)\|g(t)\|_{C[0,T]} + N(T)\|q(t)\|_{C[0,T]}\|w(x,t)\|_{B^7_{2,T}}, \tag{38}$$

$$\|Az_1 - Az_2\|_{E^7_{2,T}} \leqslant M(T)\|g_1(t) - g_2(t)\|_{C[0,T]} +$$
$$+ N(T)R(\|q_1(t) - q_2(t)\|_{C[0,T]} + \|w_1(x,t) - w_2(x,t)\|_{B^7_{2,T}}). \tag{39}$$

Тогда в силу (36) из (38) и (39) следует, что оператор A действует в шаре B_R и удовлетворяет принципу сжимающего отображения. Следовательно, по теореме Банаха оператор A имеет единственную неподвижную точку $\{w, g, q\}$ в шаре B_R, являющуюся решением операторного уравнения (37).

Таким образом, функция $w(x,t)$ как элемент пространства $B^7_{2,T}$ непрерывна и имеет непрерывные производные $w_{tt}(x,t)$ и $w_{xxxx}(x,t)$ в прямоугольнике $\overline{\Sigma}$.

Из (9) легко видеть, что выполняется неравенство

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\mu_k\|w''_k(t)\|_{C[0,T]})^2\right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{k=1}^{\infty}\mu_k^{-6}\right)^{1/2}\left[\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\mu_k^7\|w_k(t)\|_{C[0,T]})^2\right)^{1/2} + \|f'_0(x)g(t) + q(t)w_x(x,t)\|_{L_2[0,l]}\right],$$

откуда следует, что $w_{tt}(x,t)$ непрерывна в $\overline{\Sigma}$.

Замечание. Неравенство (36) выполняется при достаточно малых значениях T.

Теорема 3. *Пусть выполняются все условия теоремы 2 и условия (5), (24). Тогда задача (1)–(4) имеет единственное классическое решение в шаре* B_R *пространства* $E^7_{2,T}$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (соглашение № 075-02-2022-890).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М., 1966.
2. *Гусев Б.В., Саурин В.В.* О колебаниях неоднородных балок // Инж. вестн. Дона. 2017. http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2017/4312.
3. *Baysal O., Hasanov A.* Solvability of the clamped Euler–Bernoulli beam equation // Appl. Math. Lett. 2019. V. 93. P. 85–90.
4. *Сабитов К.Б.* Колебания балки с заделанными концами // Вестн. Самарского гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2015. Т. 19. № 2. С. 311–324.
5. *Сабитов К.Б., Акимов А.А.* Начально-граничная задача для нелинейного уравнения колебаний балки // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 5. С. 632–645.
6. *Касимов Ш.Г., Мадрахимов У.С.* Начально-граничная задача для уравнения колебаний балки в многомерном случае // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 10. С. 1379–1391.

7. *Karchevsky A.L.* Analytical solutions to the differential equation of transverse vibrations of a piecewise homogeneous beam in the frequency domain for the boundary conditions of various types // J. of Appl. and Industr. Math. 2020. T. 14. № 4. C. 648–665.
8. *Дурдиев Д.К., Тотиева Ж.Д.* Задача об определении одномерного ядра уравнения электровязкоупругости // Сиб. мат. журн. 2017. Т. 58. № 3. С. 553–572.
9. *Дурдиев Д.К., Рахмонов А.А.* Задача об определении двумерного ядра в системе интегродифференциальных уравнений вязкоупругой пористой среды // Сиб. журн. индустр. математики. 2020. Т. 23. № 2. С. 63–80.
10. *Durdiev U.D.* An inverse problem for the system of viscoelasticity equations in homogeneous anisotropic media // J. of Appl. and Industr. Math. 2019. V. 13. № 4. P.
11. *Romanov V.G.* A problem of recovering a special two dimension potential in a hyperbolic equation // Eur. J. Math. Comput. Appl. 2016. V. 4. № 1. P. 32–46.
12. *Durdiev U.D.* A problem of identification of a special 2D memory kernel in an integro-differential hyperbolic equation // Eur. J. Math. Comput. Appl. 2019. V. 7. № 2. P. 4–19.
13. *Durdiev U.D., Totieva Zh.D.* A problem of determining a special spatial part of 3D memory kernel in an integro-differential hyperbolic equation // Math. Methods Appl. Sci. 2019. V. 42. № 18. P. 1–12.
14. *Дурдиев У.Д.* Обратная задача по определению неизвестного коэффициента в уравнении колебания балки // Дифференц. уравнения. 2022. Т. 58. № 1. С. 37–44.
15. *Карчевский А.Л., Фатьянов А.Г.* Численное решение обратной задачи для системы упругости с последействием для вертикально неоднородной среды // Сиб. журн. вычислит. математики. 2001. Т. 4. № 3. С. 259–268.
16. *Карчевский А.Л.* Определение возможности горного удара в угольном пласте // Сиб. журн. индустр. математики. 2017. Т. 20. № 4. С. 35–43.
17. *Дурдиев У.Д.* Численное определение зависимости диэлектрической проницаемости слоистой среды от временно́й частоты // Сиб. электрон. мат. изв. 2020. Т. 17. С. 179–189.
18. *Maciag A., Pawinska A.* Solution of the direct and inverse problems for beam // Comp. Appl. Math. 2016. V. 35. P. 187–201.
19. *Maciag A., Pawinska A.* Solving direct and inverse problems of plate vibration by using the trefftz functions // J. of Theor. and Appl. Mech. 2013. V. 51. № 3. P. 543–552.
20. *Guojin Tan, Jinghui Shan, Chunli Wu, Wensheng Wang.* Direct and inverse problems on free vibration of cracked multiple I-section beam with different boundary conditions // Adv. in Mech. Engin. 2017. V. 9. № 11. P. 1–17.
21. *Moaveni S., Hyde R.* Reconstruction of the area-moment-of-inertia of a beam using a shifting load and the end-slope data // Inverse Problems in Science and Engineering. 2016. V. 24. № 6. P. 990–1010.
22. *Marinov T.T., Vatsala A.S.* Inverse problem for coefficient identification in the Euler–Bernoulli equation // Comput. and Math. with Appl. 2008. V. 56. P. 400–410.
23. *Megraliev Ya.T., Azizbayov E.I.* A time-nonlocal inverse problem for a hyperbolic equation with an integral overdetermination condition // Electron. J. of Qualitative Theory of Differen. Equat. 2021. № 28. P. 1–12.
24. *Xiao-Li Ding, Bashir Ahmad.* A generalized Volterra–Fredholm integral inequality and its applications to fractional differential equations // Adv. in Difference Equat. 2018. V. 2018. Art. 91.
25. *Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J.* Theory and Application of Fractional Differential Equations. Amsterdam, 2006.
26. *Tekin I., Mehraliyev Y.T., Ismailov M.I.* Existence and uniqueness of an inverse problem for nonlinear Klein–Gordon equation // Math. Methods Appl. Sci. 2019. V. 42. № 10. P. 3739–3753.

Бухарский государственный университет,
Узбекистан,
Бухарское отделение Института математики
имени В.И. Романовского, Узбекистан

Поступила в редакцию 15.10.2022 г.
После доработки 07.02.2023 г.
Принята к публикации 14.02.2023 г.