ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 3, с. 368–373

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.32+517.929

ГЛАДКИЕ РЕШЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ СО СДВИГОМ НА ПРОИЗВОЛЬНЫЙ ВЕКТОР В СВОБОДНОМ ЧЛЕНЕ

© 2023 г. Н. В. Зайцева, А. Б. Муравник

В полупространстве для гиперболических дифференциально-разностных уравнений с оператором сдвига общего вида в свободном члене (или в нелокальном операторном потенциале) построены трёхпараметрические семейства решений. Доказано, что полученные решения являются классическими, если вещественная часть символа соответствующих дифференциально-разностных операторов положительна. Приведены классы уравнений, для которых указанное условие выполнено.

DOI: 10.31857/S037406412303007X, EDN: QUXGJY

Введение. В современной теории дифференциальных уравнений одним из важнейших направлений является исследование задач для дифференциально-разностных уравнений, что объясняется их многочисленными приложениями. И если обыкновенным дифференциально-разностным уравнениям посвящено значительное число работ (см., например, [1–4] и библиографию в них), то дифференциально-разностные уравнения с частными производными изучены в гораздо меньшей степени.

В настоящее время наиболее полно и подробно исследованы задачи для эллиптических дифференциально-разностных уравнений (см., например, [5–9]). В статьях [10–13] изучен вопрос классической разрешимости начальных и модельных задач для таких уравнений в неограниченных областях.

Краевые задачи для параболических уравнений со сдвигами рассматриваются в [14, 15] и в монографии [16]. Гиперболическим дифференциально-разностным уравнениям со сдвигами по времени посвящены работы [17–19], а со сдвигами по пространственным переменным – статьи [20–25].

В данной работе в полупространстве $\{(x,t) : x\in\mathbb{R}^n,\ \ t>0\}$ исследуется вопрос существования (и построения в явном виде) гладких решений гиперболического дифференциально-разностного уравнения

$$u_{tt}(x,t)-a^2\sum_{j=1}^{n}u_{x_jx_j}(x,t)+bu(x-h,t)=0, \tag{1}$$

где $a\neq 0$, $b>0$ – заданные вещественные числа; $h:=(h_1,\ldots,h_n)$ – заданный вектор с действительными координатами, длина которого не равна нулю.

Определение. Функция $u(x,t)$ называется *классическим решением* уравнения (1), если в каждой точке полупространства $\{(x,t) : x\in\mathbb{R}^n,\ \ t>0\}$ существуют классические производные u_{tt} и $u_{x_jx_j}$ $(j=\overline{1,n})$ и в каждой точке этого полупространства выполняется соотношение (1).

1. Построение решений уравнения. Применим формально к уравнению (1) преобразование Фурье по n-мерной переменной x:

$$\widehat{f}(\xi):=F_x[f]=\int\limits_{\mathbb{R}}^{n} f(x)e^{i\xi\cdot x}dx,$$

где $\xi\cdot x$ – скалярное произведение, и перейдём к двойственной переменной $\xi\in\mathbb{R}^n$.

Согласно операционной схеме (см. работы [12, 13, 24]) и с учётом формул [26, с. 163, 164]

$$F_x[f(x-x_0)] = e^{ix_0\cdot\xi}F_x[f],\ F_x[D_x^\alpha D_t^\beta f] = (-i\xi)^\alpha D_t^\beta F_x[f]$$

получим для функции $\widehat{u}(\xi,t) := F_x[u](\xi,t)$ начальную задачу

$$\frac{d^2\widehat{u}}{dt^2} + (a^2|\xi|^2 + b\cos(h\cdot\xi) + ib\sin(h\cdot\xi))\widehat{u} = 0, \quad \xi\in\mathbb{R}^n,$$

$$\widehat{u}(\xi,0) = 0, \quad \widehat{u}_t(\xi,0) = 1, \quad \xi\in\mathbb{R}^n,$$

решение которой определяется по формуле

$$\widehat{u}(\xi,t) = \frac{1}{2i\rho(\xi)}[e^{-tG_1(\xi)}e^{i(tG_2(\xi)-\varphi(\xi))} - e^{tG_1(\xi)}e^{-i(tG_2(\xi)+\varphi(\xi))}]. \tag{2}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$G_1(\xi) := \rho(\xi)\sin\varphi(\xi), \quad G_2(\xi) := \rho(\xi)\cos\varphi(\xi), \tag{3}$$

$$\rho(\xi) := [(a^2|\xi|^2 + b\cos(h\cdot\xi))^2 + b^2\sin^2(h\cdot\xi)]^{1/4}, \tag{4}$$

$$\varphi(\xi) := \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{b\sin(h\cdot\xi)}{a^2|\xi|^2 + b\cos(h\cdot\xi)}. \tag{5}$$

Подробные вычисления, аналогичные данным, приведены в статье [22].

Применим теперь к равенству (2) формально обратное преобразование Фурье F_ξ^{-1} и получим соотношения

$$u(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{\mathbb{R}}^{n}\frac{1}{2i\rho(\xi)}[e^{-tG_1(\xi)}e^{i(tG_2(\xi)-\varphi(\xi))} - e^{tG_1(\xi)}e^{-i(tG_2(\xi)+\varphi(\xi))}]e^{-ix\cdot\xi}\,d\xi =$$

$$= \frac{1}{2i(2\pi)^n}\int\limits_{\mathbb{R}}^{n}\frac{1}{\rho(\xi)}[e^{-tG_1(\xi)}e^{i(tG_2(\xi)-\varphi(\xi)-x\cdot\xi)} - e^{tG_1(\xi)}e^{-i(tG_2(\xi)+\varphi(\xi)+x\cdot\xi)}]\,d\xi =$$

$$= \frac{1}{2i(2\pi)^n}\int\limits_{\mathbb{R}}^{n}\frac{1}{\rho(\xi)}[e^{-tG_1(\xi)}\cos(tG_2(\xi)-\varphi(\xi)-x\cdot\xi) + ie^{-tG_1(\xi)}\sin(tG_2(\xi)-\varphi(\xi)-x\cdot\xi) -$$

$$- e^{tG_1(\xi)}\cos(tG_2(\xi)+\varphi(\xi)+x\cdot\xi) + ie^{tG_1(\xi)}\sin(tG_2(\xi)+\varphi(\xi)+x\cdot\xi)]\,d\xi.$$

Используем полученное интегральное представление ниже, выбрав по аналогии с работой [20] в качестве частных линейно независимых решений уравнения (1) функции, содержащие синус.

2. Существование классических решений уравнения. Доказана следующая

Теорема. *При выполнении условия*

$$a^2|\xi|^2 + b\cos(h\cdot\xi) > 0 \tag{6}$$

для всех $\xi\in\mathbb{R}^n$ *функции*

$$F(x,t;\xi) := e^{tG_1(\xi)}\sin(tG_2(\xi)+\varphi(\xi)+x\cdot\xi), \tag{7}$$

$$H(x,t;\xi) := e^{-tG_1(\xi)}\sin(tG_2(\xi)-\varphi(\xi)-x\cdot\xi), \tag{8}$$

где $\varphi(\xi)$ определяется по формуле (5), $G_1(\xi)$ и $G_2(\xi)$ определяются равенствами (3), удовлетворяют уравнению (1) в классическом смысле.

Доказательство. Проверим сначала, что функция (7) удовлетворяет уравнению (1). Для этого вычислим производные

$$F_{x_j}(x,t;\xi) = \xi_j e^{tG_1(\xi)} \cos\left(tG_2(\xi) + \varphi(\xi) + x\cdot\xi\right),$$

$$F_{x_jx_j}(x,t;\xi) = -\xi_j^2 e^{tG_1(\xi)} \sin\left(tG_2(\xi) + \varphi(\xi) + x\cdot\xi\right),$$

$$F_t(x,t;\xi) = G_1(\xi)e^{tG_1(\xi)} \sin\left(tG_2(\xi) + \varphi(\xi) + x\cdot\xi\right) + G_2(\xi)e^{tG_1(\xi)} \cos\left(tG_2(\xi) + \varphi(\xi) + x\cdot\xi\right),$$

$$F_{tt}(x,t;\xi) = [G_1^2(\xi) - G_2^2(\xi)]e^{tG_1(\xi)} \sin\left(tG_2(\xi) + \varphi(\xi) + x\cdot\xi\right) +$$
$$+ 2G_1(\xi)G_2(\xi)e^{tG_1(\xi)} \cos\left(tG_2(\xi) + \varphi(\xi) + x\cdot\xi\right). \tag{9}$$

Найдём теперь значения выражений $2G_1(\xi)G_2(\xi)$ и $G_1^2(\xi) - G_2^2(\xi)$ в формуле (9).

Так как функции $G_1(\xi)$ и $G_2(\xi)$ определяются равенствами (3), то имеет место равенство

$$2G_1(\xi)G_2(\xi) = \rho^2(\xi)\sin(2\varphi(\xi)).$$

Из (5) следует, что $|2\varphi(\xi)| < \pi/2$ и, значит, $\cos(2\varphi(\xi)) > 0$. В работах [12, 13, 24] показано, что при выполнении неравенства $\cos(2\varphi(\xi)) > 0$ справедливы соотношения

$$\sin 2\varphi(\xi) = \frac{\operatorname{tg}(2\varphi(\xi))}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2(2\varphi(\xi))}} = \frac{b\sin(h\cdot\xi)}{a^2|\xi|^2 + b\cos(h\cdot\xi)}\frac{|a^2|\xi|^2 + b\cos(h\cdot\xi)|}{\rho^2(\xi)}.$$

С учётом выполнения условия (6) отсюда получим

$$\sin 2\varphi(\xi) = \frac{b\sin(h\cdot\xi)}{a^2|\xi|^2 + b\cos(h\cdot\xi)}\frac{a^2|\xi|^2 + b\cos(h\cdot\xi)}{\rho^2(\xi)} = \frac{b\sin(h\cdot\xi)}{\rho^2(\xi)},$$

а значит,

$$2G_1(\xi)G_2(\xi) = b\sin(h\cdot\xi). \tag{10}$$

Далее при установленном выше неравенстве $\cos(2\varphi(\xi)) > 0$ и выполнении условия (6) получим

$$G_1^2(\xi) - G_2^2(\xi) = -\rho^2(\xi)\cos(2\varphi(\xi)) = -\frac{\rho^2(\xi)}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2(2\varphi(\xi))}} = -a^2|\xi|^2 - b\cos(h\cdot\xi). \tag{11}$$

С учётом найденных выражений (10) и (11) функция (9) принимает вид

$$F_{tt}(x,t;\xi) = [-(a^2|\xi|^2 + b\cos(h\cdot\xi))\sin\left(tG_2(\xi) + \varphi(\xi) + x\cdot\xi\right) +$$
$$+ b\sin(h\cdot\xi)\cos\left(tG_2(\xi) + \varphi(\xi) + x\cdot\xi\right)]e^{tG_1(\xi)}.$$

Подставим производные F_{tt} и $F_{x_jx_j}$ в уравнение (1):

$$F_{tt}(x,t;\xi) - a^2\sum_{j=1}^n F_{x_jx_j}(x,t;\xi) = \Bigg[-(a^2|\xi|^2 + b\cos(h\cdot\xi))\sin\left(tG_2(\xi) + \varphi(\xi) + x\cdot\xi\right) +$$

$$+ b\sin(h\cdot\xi)\cos\left(tG_2(\xi) + \varphi(\xi) + x\cdot\xi\right) + a^2\sum_{j=1}^n \xi_j^2 \sin\left(tG_2(\xi) + \varphi(\xi) + x\cdot\xi\right)\Bigg]e^{tG_1(\xi)} =$$

$$= [-b\cos(h\cdot\xi)\sin\left(tG_2(\xi) + \varphi(\xi) + x\cdot\xi\right) + b\sin(h\cdot\xi)\cos\left(tG_2(\xi) + \varphi(\xi) + x\cdot\xi\right)]e^{tG_1(\xi)} =$$

$$= -b\sin(tG_2(\xi)+\varphi(\xi)+x\cdot\xi-h\cdot\xi)e^{tG_1(\xi)}=$$
$$= -b\sin(tG_2(\xi)+\varphi(\xi)+(x-h)\cdot\xi)e^{tG_1(\xi)} = -bF(x-h,t;\xi).$$

Проверим теперь, что функция (8) удовлетворяет уравнению (1) в классическом смысле. Для этого найдём производные:

$$H_{x_j}(x,t;\xi) = -\xi_j e^{-tG_1(\xi)}\cos(tG_2(\xi)-\varphi(\xi)-x\cdot\xi),$$
$$H_{x_jx_j}(x,t;\xi) = -\xi_j^2 e^{-tG_1(\xi)}\sin(tG_2(\xi)-\varphi(\xi)-x\cdot\xi),$$
$$H_t(x,t;\xi) = -G_1(\xi)e^{-tG_1(\xi)}\sin(tG_2(\xi)-\varphi(\xi)-x\cdot\xi)+G_2(\xi)e^{-tG_1(\xi)}\cos(tG_2(\xi)-\varphi(\xi)-x\cdot\xi),$$
$$H_{tt}(x,t;\xi) = [G_1^2(\xi)-G_2^2(\xi)]e^{-tG_1(\xi)}\sin(tG_2(\xi)-\varphi(\xi)-x\cdot\xi)-$$
$$-2G_1(\xi)G_2(\xi)e^{-tG_1(\xi)}\cos(tG_2(\xi)-\varphi(\xi)-x\cdot\xi). \qquad (12)$$

С учётом выражений (10) и (11) запишем функцию (12) в виде

$$H_{tt}(x,t;\xi) = [-(a^2|\xi|^2+b\cos(h\cdot\xi))\sin(tG_2(\xi)-\varphi(\xi)-x\cdot\xi)-$$
$$-b\sin(h\cdot\xi)\cos(tG_2(\xi)-\varphi(\xi)-x\cdot\xi)]e^{-tG_1(\xi)}.$$

Подставим производные H_{tt} и $H_{x_jx_j}$ в уравнение (1):

$$H_{tt}(x,t;\xi)-a^2\sum_{j=1}^n H_{x_jx_j}(x,t;\xi) = \Big[-(a^2|\xi|^2+b\cos(h\cdot\xi))\sin(tG_2(\xi)-\varphi(\xi)-x\cdot\xi)-$$
$$-b\sin(h\cdot\xi)\cos(tG_2(\xi)-\varphi(\xi)-x\cdot\xi)+a^2\sum_{j=1}^n\xi_j^2\sin(tG_2(\xi)-\varphi(\xi)-x\cdot\xi)\Big]e^{-tG_1(\xi)}=$$
$$= -b\sin(tG_2(\xi)-\varphi(\xi)-x\cdot\xi+h\cdot\xi)e^{-tG_1(\xi)}=$$
$$= -b\sin(tG_2(\xi)-\varphi(\xi)-(x-h)\cdot\xi)e^{-tG_1(\xi)} = -bH(x-h,t;\xi).$$

Отметим, что при выполнении условия (6) функции (4) и (5) (а значит, и функции (7), (8)) определены корректно для любого значения $\xi\in\mathbb{R}^n$, так как подкоренное выражение в формуле (4) всегда положительно, а знаменатель аргумента арктангенса в (5) не обращается в нуль. Таким образом, построенные решения (7), (8) уравнения (1) действительно являются гладкими и, более того, бесконечно гладкими. Теорема доказана.

Следствие. *При выполнении условия (6) семейство функций*

$$G(x,t;A,B,\xi) := C_1e^{tG_1(\xi)}\sin(tG_2(\xi)+\varphi(\xi)+x\cdot\xi)+C_2e^{-tG_1(\xi)}\sin(tG_2(\xi)-\varphi(\xi)-x\cdot\xi), \quad (13)$$

где $\varphi(\xi)$ определяется по формуле (5), $G_1(\xi)$ и $G_2(\xi)$ определяются равенствами (3), удовлетворяет уравнению (1) в классическом смысле при любых значениях параметров $C_{1,2}\in\mathbb{R}^1$ и $\xi\in\mathbb{R}^n$.

3. Классы уравнений, удовлетворяющих условию теоремы. Очевидно, что при $\xi_j = 0$, $j=\overline{1,n}$, и $b>0$ условие (6) теоремы и следствия выполняется.

При выполнении неравенства $|h\cdot\xi|<\pi/2$ условие теоремы также выполняется всегда, так как косинус такого аргумента положителен.

Рассмотрим случай $|h\cdot\xi|\geqslant\pi/2$. Имеем

$$|h\cdot\xi| = |h||\xi||\cos(\widehat{h,\xi})|\geqslant\frac{\pi}{2},$$

т.е.

$$|\xi|\geqslant\frac{\pi}{2|h||\cos(\widehat{h,\xi})|}\geqslant\frac{\pi}{2|h|}.$$

Таким образом, неравенство (6) будет выполнено, если коэффициенты и сдвиги уравнения подчиняются соотношению

$$\frac{\pi}{2|h|} > \sqrt{\frac{b}{a^2}}, \tag{14}$$

так как в этом случае $|\xi|^2 > b/a^2$ или $a^2|\xi|^2 > b \geqslant b|\cos(h \cdot \xi)|$ для любого значения аргумента косинуса.

Замечание. Условие (14) является достаточным, гарантирующим существование классических решений уравнения (1), определяемых по формуле (13).

Авторы признательны А.Л. Скубачевскому за постоянное внимание к работе.

Работа выполнена первым автором при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-284; вторым автором – при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (договор № 075-03-2020-223/3, ФССФ-2020-0018).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Pinney E.* Ordinary Difference-Differential Equations. Berkeley, 1958.
2. *Беллман Р., Кук К.Л.* Дифференциально-разностные уравнения. М., 1967.
3. *Мышкис А.Д.* Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. М., 1972.
4. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. М., 1984.
5. *Hartman P., Stampacchia G.* On some nonlinear elliptic differential functional equations // Acta Math. 1966. V. 115. P. 271–310.
6. *Skubachevskii A.L.* Elliptic Functional-Differential Equations and Applications. Basel; Boston; Berlin, 1997.
7. *Скубачевский А.Л.* Неклассические краевые задачи. I // Соврем. математика. Фунд. направления. 2007. Т. 26. С. 3–132.
8. *Скубачевский А.Л.* Неклассические краевые задачи. II // Соврем. математика. Фунд. направления. 2009. Т. 33. С. 3–179.
9. *Скубачевский А.Л.* Краевые задачи для эллиптических функционально-дифференциальных уравнений и их приложения // Успехи мат. наук. 2016. Т. 71. Вып. 5 (431). С. 3–112.
10. *Муравник А.Б.* Эллиптические дифференциально-разностные уравнения в полупространстве // Мат. заметки. 2020. Т. 108. № 5. С. 764–770.
11. *Муравник А.Б.* Эллиптические дифференциально-разностные уравнения с разнонаправленными сдвигами в полупространстве // Уфимский мат. журн. 2021. Т. 13. № 3. С. 107–115.
12. *Муравник А.Б.* Эллиптические дифференциально-разностные уравнения с нелокальными потенциалами в полупространстве // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2022. Т. 62. № 6. С. 987–993.
13. *Муравник А.Б.* Эллиптические уравнения со сдвигами общего вида в полупространстве // Мат. заметки. 2022. Т. 111. № 4. С. 571–580.
14. *Shamin R.V., Skubachevskii A.L.* The mixed boundary value problem for parabolic differential-difference equation // Funct. Differ. Equat. 2001. V. 8. P. 407–424.
15. *Йаакбариех А., Сакбаев В.Ж.* Корректность задачи для параболических дифференциально-разностных уравнений со сдвигами временного аргумента // Изв. вузов. Математика. 2015. № 4. С. 17–25.
16. *Муравник А.Б.* Функционально-дифференциальные параболические уравнения: интегральные представления и качественные свойства решений задачи Коши // Соврем. математика. Фунд. направления. 2014. Т. 52. С. 3–143.
17. *Зарубин А.Н.* Задача Коши для дифференциально-разностного нелокального волнового уравнения // Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41. № 10. С. 1406–1409.
18. *Власов В.В., Медведев Д.А.* Функционально-дифференциальные уравнения в пространствах Соболева и связанные с ними вопросы спектральной теории // Соврем. математика. Фунд. направления. 2008. Т. 30. С. 3–173.
19. *Акбари Фаллахи А., Йаакбариех А., Сакбаев В.Ж.* Корректность задачи с начальными условиями для гиперболических дифференциально-разностных уравнений со сдвигами временного аргумента // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52. № 3. С. 352–365.

20. *Зайцева Н.В.* Глобальные классические решения некоторых двумерных гиперболических дифференциально-разностных уравнений // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 6. С. 745–751.
21. *Zaitseva N.V.* Classical solutions of hyperbolic differential-difference equations with several nonlocal terms // Lobachevskii J. of Math. 2021. V. 42. № 1. P. 231–236.
22. *Зайцева Н.В.* Классические решения гиперболического уравнения с нелокальным потенциалом // Докл. РАН. Математика, информатика, процессы управления. 2021. Т. 498. № 3. С. 37–40.
23. *Зайцева Н.В.* Гиперболические дифференциально-разностные уравнения с нелокальными потенциалами общего вида // Уфимский мат. журн. 2021. Т. 13. № 3. С. 37–44.
24. *Зайцева Н.В.* Классические решения гиперболических дифференциально-разностных уравнений в полупространстве // Дифференц. уравнения. 2022. Т. 58. № 5. С. 628–637.
25. *Зайцева Н.В.* Классические решения одного многомерного гиперболического дифференциально-разностного уравнения с разнонаправленными сдвигами в потенциалах // Мат. заметки. 2022. Т. 112. № 6. С. 810–819.
26. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М., 1981.

Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова,
Российский университет дружбы народов,
г. Москва

Поступила в редакцию 17.12.2022 г.
После доработки 02.02.2023 г.
Принята к публикации 14.02.2023 г.