ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 3, с. 374–379

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.958

ОБРАТНЫЕ АТТРАКТОРЫ МОДЕЛИ БИНГАМА

© 2023 г. В. Г. Звягин, А. С. Устюжанинова

На основе теории траекторных обратных аттракторов исследуется качественное поведение слабых решений для модели Бингама с периодическими условиями по пространственным переменным. Для рассматриваемой модели вводится семейство траекторных пространств и доказывается существование обратных аттракторов.

DOI: 10.31857/S0374064123030081, EDN: QVGQQY

Введение. Теория траекторных аттракторов была создана М.И. Вишиком и В.В. Чепыжовым [1] и независимо от них Дж. Селлом [2]. В этой теории порождаемая уравнением динамика описывается в терминах траекторий – функций времени, представляющих собой сценарии развития системы. При этом не требуется, чтобы сценарии, разделяющие общее начальное значение, совпадали. Позже В.Г. Звягиным и Д.А. Воротниковым [3] было предложено обобщение этой теории, а именно удалось избавиться от требования инвариантности пространства траекторий, что позволило получить новые результаты о существовании аттракторов для различных моделей неньютоновской гидродинамики [3–6].

В работе [7] идеи траекторных аттракторов из монографии [3] были перенесены на теорию обратных аттракторов. Предложенный подход был применён для трёхмерной системы Навье–Стокса. В дальнейшем эта теория была применена для доказательства существования обратных аттракторов различных моделей гидродинамики [8, 9].

В данной статье доказывается существование обратных аттракторов модели Бингама.

1. Обратные аттракторы пространств траекторий. Приведём необходимые определения и факты из работы [7]. Пусть E и E_0 – банаховы пространства, $E \subset E_0$ и E рефлексивно. Рассмотрим класс функций $\mathcal{T} = C(\mathbb{R}_+; E_0) \bigcap L_{\infty,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; E)$. Отметим, что имеет место включение $\mathcal{T} \subset C_w(\mathbb{R}_+, E)$ (см. [10, лемма 8.1]). Поэтому для любой $u \in \mathcal{T}$ имеем, что для всех $t \geqslant 0$ функция $u(t) \in E$.

Каждому $\tau \in \mathbb{R}$ поставим в соответствие непустое множество $\mathcal{H}^+_\tau \subset \mathcal{T}$. Множества $\mathcal{H}^+_\tau$ называются *пространствами траекторий*, а их элементы – *траекториями*. Семейство $\mathbf{H}^+ = \{\mathcal{H}^+_\tau\}_{\tau\in\mathbb{R}}$ будем называть *семейством пространств траекторий*.

Зададим класс семейств множеств $\mathfrak{D}$ над E, причём будем считать, что для каждого семейства $\mathbf{D} = \{D_t\} \in \mathfrak{D}$ имеем $D_t \neq \varnothing$ при любом $t \in \mathbb{R}$. Для каждого $\mathbf{D} = \{D_\tau\} \in \mathfrak{D}$ рассмотрим семейство $\mathbf{H}^+(\mathbf{D}) = \{\mathcal{H}^+_\tau(\mathbf{D})\}$, где $\{\mathcal{H}^+_\tau(\mathbf{D})\} = \{v \in \mathcal{H}^+_\tau : v(0) \in D_\tau\}$.

Обозначим через $T(h)$ оператор сдвига $(T(h)g)(s) = g(s+h)$, где $h \geqslant 0$, $g \in \mathcal{T}$, а для семейства $\mathbf{P} = \{P_\tau\}$, $P_\tau \subset \mathcal{T}$, и для $h \in \mathbb{R}$ обозначим $(T(h)P)_\tau = T(h)P_{\tau-h}$, $\tau \in \mathbb{R}$.

Определение 1. Семейство $\mathbf{P} = \{P_\theta\}$, состоящее из непустых множеств $\mathcal{T}$, называется *траекторным обратным аттрактором* для $\mathbf{H}^+$, если:

(i) $\mathbf{P}$ является $\mathcal{T}$-компактным, т.е. P_θ компактно в $C(\mathbb{R}_+; E_0)$ при каждом $\theta \in \mathbb{R}$, и для каждого $\theta \in \mathbb{R}$ существует непрерывная функция $\tilde{\varphi}_\theta : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ такая, что для каждой траектории $v \in P_\theta$ при всех $t \in \mathbb{R}$ выполняется неравенство $\|v(t)\|_{L_\infty(t,t+1;E)} \leqslant \tilde{\varphi}_\theta(t)$;

(ii) $T(h)\mathbf{P} = \mathbf{P}$ для всех $h \geqslant 0$;

(iii) $\mathbf{P}$ является обратно притягивающим, т.е. для любого семейства $\mathbf{D} \in \mathfrak{D}$ и для любого $\theta \in \mathbb{R}$ при $\tau \to -\infty$ выполняется соотношение

$$\sup_{v\in\mathcal{H}^+_\tau(\mathbf{D})} \inf_{u\in P_\theta} \|T(\theta-\tau)v - u\|_{C(\mathbb{R}_+;E_0)} \to 0.$$

Траекторный обратный аттрактор $\mathbf{U} = \{\mathcal{U}_\theta\}$, $\mathcal{U}_\theta \subset \mathcal{T}$, для $\mathbf{H}^+$ называется *минимальным*, если он содержится в любом траекторном обратном аттракторе $\mathbf{P} = \{P_\theta\}$.

Определение 2. Семейство $\mathbf{A} = \{\mathcal{A}_\theta \subset E\}$ называется *минимальным обратным аттрактором* для $\mathbf{H}^+$, если:

(i) $\mathcal{A}_\theta$ компактно в E_0 и ограничено в E при всех $\theta \in \mathbb{R}$;

(ii) для всех $\mathbf{D} \in \mathfrak{D}$ и $\theta \in \mathbb{R}$ выполняется условие обратного притягивания, т.е. при $\tau \to -\infty$ выполняется соотношение

$$\sup_{v \in \mathcal{H}_\tau^+(\mathbf{D})} \inf_{a \in \mathcal{A}_\theta} \|v(\theta - \tau) - a\|_{E_0} \to 0;$$

(iii) $\mathbf{A}$ содержится в любом $\mathbf{A}' = \{\mathcal{A}'_\theta\}$, $\mathcal{A}'_\theta \subset E$, удовлетворяющем условиям (i) и (ii).

Определение 3. Семейство $\mathbf{P} = \{P_\theta\}$, $P_\theta \subset \mathcal{T}$, называется *обратно поглощающим* для $\mathbf{H}^+$, если для любого семейства $\mathbf{D} \in \mathfrak{D}$ и любого $\theta \in \mathbb{R}$ существует число $\tau_{\mathbf{D}}(\theta) \leqslant \theta$ такое, что для всех $\tau \leqslant \tau_{\mathbf{D}}(\theta)$ имеет место включение $T(\theta - \tau)\mathcal{H}_\tau^+(\mathbf{D}) \subset P_\theta$, и функция $\tau_{\mathbf{D}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ не убывает.

Приведём теоремы из [7], необходимые для доказательства основного результата.

Теорема 1. *Пусть для $\mathbf{H}^+$ существует $\mathcal{T}$ – относительно компактное обратно поглощающее семейство $\mathbf{P}$, и пусть $\overline{\mathbf{P}}$ – замыкание $\mathbf{P}$ в топологии $C(\mathbb{R}_+; E_0)$. Тогда существует минимальный траекторный обратный аттрактор $\mathbf{U} \subset \overline{\mathbf{P}}$.*

Теорема 2. *Пусть $\mathbf{U} = \{\mathcal{U}_\theta\}$ – минимальный траекторный обратный аттрактор для $\mathbf{H}^+$. Тогда семейство $\mathbf{A} = \{\mathcal{A}_\theta\}$, где $\mathcal{A}_\theta = \{u(0) : u \in \mathcal{U}_\theta\} \subset E$, является минимальным обратным аттрактором для $\mathbf{H}^+$.*

2. Модель Бингама движения жидкости. Движение несжимаемой среды с единичной плотностью описывается системой уравнений:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3} v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \operatorname{Div} \sigma + \nabla p = f, \quad \operatorname{div} v = 0, \quad (x,t) \in \Omega \times (\tau; +\infty). \tag{1}$$

Здесь $\Omega = \prod_{i=1}^{3}(0, l_i) \subset \mathbb{R}^3$, $v(x,t)$ – вектор скорости, $p(x,t)$ – давление в жидкости, $f(x,t)$ – плотность внешних сил. Через $\operatorname{Div} \sigma$ обозначатся вектор, координаты которого являются дивергенциями столбцов девиатора тензора напряжений σ.

Система уравнений, описывающая движение среды Бингама, получается добавлением к (1) реологического соотношения

$$\sigma = 2\mu\mathcal{E}(v) + \tau^*\mathcal{E}(v)/|\mathcal{E}(v)| \text{ для } |\mathcal{E}(v)| \neq 0, \quad |\sigma| \leqslant \tau^* \text{ для } |\mathcal{E}(v)| = 0, \quad (x,t) \in \Omega \times (\tau; +\infty), \tag{2}$$

где $\mu > 0$ – вязкость жидкости, $\tau^* > 0$ – константа, описывающая порог текучести жидкости, а $\mathcal{E}(v) = 1/2(\nabla v + (\nabla v)^{\mathrm{T}})$ – тензор скоростей деформаций.

Для системы (1), (2) рассмотрим периодическую по пространственным переменным задачу с начальным условием

$$v|_{t=\tau}(x) = a(x), \quad x \in \Omega. \tag{3}$$

Глобальное существование слабых решений задачи (1)–(3) было доказано В.В. Шелухиным [11]. Существование аттракторов модели Бингама в двумерном случае на основе теории динамических систем было доказано Г.А. Серегиным [12]. В статье [4] было установлено существование минимального траекторного и глобального аттракторов в двумерном и трёхмерном случаях. В работе [13] было доказано, что аттракторы аппроксимации сходятся к аттракторам модели Бингама в смысле полуотклонения в соответствующих метрических пространствах.

Вместе с задачей (1)–(3) рассмотрим вспомогательную задачу на полуоси $\mathbb{R}_+ = [0; +\infty)$:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3} v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \operatorname{Div} \sigma + \nabla p = F, \quad \operatorname{div} v = 0, \quad (x,t) \in \Omega \times (0; +\infty); \tag{4}$$

$$\sigma = 2\mu\mathcal{E}(v) + \tau^*\mathcal{E}(v)/|\mathcal{E}(v)| \text{ для } |\mathcal{E}(v)| \neq 0, \quad |\sigma| \leqslant \tau^* \text{ для } |\mathcal{E}(v)| = 0, \quad (x,t) \in \Omega \times (0; +\infty), \tag{5}$$

$$v|_{t=0}(x) = a(x), \quad x \in \Omega. \tag{6}$$

В системе (4) значение F заранее не уточняется. Если $F(x,t) = f(x,t+\tau)$, то задача (4)–(6) получается из задачи (1)–(3) линейной заменой переменного t, переводящей τ в 0.

Пусть $C^\infty_{\rm per}(\Omega)^3$ – пространство периодических функций со значениями в $\mathbb{R}^3$ и периодами l_i, $i = 1,2,3$. Через V^1, V^2, V^0 обозначим пополнение $\Phi = \{\phi \in C^\infty_{\rm per}(\Omega)^3 : \int_\Omega \phi\,dx = 0,\ \operatorname{div}\phi = 0\}$ по нормам $W^1_2(\Omega)^3$, $W^2_2(\Omega)^3$, $L_2(\Omega)^3$ соответственно. Подробное определение пространств, а также их свойства можно найти в [14, гл. 2]. Обозначим $Q_T = \Omega\times[0,T]$.

Введём пространство
$$W[0,T] = \{u : u \in L_2(0,T;V^1)\bigcap L_\infty(0,T;V^0),\quad u' \in L_2(0,T;V^{-2})\}.$$

Определение 4. Пусть $a \in V^0$, $F \in L_2(0,T;V^0)$. *Слабым решением* задачи (4)–(6) на отрезке $[0,T]$ назовём пару функций (v,σ), где $v \in W[0,T]$, $\sigma \in L_2(Q_T)^9$, таких, что для всех $\varphi \in V^2$ и для почти всех $t \in (0,T)$ выполнены тождество
$$\langle v',\varphi\rangle - \sum_{i,j=1}^3 \int\limits_\Omega v_i v_j \frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}\,dx + \int\limits_\Omega \sigma : \mathcal{E}(\varphi)\,dx = \int\limits_\Omega F\varphi\,dx,$$
реологическое соотношение (5) и начальное условие $v(0) = a$.

Определение 5. Пусть $F \in L_{2,\rm loc}(\mathbb{R}_+;V^0)$. *Слабым решением* задачи (4)–(6) на полуоси $\mathbb{R}_+$ будем называть функцию $v \in L_{2,\rm loc}(\mathbb{R}_+;V^1)\bigcap L_{\infty,\,\rm loc}(\mathbb{R}_+;V^0)$ с производной $v' \in L_{2,\rm loc}(\mathbb{R}_+;V^{-2})$, если для любого $T>0$ существует $\sigma \in L_2(Q_T)^9$ такое, что пара $(v|_{[0,T]},\sigma)$ является слабым решением задачи (4)–(6) на отрезке $[0,T]$.

3. Существование траекторий. Определим $\alpha = \mu/2K_0^2$, где K_0 – константа из неравенства Пуанкаре: $\|u\|_{V^0} \leqslant K_0\|u\|_{V^1}$, $\mu>0$ – вязкость жидкости из реологического соотношения (2).

Теорема 3. *Задача (4)–(6) имеет слабое решение на полуоси $\mathbb{R}_+$, удовлетворяющее при всех $t\geqslant 0$ неравенствам*
$$\|v\|_{L_\infty(t,t+1;V^0)} + \|v\|_{L_2(t,t+1;V^1)} \leqslant$$
$$\leqslant C_2\biggl(1 + e^{-2\alpha t}\biggl(\|a\|^2_{V^0} + C_1\int\limits_0^{t+1} e^{2\alpha s}\|F(s)\|^2_{V^0}\,ds\biggr) + C_1\|F\|^2_{L_2(t,t+1;V^0)}\biggr),$$
$$\|v'\|_{L_2(t,t+1;V^{-2})} \leqslant C_3\biggl(1 + e^{-2\alpha t}\biggl(\|a\|^2_{V^0} + C_1\int\limits_0^{t+1} e^{2\alpha s}\|F(s)\|^2_{V^0}\,ds\biggr) + \|F\|^2_{L_2(t,t+1;V^0)}\biggr)^2. \tag{7}$$

Для доказательства теоремы используется аппроксимационно-топологический подход к исследованию задач гидродинамики. Аналогичное доказательство может быть найдено в [13, 15].

Перейдём к исследованию обратных аттракторов. Будем предполагать, что в (1) функция $f \in L_{2,\rm loc}(\mathbb{R};V^0)$ и для всех $t\in\mathbb{R}$ удовлетворяет условию
$$\int\limits_{-\infty}^t e^{2\alpha\xi}\|f(\xi)\|^2_{V^0}\,d\xi < \infty.$$

В качестве банаховых пространств для класса $\mathcal{T}$ возьмём $E = V^0$ и $E_0 = V^{-1}$. Пусть $\tau\in\mathbb{R}$. В качестве пространства траекторий $\mathcal{H}^+_\tau$ задачи (1)–(3) рассматривается множество слабых решений v задачи (4)–(6) с $F = T(\tau)f$ (где $T(\tau)$ – оператор сдвига) и некоторым начальным условием (своим для каждого v), удовлетворяющих при всех $t\in\mathbb{R}_+$ оценке
$$\|v\|_{L_\infty(t,t+1;V^0)} + \|v\|_{L_2(t,t+1;V^1)} \leqslant$$
$$\leqslant C_2\biggl(1 + e^{-2\alpha t}\biggl(\|v(0)\|^2_{V^0} + C_1\int\limits_{-\infty}^{t+1} e^{2\alpha s}\|f(s+\tau)\|^2_{V^0}\,ds\biggr) + C_1\|f\|^2_{L_2(t+\tau,t+\tau+1;V^0)}\biggr). \tag{8}$$
Эти пространства траекторий образуют семейство пространств траекторий $\mathbf{H}^+ = \{\mathcal{H}^+_\tau\}$.

Теорема 4. *Для каждого* $a \in V^0$ *существует траектория* $v \in \mathcal{H}_\tau^+$, $\tau \in \mathbb{R}$, *удовлетворяющая начальному условию* $v(0) = a$.

Для доказательства достаточно в условиях теоремы 3 положить $F = T(\tau)f$.

Замечание. Для пространств траекторий $\mathcal{H}_\tau^+$ имеет место включение $\mathcal{H}_\tau^+ \subset \mathcal{T}$.

Доказательство. Из неравенства (8) в силу произвольности выбора $t \in \mathbb{R}_+$ получаем, что $v \in L_{2,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; V^1) \bigcap L_{\infty,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; V^0)$. Кроме того, по теореме 3 функция $v' \in L_2(t, t+1; V^{-2})$. В силу произвольности выбора $t \in \mathbb{R}_+$ получаем, что $v' \in L_{2,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; V^{-2})$. Так как V^0 компактно вложено в пространство V^{-1}, то по теореме Обена–Симона [16] функция $v \in C(\mathbb{R}_+; V^{-1})$ и $\mathcal{H}_\tau^+ \subset \mathcal{T}$. Замечание доказано.

Опишем класс притягивающих семейств множеств. Пусть $\mathcal{R}$ – множество функций $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ таких, что функция $\tau \longmapsto e^{2\alpha\tau} r^2(\tau)$ возрастает и $\lim\limits_{\tau\to-\infty} e^{2\alpha\tau} r^2(\tau) = 0$. Класс $\mathfrak{D}$ состоит из семейств $\mathbf{D} = \{D_\tau\}$ $(D_\tau \subset V^0)$, для которых существуют функции $r_{\mathbf{D}} \in \mathcal{R}$ такие, что $\|w\|_{V^0} \leqslant r_{\mathbf{D}}(\tau)$ для всех $\tau \in \mathbb{R}$ и $w \in D_\tau$.

Теорема 5. *Семейство пространств траекторий* $\mathbf{H}^+$ *имеет минимальный траекторный обратный аттрактор* $\mathbf{U}$ *и минимальный обратный аттрактор* $\mathbf{A} = \mathbf{U}(0)$.

Доказательство. Построим семейство $\mathbf{P} = \{P_\theta\}$, $P_\theta \subset \mathcal{T}$, $\theta \in \mathbb{R}$, которое $\mathcal{T}$-относительно компактно и обратно поглощающее. Утверждение теоремы будет следовать из теорем 1, 2. Пусть множество P_θ состоит из функций $v \in \mathcal{T}$, удовлетворяющих неравенствам $(t \in \mathbb{R}_+)$

$$\|v\|_{L_\infty(t,t+1;V^0)} + \|v\|_{L_2(t,t+1;V^1)} \leqslant$$

$$\leqslant C_2\biggl(1 + e^{-2\alpha t}\biggl(1 + C_1 \int\limits_{-\infty}^{t+1} e^{2\alpha s}\|f(s+\theta)\|_{V^0}^2\,ds\biggr) + C_1\|f\|^2_{L_2(t+\theta,t+\theta+1;V^0)}\biggr), \tag{9}$$

$$\|v'\|_{L_2(t,t+1;V^{-2})} \leqslant C_3\biggl(1 + e^{-2\alpha t}\biggl(1 + C_1 \int\limits_{-\infty}^{t+1} e^{2\alpha s}\|f(s+\theta)\|_{V^0}^2\,ds\biggr) + \|f\|^2_{L_2(t+\theta,t+\theta+1;V^0)}\biggr)^2. \tag{10}$$

Зафиксируем $\theta \in \mathbb{R}$. Из неравенств (9) и (10) следует, что для любого $t \geqslant 0$ множество P_θ ограничено в $L_\infty(t, t+1; V^0)$ и в $L_2(t, t+1; V^1)$, а множество $P'_\theta = \{v' : v \in P_\theta\}$ ограничено в $L_2(t, t+1; V^{-2})$. По теореме Обена–Симона [16] для тройки пространств $V^0 \subset V^{-1} \subset V^{-2}$ множество P_θ относительно компактно в $C([t, t+1], V^{-1})$. В силу произвольности выбора $t \in \mathbb{R}_+$ множество P_θ относительно компактно в $C(\mathbb{R}_+; V^{-1})$.

Требуемое для $\mathcal{T}$-относительной компактности неравенство выполняется с функцией

$$(\tilde\varphi_\theta(t))^2 = C_2\biggl(1 + e^{-2\alpha t}\biggl(1 + C_1 \int\limits_{-\infty}^{t+1} e^{2\alpha s}\|f(s+\theta)\|_{V^0}^2\,ds\biggr) + C_1\|f\|^2_{L_2(t+\theta,t+\theta+1;V^0)}\biggr).$$

Таким образом, семейство $\mathbf{P}$ является $\mathcal{T}$-относительно компактным.

Покажем, что $\mathbf{P}$ является обратно поглощающим. Пусть $\mathbf{D} = \{D_\tau\} \in \mathfrak{D}$. Возьмём число $\theta \in \mathbb{R}$ и покажем, что существует такое $\tau_{\mathbf{D}}(\theta) \leqslant \theta$, что при $\tau \leqslant \tau_{\mathbf{D}}(\theta)$ выполняется включение

$$T(\theta - \tau)\mathcal{H}_\tau^+(\mathbf{D}) \subset P_\theta \tag{11}$$

и функция $\tau_{\mathbf{D}}$ возрастает. По определению класса $\mathfrak{D}$ для семейства $\mathbf{D}$ существует функция $r_{\mathbf{D}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ такая, что для $w \in D_\tau$ имеет место оценка $\|w\|_{V^0} \leqslant r_{\mathbf{D}}(\tau)$, и функция $\chi(\tau) = e^{2\alpha\tau} r^2_{\mathbf{D}}(\tau)$ возрастает и стремится к нулю при $\tau \to -\infty$. В силу монотонности χ имеет возрастающую обратную функцию χ^{-1}. Рассмотрим неравенство $\chi(\tau) \leqslant e^{2\alpha\theta}$. В силу свойств χ это неравенство выполняется либо на всей оси, либо на луче $(-\infty, \chi^{-1}(e^{2\alpha\theta})]$. В первом случае положим $\tau_{\mathbf{D}}(\theta) = \theta$, во втором – $\tau_{\mathbf{D}}(\theta) = \min\{\chi^{-1}(e^{2\alpha\theta}), \theta\}$, т.е. $\tau_{\mathbf{D}}$ всегда возрастает, удовлетворяет неравенству $\tau_{\mathbf{D}} \leqslant \theta$, а при $\tau \leqslant \tau_{\mathbf{D}}(\theta)$ выполняется условие $e^{-2\alpha(\theta-\tau)} r^2_{\mathbf{D}}(\tau) \leqslant 1$.

Докажем включение (11) для $\tau \leqslant \tau_{\mathbf{D}}(\theta)$. Возьмём функцию $v \in \mathcal{H}_\tau^+$ такую, что $v(0) \in D_\tau$, и покажем, что $T(\theta-\tau)v \in P_\theta$. Достаточно показать, что $u = T(\theta-\tau)v$ удовлетворяет (9) и (10).

По определению $\mathcal{H}_\tau^+$ функция v является решением задачи (4)–(6) с правой частью $F = T(\tau)f$ и удовлетворяет (8). Тогда $u = T(\theta-\tau)v$ является решением (4)–(6) с правой частью $F = T(\theta-\tau)T(\tau)f = T(\theta)f$ и удовлетворяет неравенству

$$\|u\|_{L_\infty(t,t+1;V^0)} + \|u\|_{L_2(t,t+1;V^1)} = \|T(\theta-\tau)v\|_{L_\infty(t,t+1;V^0)} + \|T(\theta-\tau)v\|_{L_2(t,t+1;V^1)} =$$

$$= \|v\|_{L_\infty(t+\theta-\tau,t+\theta-\tau+1;V^0)} + \|v\|_{L_2(t+\theta-\tau,t+\theta-\tau+1;V^1)} \leqslant$$

$$\leqslant C_2\Bigg(1 + C_1\|T(\tau)f\|^2_{L_2(t+\theta-\tau,t+\theta-\tau+1;V^0)} + e^{-2\alpha(t+\theta-\tau)}\Bigg(\|v(0)\|^2_{V^0} + C_1\int\limits_{-\infty}^{t+\theta-\tau+1} e^{2\alpha s}\|T(\tau)f(s)\|^2_{V^0}\,ds\Bigg)\Bigg) \leqslant$$

$$\leqslant C_2\Bigg(1 + C_1\|f\|^2_{L_2(t+\theta,t+\theta+1;V^0)} + e^{-2\alpha t}\Bigg(e^{-2(\theta-\tau)}(r_{\mathbf{D}}(\tau))^2 + C_1\int\limits_{-\infty}^{t+\theta-\tau+1} e^{2\alpha(s-\theta+\tau)}\|f(s+\tau)\|^2_{V^0}\,ds\Bigg)\Bigg) \leqslant$$

$$\leqslant C_2\Bigg(1 + C_1\|f\|^2_{L_2(t+\theta,t+\theta+1;V^0)} + e^{-2\alpha t}\Bigg(1 + C_1\int\limits_{-\infty}^{t+1} e^{2\alpha s}\|f(s+\theta)\|^2_{V^0}\,ds\Bigg)\Bigg).$$

Оценка (9) для $u = T(\theta-\tau)v$ доказана. Докажем (10) для $u' = T(\theta-\tau)v'$. Так как v – слабое решение (4)–(6) с $F = T(\tau)f$, то по теореме 3 при всех $t \geqslant 0$ выполняется неравенство (7). Тогда справедлива оценка

$$\|u'\|_{L_2(t,t+1;V^{-2})} = \|T(\theta-\tau)v'\|_{L_2(t,t+1;V^{-2})} = \|v'\|_{L_2(t+\theta-\tau,t+1+\theta-\tau;V^{-2})} \leqslant$$

$$\leqslant C_3\Bigg(1 + e^{-2\alpha(t+\theta-\tau)}\Bigg(\|v(0)\|^2_{V^0} + C_1\int\limits_0^{t+\theta-\tau+1} e^{2\alpha s}\|T(\tau)f(s)\|^2_{V^0}\,ds\Bigg) + \|T(\tau)f\|^2_{L_2(t+\theta-\tau,t+\theta-\tau+1;V^0)}\Bigg)^2 \leqslant$$

$$\leqslant C_3\Bigg(1 + e^{-2\alpha t}\Bigg(e^{-2(\theta-\tau)}(r_{\mathbf{D}}(\tau))^2 + C_1\int\limits_{-\infty}^{t+\theta-\tau+1} e^{2\alpha(s-\theta+\tau)}\|f(s+\tau)\|^2_{V^0}\,ds\Bigg) + \|f\|^2_{L_2(t+\theta,t+\theta+1;V^0)}\Bigg)^2 \leqslant$$

$$\leqslant C_3\Bigg(1 + e^{-2\alpha t}\Bigg(1 + C_1\int\limits_{-\infty}^{t+1} e^{2\alpha s}\|f(s+\theta)\|^2_{V^0}\,ds\Bigg) + \|f\|^2_{L_2(t+\theta,t+\theta+1;V^0)}\Bigg)^2.$$

Поэтому имеет место включение (11). Следовательно, $\mathbf{P}$ является $\mathcal{T}$-относительно компактным и обратно поглощающим, а значит, по теореме 1 существует минимальный траекторный обратный аттрактор, а по теореме 2 – минимальный обратный аттрактор для $\mathbf{H}^+$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 22-11-00103).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Chepyzhov V.V., Vishik M.I.* Evolution equations and their trajectory attractors // J. Math. Pures Appl. 1997. V. 76. № 10. P. 913–964.
2. *Sell G.R.* Global attractors for the three-dimensional Navier–Stokes equations // J. of Dynamics and Differ. Equat. 1996. V. 8. № 1. P. 1–33.
3. *Zvyagin V., Vorotnikov D.* Topological Approximation Methods for Evolutionary Problems of Nonlinear Hydrodynamics. Berlin, 2008.

4. *Zvyagin V.* Attractors theory for autonomous systems of hydrodynamics and its application to Bingham model of fluid motion // Lobachevskii J. Math. 2017. V. 38. P. 767–777.
5. *Устюжанинова А.С., Турбин М.В.* Траекторные и глобальные аттракторы для модифицированной модели Кельвина–Фойгта // Сиб. журн. индустр. математики. 2021. Т. 24. № 1. С. 126–138.
6. *Звягин В.Г., Кондратьев С.К.* Аттракторы уравнений неньютоновской гидродинамики // Успехи мат. наук. 2014. Т. 69. № 5 (419). С. 81–156.
7. *Vorotnikov D.* Asymptotic behaviour of the non-autonomous 3D Navier–Stokes problem with coercive force // J. Differ. Equat. 2011. V. 251. № 8. P. 2209–2225.
8. *Turbin M., Ustiuzhaninova A.* Pullback attractors for weak solution to modified Kelvin–Voigt model // Evolution Equations and Control Theory. 2022. V. 11. № 6. P. 2055–2072.
9. *Устюжанинова А.С.* Pullback-аттракторы модифицированной модели Кельвина–Фойгта // Изв. вузов. Математика. 2021. Т. 5. С. 98–104.
10. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. М., 1971.
11. *Shelukhin V.V.* Bingham viscoplastic as a limit of non-Newtonian fluids // J. of Math. Fluid Mech. 2022. V. 4. P. 109–127.
12. *Серегин Г.А.* О динамической системе, порождённой двумерными уравнениями движения среды Бингама // Зап. науч. сем. ЛОМИ. 1991. Т. 181. С. 128–142.
13. *Звягин В.Г., Турбин М.В.* О существовании аттракторов для аппроксимаций модели Бингама и их сходимости к аттракторам исходной модели // Сиб. мат. журн. 2022. Т. 63. № 4. С. 842–859.
14. *Temam R.* Navier–Stokes Equations and Nonlinear Functional Analysis. Philadelphia, 1995.
15. *Звягин В.Г., Звягин А.В., Турбин М.В.* Оптимальное управление с обратной связью для модели Бингама с периодическими условиями по пространственным переменным // Зап. науч. сем. ПОМИ. 2018. Т. 477. С. 54–86.
16. *Simon J.* Compact sets in the space $L^p(0,T;B)$ // Ann. Mat. Pura Appl. 1986. V. 146. P. 65–96.

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 28.12.2022 г.
После доработки 02.02.2023 г.
Принята к публикации 14.02.2023 г.