ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.968.48

О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОЙ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОПЕРАТОРОМ ГАММЕРШТЕЙНА–СТИЛТЬЕСА НА ПОЛУОСИ

© 2023 г. Х. А. Хачатрян, А. С. Петросян

Исследована система нелинейных интегральных уравнений типа Гаммерштейна–Стилтьеса, предъядра которых представляют собой непрерывные функции распределений. Доказана конструктивная теорема существования нетривиального неотрицательного и ограниченного решения системы. Изучена интегральная асимптотика построенного решения. Приведены примеры систем, для которых выполняются все условия доказанной теоремы.

DOI: 10.31857/S0374064123030093, EDN: QVJFJH

Введение. Рассмотрим систему нелинейных интегральных уравнений на положительной полуоси $x\in\mathbb{R}^+:=[0,+\infty)$

$$f_i(x)=\int\limits_0^\infty K_i(x,y)G_i(f_1(r(x,y)),\ldots,f_n(r(x,y)))\,d\mu_i(y),\quad i=\overline{1,n}, \tag{1}$$

относительно искомой измеримой вектор-функции $f(x)=(f_1(x),\ldots,f_n(x))^{\mathrm{т}}$ ($^{\mathrm{т}}$ – знак транспонирования). В системе (1) меры $\{\mu_i(y)\}_{i=1}^n$ – непрерывные на множестве $\mathbb{R}^+$ неотрицательные функции со свойствами

$$\mu_i(0)=0,\quad \mu_i(+\infty)=1,\quad \mu_i(y)\uparrow \text{ по } y \text{ на } \mathbb{R}^+,\quad i=\overline{1,n}. \tag{2}$$

Ядра $\{K_i(x,y)\}_{i=1}^n$ – измеримые функции на множестве $\mathbb{R}^2_+:=\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+$, удовлетворяющие условиям: существуют непрерывные на $\mathbb{R}^+$ функции $\{\lambda_i(x)\}_{i=1}^n$ со свойствами

$$0\leqslant\lambda_i(x)\leqslant 1,\quad \lambda_i(x)\not\equiv 0,\quad \lambda_i(x)\not\equiv 1,\quad x\in\mathbb{R}^+,\quad \lambda_i(x)\uparrow 1,\quad x\to+\infty,\quad i=\overline{1,n}, \tag{3}$$

$$(1-\lambda_i(x))x^m\in L_1(\mathbb{R}^+),\quad i=\overline{1,n},\quad m=0,1, \tag{4}$$

такие, что

$$\lambda_i(x)\leqslant K_i(x,y)\leqslant 1,\quad K_i(x,y)\not\equiv 1,\quad (x,y)\in\mathbb{R}^2_+,\quad i=\overline{1,n}. \tag{5}$$

Функция $r(x,y)$, фигурирующая в (1), непрерывна по совокупности своих аргументов на множестве $\mathbb{R}^2_+$, принимает неотрицательные значения и удовлетворяет следующим условиям:

I) при каждом фиксированном $x\in\mathbb{R}^+$ функция $r(x,y)\uparrow$ по y на $\mathbb{R}^+$ и при каждом фиксированном $y\in\mathbb{R}^+$ данная функция $\uparrow$ по x на $\mathbb{R}^+$;

II) $r(x,0)\geqslant x$, $x\in\mathbb{R}^+$, и существует число $\delta>0$ такое, что $r(x,\delta)\geqslant x+\delta$, $x\in\mathbb{R}^+$.

Нелинейности $\{G_i(u_1,\ldots,u_n)\}_{i=1}^n$ определены на множестве $\mathbb{R}^n_+:=\underbrace{\mathbb{R}^+\times\cdots\times\mathbb{R}^+}_{n}$, принимают вещественные значения и удовлетворяют определённым ограничениям (см. п. 1 ниже).

Системы вида (1) имеют приложения во многих разделах математического естествознания, например, в теории марковских процессов, в теории переноса излучения в неоднородных средах и в кинетической теории газов (в рамках модифицированной модели Бхатнагара–Гросса–Крука) (см., например, [1–5]).

Изучение вопроса существования нетривиальных решений системы (1) играет существенную роль в исследованиях скалярных и векторных нелинейных псевдодифференциальных уравнений в динамической теории p-адических открыто-замкнутых струн, а также в вопросах существования и единственности решения нелинейных многомерных интегральных уравнений в математической теории географического распространения пандемии (см. [6–9]).

В случае когда $r(x,y) = y$ или $r(x,y) = x + y$, $\mu_i(y) = y$, $i = \overline{1,n}$, а ядра $\{K_i(x,y)\}_{i=1}^n$ зависят от разности своих аргументов, системы вида (1) при различных ограничениях на $\{G_i(u_1,\ldots,u_n)\}_{i=1}^n$ исследованы в работах [10–12].

Следует отметить, что соответствующий скалярный аналог системы (1) $(n = 1)$ достаточно подробно исследован в статьях [13–16] для случая $r(x,y) = y$ или $r(x,y) = x + y$, $\mu(y) = y$, а для $K(x,y)$ минорантой в смысле М.А. Красносельского служит консервативное ядро Винера–Хопфа.

В настоящей работе при некоторых естественных ограничениях на $\{G_i(u_1,\ldots,u_n)\}_{i=1}^n$ (см. п. 1) удаётся доказать конструктивную теорему существования неотрицательного и ограниченного решения. Исследуется также интегральная асимптотика построенного решения на бесконечности. Для иллюстрации полученных результатов приводятся конкретные примеры функций $\{K_i(x,y)\}_{i=1}^n$, $\{\mu_i(y)\}_{i=1}^n$ и $\{G_i(u_1,\ldots,u_n)\}_{i=1}^n$.

1. Обозначения и формулировка основного результата. Пусть $\mathbb{R}^{n\times n}$ – алгебра вещественных $n\times n$ матриц с единицей I. Обозначим через $\mathcal{K}\subset\mathbb{R}^{n\times n}$ конус матриц с неотрицательными компонентами. Данный конус вводит частичный порядок $\geqslant$ в $\mathbb{R}^{n\times n}$. Будем писать, что $A\succ 0$, если $A\geqslant 0$, и $A > 0$, если все компоненты матрицы A положительны. Класс $\mathcal{K}_p\subset\mathcal{K}$ примитивных матриц состоит из матриц A, для которых существует натуральное число p такое, что $A^p > 0$.

Пусть $r(A)$ – спектральный радиус матрицы $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ (модуль наибольшего по модулю собственного значения A). Согласно теореме Перрона (см. [17, с. 260]) если $A\in\mathcal{K}_p$, то $r(A)$ является её наибольшим по модулю простым собственным значением, причём существует вектор $\eta = (\eta_1,\ldots,\eta_n)^{\mathrm{т}}$ с положительными координатами η_i, $i=\overline{1,n}$, такой, что

$$A\eta = r(A)\eta.$$

Для нелинейностей $\{G_i(u_1,\ldots,u_n)\}_{i=1}^n$ предположим выполнение следующих условий:

a) $\{G_i(u_1,\ldots,u_n)\}_{i=1}^n$ – непрерывные на $\mathbb{R}^n_+$ функции, которые принимают вещественные значения и монотонно возрастают по каждому аргументу u_j, $j=\overline{1,n}$, на множестве $\mathbb{R}^+$;

b) существует примитивная и симметричная матрица A со спектральным радиусом $r(A) = 1$ такая, что

$$G_i(u_1,\ldots,u_n)\geqslant\sum_{j=1}^n a_{ij}u_j,\quad i=\overline{1,n},\quad (u_1,\ldots,u_n)\in[0,\eta_1]\times\ldots\times[0,\eta_n],$$

где $\{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$ – элементы матрицы $A\in\mathcal{K}_p$, а $\eta=(\eta_1,\ldots,\eta_n)^{\mathrm{т}}$, $\eta_i>0$, $i=\overline{1,n}$, – неподвижный вектор A (существование такого вектора следует из теоремы Перрона).

Основным результатом настоящей работы является следующая

Теорема. *Если нелинейности* $\{G_i(u_1,\ldots,u_n)\}_{i=1}^n$ *удовлетворяют неравенствам*

$$G_i(\eta_1,\ldots,\eta_n)\leqslant\eta_i,\quad i=\overline{1,n},\tag{6}$$

и выполняются условия (2)–(5), I), II), a), b), то система нелинейных интегральных уравнений (1) имеет неотрицательное нетривиальное и ограниченное на $\mathbb{R}^+$ *решение. Более того,* $\eta_i - f_i\in L_1(\mathbb{R}^+)$, $i=\overline{1,n}$.

Замечание 1. Сформулированная теорема обобщает и дополняет соответствующий результат из работы [16].

Замечание 2. К сожалению, вопрос единственности построенного решения до сих пор остаётся открытым.

2. Доказательство теоремы.

Шаг 1. Сначала рассмотрим вспомогательную линейную систему интегральных уравнений на полуоси

$$F_i(x) = (1-\lambda_i(x))\eta_i + \sum_{j=1}^n a_{ij} \int_0^\infty F_j(r(x,y))\, d\mu_i(y), \quad x\in\mathbb{R}^+, \quad i=\overline{1,n}, \tag{7}$$

относительно искомой непрерывной вектор-функции $F(x) = (F_1(x),\ldots,F_n(x))^{\mathrm{т}}$.

Рассмотрим следующие простые итерации для системы (7):

$$F_i^{(p+1)}(x) = (1-\lambda_i(x))\eta_i + \sum_{j=1}^n a_{ij} \int_0^\infty F_j^{(p)}(r(x,y))\, d\mu_i(y),$$

$$F_i^{(0)}(x) = (1-\lambda_i(x))\eta_i, \quad p\in\mathbb{N}\bigcup\{0\}, \quad x\in\mathbb{R}^+, \quad i=\overline{1,n}. \tag{8}$$

Ввиду непрерывности функций $\{\lambda_i(x)\}_{i=1}^n$, $r(x,y)$ и $\{\mu_i(y)\}_{i=1}^n$ на соответствующих множествах, индукцией по p несложно доказать, что

$$F_i^{(p)}\in C(\mathbb{R}^+), \quad p\in\mathbb{N}\bigcup\{0\}, \quad i=\overline{1,n}. \tag{9}$$

С учётом условий (2), (3), $I)$ и $II)$ легко можно проверить также, что

$$F_i^{(p)}(x)\uparrow \text{ по } p, \quad x\in\mathbb{R}^+, \quad i=\overline{1,n}. \tag{10}$$

Докажем теперь, что

$$F_i^{(p)}(x)\downarrow \text{ по } x \text{ на } \mathbb{R}^+, \quad p=\mathbb{N}\bigcup\{0\}, \quad i=\overline{1,n}. \tag{11}$$

При $p=0$ утверждение (11) сразу следует из условий (3). Предположим, что $F_i^{(p)}(x)\downarrow$ по x на $\mathbb{R}^+$, $i=\overline{1,n}$, при некотором натуральном p. Тогда для любых $(x_1,y)\in\mathbb{R}^2_+$, $(x_2,y)\in\mathbb{R}^2_+$, $x_1>x_2$, в силу условия $I)$ имеет место неравенство

$$F_i^{(p)}(r(x_1,y))\leqslant F_i^{(p)}(r(x_2,y)), \quad i=\overline{1,n}.$$

С учётом (2) и (3) из (8) будем иметь соотношения

$$F_i^{(p+1)}(x_1) = (1-\lambda_i(x_1))\eta_i + \sum_{j=1}^n a_{ij} \int_0^\infty F_j^{(p)}(r(x_1,y))\, d\mu_i(y) \leqslant$$

$$\leqslant (1-\lambda_i(x_2))\eta_i + \sum_{j=1}^n a_{ij} \int_0^\infty F_j^{(p)}(r(x_2,y))\, d\mu_i(y) = F_i^{(p+1)}(x_2), \quad i=\overline{1,n}.$$

Таким образом, свойство (11) доказано.

Теперь, используя (11), убедимся, что

$$F_i^{(p)}\in L_1(\mathbb{R}^+), \quad p=\mathbb{N}\bigcup\{0\}, \quad i=\overline{1,n}.$$

Действительно, при $p=0$ данное включение сразу следует из условия (4). Предположим, что $F_i^{(p)}\in L_1(\mathbb{R}^+)$, $i=\overline{1,n}$, при некотором $p\in\mathbb{N}$. Тогда, учитывая (2), $I)$, $II)$, (10) и (11), из (8) получаем неравенства

$$0\leqslant F_i^{(p+1)}(x)\leqslant (1-\lambda_i(x))\eta_i + \sum_{j=1}^n a_{ij} \int_0^\infty F_j^{(p)}(r(x,0))\, d\mu_i(y) \leqslant$$

$$\leqslant (1-\lambda_i(x))\eta_i+\sum_{j=1}^n a_{ij}F_j^{(p)}(x)\in L_1(\mathbb{R}^+),$$

а значит, $F_i^{(p+1)}\in L_1(\mathbb{R}^+)$, $i=\overline{1,n}$.

Шаг 2. Докажем, что существует постоянная $C>0$ такая, что имеет место оценка

$$\int\limits_0^\infty F_i^{(p)}(x)\,dx\leqslant C,\quad p\in\mathbb{N}\bigcup\{0\},\quad i=\overline{1,n}.$$

Пусть $a\geqslant 0$ – произвольное число. Умножим обе части (8) на η_i, $i=\overline{1,n}$. Далее проинтегрируем обе части полученного равенства по x на множестве $[a,+\infty)$, после чего просуммируем это соотношение по всем $i=\overline{1,n}$. Тогда с учётом (2), (4), $I)$ и $II)$ из (8) будем иметь

$$\sum_{i=1}^n\eta_i\int\limits_a^\infty F_i^{(p+1)}(x)\,dx=\sum_{i=1}^n\eta_i^2\int\limits_a^\infty(1-\lambda_i(x))\,dx+\sum_{i=1}^n\eta_i\sum_{j=1}^n a_{ij}\int\limits_a^\infty\int\limits_0^\infty F_j^{(p)}(r(x,y))\,d\mu_i(y)\,dx=$$

$$=\sum_{i=1}^n\eta_i^2\int\limits_a^\infty(1-\lambda_i(x))\,dx+\sum_{j=1}^n\sum_{i=1}^n a_{ji}\eta_i\int\limits_0^\infty\int\limits_a^\infty F_j^{(p)}(r(x,y))\,dx\,d\mu_i(y)=\sum_{i=1}^n\eta_i^2\int\limits_a^\infty(1-\lambda_i(x))\,dx+$$

$$+\sum_{j=1}^n\sum_{i=1}^n a_{ji}\eta_i\int\limits_0^\delta\int\limits_a^\infty F_j^{(p)}(r(x,y))\,dx\,d\mu_i(y)+\sum_{j=1}^n\sum_{i=1}^n a_{ji}\eta_i\int\limits_\delta^\infty\int\limits_a^\infty F_j^{(p)}(r(x,y))\,dx\,d\mu_i(y)\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^n\eta_i^2\int\limits_a^\infty(1-\lambda_i(x))\,dx+\sum_{j=1}^n\sum_{i=1}^n a_{ji}\eta_i\mu_i(\delta)\int\limits_a^\infty F_j^{(p+1)}(r(x,0))\,dx+$$

$$+\sum_{j=1}^n\sum_{i=1}^n a_{ji}\eta_i(1-\mu_i(\delta))\int\limits_a^\infty F_i^{(p+1)}(r(x,\delta))\,dx\leqslant\sum_{i=1}^n\eta_i^2\int\limits_a^\infty(1-\lambda_i(x))\,dx+$$

$$+\sum_{j=1}^n\sum_{i=1}^n a_{ji}\eta_i\mu_i(\delta)\int\limits_a^\infty F_i^{(p+1)}(x)\,dx+\sum_{j=1}^n\sum_{i=1}^n a_{ji}\eta_i(1-\mu_i(\delta))\int\limits_{a+\delta}^\infty F_j^{(p+1)}(x)\,dx=$$

$$=\sum_{i=1}^n\eta_i^2\int\limits_a^\infty(1-\lambda_i(x))\,dx+\sum_{j=1}^n\sum_{i=1}^n a_{ij}\eta_i\mu_i(\delta)\int\limits_a^{a+\delta}F_j^{(p+1)}(x)\,dx+\sum_{j=1}^n\eta_j\int\limits_{a+\delta}^\infty F_j^{(p+1)}(x)\,dx,$$

откуда следует неравенство

$$\sum_{j=1}^n\eta_j\int\limits_a^{a+\delta}F_j^{(p+1)}(x)\,dx\leqslant\sum_{i=1}^n\eta_i^2\int\limits_a^\infty(1-\lambda_i(x))\,dx+\sum_{j=1}^n\sum_{i=1}^n a_{ji}\eta_i\mu_i(\delta)\int\limits_a^{a+\delta}F_j^{(p+1)}(x)\,dx$$

или

$$\sum_{j=1}^n\sum_{i=1}^n a_{ji}\eta_i(1-\mu_i(\delta))\int\limits_a^{a+\delta}F_j^{(p+1)}(x)\,dx\leqslant\sum_{i=1}^n\eta_i^2\int\limits_a^\infty(1-\lambda_i(x))\,dx.\tag{12}$$

Так как $(1-\mu_i(\delta))>0$ для всех $i=\overline{1,n}$, то из (12) в силу теоремы Перрона имеем

$$0\leqslant\sum_{j=1}^n\eta_j\int\limits_a^{a+\delta}F_j^{(p+1)}(x)\,dx\leqslant\frac{1}{\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(1-\mu_i(\delta))}\sum_{i=1}^n\eta_i^2\int\limits_a^\infty(1-\lambda_i(x))\,dx.\tag{13}$$

С учётом (11) и (9) из (13) получим оценку

$$0 \leqslant \sum_{j=1}^{n} \eta_j F_j^{(p+1)}(a+\delta) \leqslant \frac{1}{\delta \min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(1-\mu_i(\delta))} \sum_{i=1}^{n} \eta_i^2 \int\limits_a^\infty (1-\lambda_i(x))\,dx. \tag{14}$$

Используя теорему Фубини (см. [18, с. 317]), в силу (4) из (14) получаем

$$0 \leqslant \sum_{j=1}^{n} \eta_j \int\limits_0^\infty F_j^{(p+1)}(a+\delta)\,da \leqslant \frac{1}{\delta \min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(1-\mu_i(\delta))} \sum_{i=1}^{n} \eta_i^2 \int\limits_0^\infty x(1-\lambda_i(x))\,dx := \gamma, \tag{15}$$

откуда следует, что

$$\int\limits_\delta^\infty F_j^{(p+1)}(x)\,dx \leqslant \frac{1}{\delta \min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(\eta_i) \min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(1-\mu_i(\delta))} \sum_{i=1}^{n} \eta_i^2 \int\limits_0^\infty x(1-\lambda_i(x))\,dx := C_1, \tag{16}$$

где $j=\overline{1,n}$, $p\in\mathbb{N}\bigcup\{0\}$. Проинтегрируем теперь обе части (8) по x в пределах от 0 до δ, затем умножим на η_i и просуммируем полученное равенство по всем $i=\overline{1,n}$. В результате, если учесть $I)$, (10) и (15), получим

$$\sum_{i=1}^{n} \eta_i \int\limits_0^\delta F_i^{(p+1)}(x)\,dx \leqslant \sum_{i=1}^{n} \eta_i^2 \int\limits_0^\infty (1-\lambda_i(x))\,dx + \sum_{i=1}^{n} \eta_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \int\limits_0^\delta \int\limits_0^\infty F_j^{(p+1)}(r(x,y))\,d\mu_i(y)\,dx =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \eta_i^2 \int\limits_0^\infty (1-\lambda_i(x))\,dx + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ji}\eta_i \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\delta F_j^{(p+1)}(r(x,y))\,dx\,d\mu_i(y) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} \eta_i^2 \int\limits_0^\infty (1-\lambda_i(x))\,dx + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ji}\eta_i \int\limits_0^\delta \int\limits_0^\delta F_j^{(p+1)}(r(x,0))\,dx\,d\mu_i(y) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ji}\eta_i \int\limits_\delta^\infty \int\limits_0^\delta F_j^{(p+1)}(r(x,\delta))\,dx\,d\mu_i(y) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \eta_i^2 \int\limits_0^\infty (1-\lambda_i(x))\,dx +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ji}\eta_i \int\limits_0^\delta \int\limits_0^\delta F_j^{(p+1)}(x)\,dx\,d\mu_i(y) + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ji}\eta_i \int\limits_\delta^\infty \int\limits_0^\delta F_j^{(p+1)}(x+\delta)\,dx\,d\mu_i(y) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} \eta_i^2 \int\limits_0^\infty (1-\lambda_i(x))\,dx + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ji}\eta_i\mu_i(\delta) \int\limits_0^\delta F_j^{(p+1)}(x)\,dx + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\eta_i \int\limits_\delta^\infty \int\limits_\delta^\infty F_j^{(p+1)}(x)\,dx\,d\mu_i(y) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} \eta_i^2 \int\limits_0^\infty (1-\lambda_i(x))\,dx + \max_{1\leqslant i\leqslant n}(\mu_i(\delta)) \sum_{j=1}^{n} \eta_j \int\limits_0^\delta F_j^{(p+1)}(x)\,dx + \gamma,$$

отсюда, ввиду того, что $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(\mu_i(\delta)) < 1$, следует оценка

$$\int\limits_0^\delta F_j^{(p+1)}(x)\,dx \leqslant \frac{1}{\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(\eta_i)(1-\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\mu_i(\delta))} \sum_{i=1}^{n} \eta_i^2 \int\limits_0^\infty (1-\lambda_i(x))\,dx + \gamma := C_2. \tag{17}$$

Учитывая (16) и (17), а также определение нулевого приближения в итерациях (8), получаем

$$\int\limits_0^\infty F_j^{(p)}(x)\,dx \leqslant \max\left\{\max_{1\leqslant i\leqslant n}\left(\eta_i\int\limits_0^\infty(1-\lambda_i(x))\,dx\right), C_1+C_2\right\} := C, \quad j=\overline{1,n}, \quad p\in\mathbb{N}\bigcup\{0\}. \quad (18)$$

Таким образом, в силу (9)–(11), (18) и теоремы Б. Леви (см. [18, с. 303]) заключаем, что последовательность монотонных непрерывных вектор-функций $F^{(p)}(x) := (F_1^{(p)}(x),\ldots,F_n^{(p)}(x))^{\text{т}}$, $p\in\mathbb{N}\bigcup\{0\}$, почти всюду на $\mathbb{R}^+$ имеет предел при $p\to\infty$:

$$\lim_{p\to\infty} F^{(p)}(x) =: F(x) = (F_1(x),\ldots,F_n(x))^{\text{т}},$$

причём предельная вектор-функция удовлетворяет системе (7). Из (10) и (18) следует, что

$$\eta_i(1-\lambda_i(x)) \leqslant F_i(x), \quad \int\limits_0^\infty F_i(x)\,dx \leqslant C, \quad i=\overline{1,n}, \quad x\in\mathbb{R}^+, \quad (19)$$

где число C определяется по формуле (18).

Шаг 3. Рассмотрим теперь вторую вспомогательную систему линейных интегральных уравнений

$$\varphi_i(x) = \eta_i(1-\lambda_i(x)) + \lambda_i(x)\sum_{j=1}^n a_{ij}\int\limits_0^\infty \varphi_j(r(x,y))\,d\mu_i(y), \quad x\in\mathbb{R}^+, \quad i=\overline{1,n}, \quad (20)$$

относительно неизвестной вектор-функций $\varphi(x) = (\varphi_1(x),\ldots,\varphi_n(x))^{\text{т}}$.

Введя следующие последовательные приближения для системы (20):

$$\varphi_i^{(p+1)}(x) = \eta_i(1-\lambda_i(x)) + \lambda_i(x)\sum_{j=1}^n a_{ij}\int\limits_0^\infty \varphi_j^{(p)}(r(x,y))\,d\mu_i(y),$$

$$\varphi_i^{(0)}(x) = \eta_i(1-\lambda_i(x)), \quad p\in\mathbb{N}\bigcup\{0\}, \quad i=\overline{1,n}, \quad x\in\mathbb{R}^+,$$

индукцией несложно убедиться в достоверности приведённых ниже утверждений:

$$\varphi_i^{(p)} \in C(\mathbb{R}^+), \quad p\in\mathbb{N}\bigcup\{0\}, \quad i=\overline{1,n}, \quad (21)$$

$$\varphi_i^{(p)}(x)\uparrow \text{ по } p, \quad p\in\mathbb{N}\bigcup\{0\}, \quad i=\overline{1,n}, \quad x\in\mathbb{R}^+, \quad (22)$$

$$\varphi_i^{(p)}(x) \leqslant F_i(x), \quad p\in\mathbb{N}\bigcup\{0\}, \quad i=\overline{1,n}, \quad x\in\mathbb{R}^+, \quad (23)$$

$$\varphi_i^{(p)}(x) \leqslant \eta_i, \quad p\in\mathbb{N}\bigcup\{0\}, \quad i=\overline{1,n}, \quad x\in\mathbb{R}^+, \quad (24)$$

где $F(x) = (F_1(x),\ldots,F_n(x))^{\text{т}}$ – суммируемое решение вспомогательной системы (7), удовлетворяющее неравенствам (19).

Следовательно, в соответствии с (21)–(24) последовательность непрерывных вектор-функций $\varphi^{(p)}(x) = (\varphi_1^{(p)}(x),\ldots,\varphi_n^{(p)}(x))^{\text{т}}$, $p\in\mathbb{N}\bigcup\{0\}$, имеет поточечный предел $\lim\limits_{p\to\infty}\varphi_i^{(p)}(x) = \varphi_i(x)$, $i=\overline{1,n}$. Согласно теореме Б. Леви предельная вектор-функция $\varphi(x) = (\varphi_1(x),\ldots,\varphi_n(x))^{\text{т}}$ удовлетворяет системе (20). Из (22)–(24) получаем также двусторонние оценки

$$\eta_i(1-\lambda_i(x)) \leqslant \varphi_i(x) \leqslant \min\{\eta_i, F_i(x)\}, \quad i=\overline{1,n}, \quad x\in\mathbb{R}^+. \quad (25)$$

Из (19) и (25), в частности, следует, что $\varphi_i\in L_1(\mathbb{R}^+)$, $i=\overline{1,n}$.

Заметим теперь, что системе интегральных уравнений (20) удовлетворяет также неподвижный вектор матрицы A. Очевидно, что вектор-функция $\phi(x) = (\phi_1(x), \ldots, \phi_n(x))^{\mathrm{T}}$, где $\phi_i(x) = \eta_i - \varphi_i(x)$, $i = \overline{1,n}$, удовлетворяет соответствующей однородной системе линейных интегральных уравнений

$$\phi_i(x) = \lambda_i(x) \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \int\limits_0^\infty \phi_j(r(x,y))\, d\mu_i(y), \quad i = \overline{1,n}, \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

Из (19) и (25) получаем

$$0 \leqslant \phi_i(x) \leqslant \eta_i, \quad \phi_i(x) \not\equiv 0, \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad \eta_i - \phi_i \in L_1(\mathbb{R}^+), \quad i = \overline{1,n}. \tag{26}$$

Шаг 4. Рассмотрим специальные итерации для исходной системы нелинейных интегральных уравнений

$$f_i^{(p+1)}(x) = \int\limits_0^\infty K_i(x,y) G_i(f_1^{(p)}(r(x,y)), \ldots, f_n^{(p)}(r(x,y)))\, d\mu_i(y),$$

$$f_i^{(0)}(x) = \eta_i, \quad p \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}, \quad i = \overline{1,n}. \tag{27}$$

С учётом непрерывности функций $r(x,y)$, $\{G_i(u_1, \ldots, u_n)\}_{i=1}^n$, $\{\mu_i(y)\}_{i=1}^n$ и измеримости ядер $\{K_i(x,y)\}_{i=1}^n$ методом математической индукции несложно проверить, что $\{f_i^{(p)}(x)\}_{i=1}^n$, $p \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}$, – измеримые функции на $\mathbb{R}^+$. Используя условия $a)$, (6) и (2), нетрудно доказать, что

$$f_i^{(p)}(x) \downarrow \text{ по } p, \quad i = \overline{1,n}, \quad x \in \mathbb{R}^+. \tag{28}$$

Докажем, что

$$f_i^{(p)}(x) \geqslant \phi_i(x), \quad i = \overline{1,n}, \quad p \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}, \quad x \in \mathbb{R}^+. \tag{29}$$

Неравенства (29) при $p = 0$ сразу следуют ввиду неотрицательности функций $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^n$ и определения нулевого приближения в (27). Предположим, что оценки (29) справедливы при некотором $p \in \mathbb{N}$. Тогда, учитывая условия $b)$ и (5), из (27) получаем неравенства

$$f_i^{(p+1)}(x) \geqslant \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \int\limits_0^\infty K_i(x,y) f_j^{(p)}(r(x,y))\, d\mu_i(y) \geqslant \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \int\limits_0^\infty K_i(x,y) \phi_j(r(x,y))\, d\mu_i(y) \geqslant$$

$$\geqslant \lambda_i(x) \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \int\limits_0^\infty \phi_j(r(x,y))\, d\mu_i(y) = \phi_i(x), \quad i = \overline{1,n}, \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

Итак, на основании (28) и (29) заключаем, что последовательность измеримых вектор-функций $f^{(p)}(x) = (f_1^{(p)}(x), \ldots, f_n^{(p)}(x))^{\mathrm{T}}$ имеет поточечный предел

$$\lim_{p \to \infty} f^{(p)}(x) = f(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))^{\mathrm{T}}.$$

Принимая во внимание непрерывность функций r, $\{G_i\}_{i=1}^n$ и $\{\mu_i\}_{i=1}^n$, а также измеримость ядер $\{K_i(x,y)\}_{i=1}^n$, в силу теоремы Б. Леви предельная вектор-функция $f(x) = (f_1(x), \ldots$ $\ldots, f_n(x))^{\mathrm{T}}$ удовлетворяет системе (1). Из (28), (29) и (26) вытекает, что

$$\phi_i(x) \leqslant f_i(x) \leqslant \eta_i, \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad i = \overline{1,n},$$

$$\eta_i - f_i \in L_1(\mathbb{R}^+), \quad i = \overline{1,n}.$$

Теорема доказана.

3. Примеры. Приведём конкретные примеры функций $\{\lambda_i(x)\}_{i=1}^n$, $\{K_i(x,y)\}_{i=1}^n$, $\{\mu_i(y)\}_{i=1}^n$ и нелинейностей $\{G_i(u_1,\ldots,u_n)\}_{i=1}^n$, удовлетворяющих всем условиям теоремы.

Примеры $\{\lambda_i(x)\}_{i=1}^n$:

$\lambda_i(x) = 1 - \varepsilon_i e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}^+$, где $\varepsilon_i \in (0,1]$, $i = \overline{1,n}$, – произвольные числовые параметры;

$\lambda_i(x) = 1 - \varepsilon_i/(1+x^3)$, $x \in \mathbb{R}^+$, $i = \overline{1,n}$.

Примеры $\{K_i(x,y)\}_{i=1}^n$:

$K_i(x,y) = \lambda_i(x) + (1-\lambda_i(x))W_i(x,y)$, где $\{W_i(x,y)\}_{i=1}^n$ – произвольные неотрицательные и измеримые функции, удовлетворяющие неравенству $W_i(x,y) \leqslant 1$, $i = \overline{1,n}$, $(x,y) \in \mathbb{R}_+^2$;

$K_i(x,y) = 0.5(1 + \lambda_i(x) + (1-\lambda_i(x))W_i(x,y))$, $(x,y) \in \mathbb{R}_+^2$, $i = \overline{1,n}$.

Наглядными примерами функций $\{W_i(x,y)\}_{i=1}^n$ могут служить следующие функции:

$W_i(x,y) = \alpha_i e^{-\beta_i(x^2+y^2)}$, $(x,y) \in \mathbb{R}_+^2$, где α_i, β_i – числовые параметры, $\beta_i > 0$, $\alpha_i \in (0,1]$, $i = \overline{1,n}$;

$W_i(x,y) = (\gamma_i/\sqrt{\pi})e^{-(x-y)^2} + \delta_i e^{-(x+y)}$, $0 < \gamma_i \leqslant \sqrt{\pi}/2$, $0 < \delta_i \leqslant 1/2$, $i = \overline{1,n}$, $(x,y) \in \mathbb{R}_+^2$.

Примеры $\{\mu_i(y)\}_{i=1}^n$:

$\mu_i(y) = 1 - e^{-\alpha_i y}$, $\alpha_i > 0$, $y \in \mathbb{R}^+$, где α_i – числовые параметры, $i = \overline{1,n}$;

$\mu_i(y) = 1 - n^{-1}\sum_{j=1}^n e^{-\alpha_i \varepsilon_j y}$, $y \in \mathbb{R}^+$, где $\{\varepsilon_j\}_{j=1}^n$, $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ – положительные числовые параметры, $i = \overline{1,n}$.

Примеры $\{G_i(u_1,\ldots,u_n)\}_{i=1}^n$:

$G_i(u_1,\ldots,u_n) = \sum_{j=1}^n a_{ij}Q_j(u_j)$, $(u_1,\ldots,u_n) \in \mathbb{R}_+^n$, $i = \overline{1,n}$, где $\{Q_j(u)\}_{j=1}^n$ – непрерывные и монотонные на $\mathbb{R}^+$ функции со свойствами $Q_j(u) \geqslant u$, $u \in [0,\eta_j]$, $Q_j(\eta_j) = \eta_j$, $j = \overline{1,n}$;

$$G_i(u_1,\ldots,u_n) = \frac{1}{2}Q_i\biggl(\sum_{j=1}^n a_{ij}u_j\biggr) + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^n a_{ij}u_j, \quad i = \overline{1,n}, \quad (u_1,\ldots,u_n) \in \mathbb{R}_+^n.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 19-11-00223).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и её приложения. Т. 2. М., 1963.
2. *Соболев В.В.* Проблема Милна для неоднородной атмосферы // Докл. АН СССР. 1978. Т. 239. № 3. С. 558–561.
3. *Енгибарян Н.Б.* Об одной задаче нелинейного переноса излучения // Астрофизика. 1966. Т. 2. № 1. С. 31–36.
4. *Арабаджян Л.Г.* Об одном интегральном уравнении теории переноса в неоднородной среде // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23. № 9. С. 1618–1622.
5. *Хачатрян А.Х., Хачатрян Х.А.* Качественные различия решений для одной модели уравнения Больцмана в линейном и нелинейном случаях // Журн. теор. и мат. физики. 2012. Т. 172. № 3. С. 497–504.
6. *Владимиров В.С., Волович Я.И.* О нелинейном уравнении динамики в теории p-адической струны // Журн. теор. и мат. физики. 2004. Т. 138. № 3. С. 355–368.
7. *Хачатрян Х.А.* О разрешимости некоторых классов нелинейных интегральных уравнений в теории p-адической струны // Изв. РАН. Сер. мат. 2018. Т. 82. № 2. С. 172–193.
8. *Diekmann O.* Thresholds and travelling waves for the geographical spread of infection // J. Math. Biol. 1978. V. 6. № 2. P. 109–130.
9. *Сергеев А.Г., Хачатрян Х.А.* О разрешимости одного класса нелинейных интегральных уравнений в задаче распространения эпидемии // Тр. Московского мат. о-ва. 2019. Т. 80. № 1. С. 113–131.
10. *Хачатрян Х.А.* О решении одной системы нелинейных интегральных уравнений типа Гаммерштейна–Немыцкого на всей оси // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. 2013. Т. 21. № 2. С. 154–161.
11. *Хачатрян Х.А.* О некоторых системах нелинейных интегральных уравнений типа Гаммерштейна на полуоси // Укр. мат. журн. 2010. Т. 62. № 4. С. 552–566.
12. *Хачатрян Х.А.* О разрешимости одной системы нелинейных интегральных уравнений типа Гаммерштейна на прямой // Изв. Саратовского ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2019. Т. 19. № 2. С. 164–181.

13. *Арабаджян Л.Г.* Решения одного интегрального уравнения типа Гаммерштейна // Изв. НАН Армении. Математика. 1997. Т. 32. № 1. С. 21–28.
14. *Banas J.* Integrable solutions of Hammerstein and Urysohn integral equations // J. Austral. Math. Soc. Ser. A. 1989. V. 46. № 1. P. 61–68.
15. *Хачатрян Х.А.* Достаточные условия разрешимости интегрального уравнения Урысона на полуоси // Докл. РАН. 2009. Т. 425. № 4. С. 462–465.
16. *Хачатрян Х.А.* Об одном классе интегральных уравнений типа Урысона с сильной нелинейностью // Изв. РАН. Сер. мат. 2012. Т. 76. № 1. С. 173–200.
17. *Ланкастер П.* Теория матриц. М., 1973.
18. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М., 1976.

Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова,
Ереванский государственный университет,
Армения,
Национальный аграрный университет Армении,
г. Ереван

Поступила в редакцию 05.01.2023 г.
После доработки 05.01.2023 г.
Принята к публикации 14.02.2023 г.