ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 3, с. 389–399

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

УДК 519.62

МНОГОШАГОВЫЕ МЕТОДЫ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

© 2023 г. М. В. Булатов, Л. С. Соловарова

Рассмотрена начальная задача для линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с тождественно вырожденной матрицей перед главной частью. В терминах матричных полиномов приведены достаточные условия существования единственного решения. Для таких задач предложены многошаговые разностные схемы. Проведены анализ их устойчивости и расчёты модельного примера.

DOI: 10.31857/S037406412303010X, EDN: QVLSII

Введение. Обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ) различных порядков – один из основных инструментов для моделирования важных прикладных задач. Если все уравнения одинакового порядка, то они образуют систему ОДУ. Если процесс можно описать взаимосвязанными ОДУ различных порядков, а также трансцендентными (конечномерными) уравнениями, то, объединив их, получим систему с тождественно вырожденной матрицей перед старшей производной. Такие системы принято называть *дифференциально-алгебраическими уравнениями* (ДАУ). Если порядок этой системы выше первого, то их называют *ДАУ высокого порядка.*

В настоящее время активно развиваются качественная теория и численные методы решения ДАУ первого порядка (как для начальной, так и для краевой задачи). Достаточно общирная и полная библиография по данному вопросу представлена в монографиях [1, 2], из более ранних можно привести [3, 4]. Для ДАУ высокого порядка обычно применяют следующий стандартный приём: вводят новую вектор-функцию размерности nk (n – размерность исходной задачи, k – порядок ДАУ) и записывают полученную задачу в виде ДАУ первого порядка. Такое преобразование имеет ряд недостатков, а именно увеличивает размерность в k раз и значительно ухудшает свойства полученной задачи – увеличивает индекс, который является показателем сложности (некорректности) первоначальной задачи.

Приведём одно из понятий индекса для ДАУ первого порядка с заданным начальным условием

$$\mathcal{A}(t)x'(t)+\mathcal{B}(t)x(t)=\varphi(t), \quad t\in[0,1], \quad x(0)=x_0. \tag{1}$$

Будем говорить, что система (1) имеет индекс r, если r – минимальное целое неотрицательное число такое, что существует линейный дифференциальный оператор

$$\mathcal{P}_r=\sum_{j=0}^{r}\mathcal{R}_j(t)(d/dt)^j,$$

суперпозиция которого с (1) даёт систему ОДУ, т.е.

$$\mathcal{P}_r\circ(\mathcal{A}(t)x'(t)+\mathcal{B}(t)x(t))=x'(t)+\bar{\mathcal{B}}(t)x(t),$$

где $\mathcal{R}_j(t)$, $j=\overline{0,r}$, $\mathcal{A}(t)$, $\mathcal{B}(t)$, $\bar{\mathcal{B}}(t)$ – $(n\times n)$-матрицы, причём $\mathcal{R}_r(t)\not\equiv 0$.

Методы построения оператора $\mathcal{P}_r$ с использованием проекторов и различных обобщённых обратных матриц изложены в [2, 3]. Для ДАУ порядка выше первого можно ввести аналогичное понятие индекса или новую переменную и записать рассматриваемую задачу в виде ДАУ первого порядка. Однако оба эти варианта обладают определёнными недостатками, а именно для таких задач индекс не будет отражать сложность создания численных методов. В частности, для одного класса ДАУ второго порядка ряд различных схем будет неустойчив или принципиально неприменим, а для других классов ДАУ второго порядка те же самые алгоритмы сходятся к точному решению. Таким образом, возникает необходимость проводить исследование на предмет существования и единственности достаточно гладкого решения и создавать методы численного решения ДАУ, не используя редукцию исходной задачи к ДАУ первого порядка.

Отметим также, что известно очень мало статей, посвящённых численному решению ДАУ высокого порядка. Из них можно выделить [5], где описано применение неявного метода Эйлера для рассматриваемых задач, и [6], в которой данные задачи исследованы с привлечением техники проекторов.

В настоящей работе выделен класс линейных ДАУ второго порядка (начальная задача), для которого предложено семейство многошаговых методов. Эти результаты основаны на особом свойстве матричных полиномов [7].

1. Постановка задачи. Рассмотрим задачу

$$A(t)x''(t)+B(t)x'(t)+C(t)x(t)=f(t), \quad t\in[0,1], \tag{2}$$

$$x(0)=x_0, \quad x'(t)|_{t=0}=x_0', \tag{3}$$

где $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ – $(n\times n)$-матрицы, $f(t)$ и $x(t)$ – заданная и искомая n-мерные вектор-функции соответственно, $x_0, x_0'\in\mathbb{R}^n$. Здесь и далее предполагается, что

$$\det A(t)\equiv 0. \tag{4}$$

Систему (2) с условием (4) принято называть *дифференциально-алгебраическими уравнениями второго порядка* (ДАУ2). Предполагается, что начальные условия (3) согласованы, т.е. рассматриваемая задача имеет решение. Под *решением* мы понимаем любую дифференцируемую вектор-функцию, которая обращает (2) в тождество и удовлетворяет условиям (3).

Большую роль при исследовании ДАУ первого порядка играет теория регулярных матричных пучков [4, 8, 9]. Для дальнейшего изложения нам потребуются определения и вспомогательные результаты.

Определение 1 [9]. Выражение вида $\lambda A+B$, где λ – скалярный параметр, A и B – матрицы размера $m\times n$, называют *матричным пучком.* Если $m=n$ и $\det(\lambda A+B)\not\equiv 0$, где λ – скаляр, то пучок матриц $\lambda A+B$ называется *регулярным.* В противном случае ($m\neq n$ или $\det(\lambda A+B)=0$ для любого λ) пучок называется *сингулярным.*

Определение 2 [7]. Матричный полином $\lambda A(t)+\mu B(t)+C(t)$, где λ, μ – скалярные параметры, имеет *простую структуру* на отрезке $[0,1]$, если для любого $t\in[0,1]$ выполняются условия:

1) $\operatorname{rank} A(t)=k=\mathrm{const}$;
2) $\operatorname{rank}(A(t)|B(t))=k+l=\mathrm{const}$;
3) $\det(\lambda A(t)+\mu B(t)+C(t))=a_0(t)\lambda^k\mu^l+\ldots,\ a_0(t)\neq 0$.

Лемма 1 [4]. *Если элементы матриц $A(t)$ и $B(t)$ принадлежат классу $C^p_{[0,1]}$ и $\operatorname{rank} A(t)=k=\mathrm{const}$, то существует матрица $P(t)$, элементы которой принадлежат классу $C^p_{[0,1]}$ и $\det P(t)\neq 0$ для любого $t\in[0,1]$, такая, что матричный пучок $P(t)(\lambda A(t)+B(t))$ имеет блочный вид*

$$P(t)(\lambda A(t)+B(t))=\lambda\begin{pmatrix}A_1(t)\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}B_1(t)\\B_2(t)\end{pmatrix},$$

где $A_1(t)$, $B_1(t)$ – $(k\times n)$-матрицы, $B_2(t)$ – $((n-k)\times n)$-матрица, $\operatorname{rank} A_1(t)=k=\mathrm{const}$ *для любого $t\in[0,1]$.*

Лемма 2 [7]. *Если матричный полином* $\lambda A(t)+\mu B(t)+C(t)$ *имеет простую структуру на отрезке* $[0,1]$ *и элементы матриц принадлежат классу* $C^p_{[0,1]}$, *то существуют матрицы* $R(t)$, $Q(t)$ *с элементами из* $C^p_{[0,1]}$ *такие, что*

$$R(t)(\lambda A(t)+\mu B(t)+C(t))=\lambda\begin{pmatrix}A_1(t)\\0\\0\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}B_1(t)\\B_2(t)\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}C_1(t)\\C_2(t)\\C_3(t)\end{pmatrix},$$

где $A_1(t)$, $B_1(t)$, $C_1(t)$ – $(k\times n)$*-матрицы,* $B_2(t)$, $C_2(t)$ – $(l\times n)$*-матрицы,* $C_3(t)$ – $((n-k-l)\times n)$*-матрица,* 0 – *нулевые матрицы соответствующих размеров, и имеет место равенство*

$$R(t)(\lambda A(t)+\mu B(t)+C(t))Q(t)=$$
$$=\lambda\begin{pmatrix}E_k&0&A_{13}(t)\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}B_{11}(t)&0&B_{22}(t)\\0&E_l&0\\0&0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}C_{11}(t)&C_{12}(t)&0\\C_{21}(t)&C_{22}(t)&0\\0&0&E_{n-k-l}\end{pmatrix},$$

здесь $A_{13}(t)$, $B_{11}(t)$, $B_{22}(t)$, $C_{ij}(t)$, $i,j=1,2,$ – *блочные матрицы подходящих размеров, а* E_k, E_l *и* E_{n-k-l} – *единичные матрицы размеров* k, l *и* $n-k-l$ *соответственно.*

Из данных лемм вытекает

Следствие. *Если матричный полином* $\lambda A(t)+\mu B(t)+C(t)$ *имеет простую структуру на отрезке* $[0,1]$ *и матрицы* $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ *имеют блочный вид*

$$A(t)=\begin{pmatrix}A_1(t)\\0\\0\end{pmatrix},\quad B(t)=\begin{pmatrix}B_1(t)\\B_2(t)\\0\end{pmatrix},\quad C(t)=\begin{pmatrix}C_1(t)\\C_2(t)\\C_3(t)\end{pmatrix},$$

где $A_1(t)$, $B_1(t)$, $C_1(t)$ – $(k\times n)$*-матрицы,* $B_2(t)$, $C_2(t)$ – $(l\times n)$*-матрицы,* $C_3(t)$ – $((n-k-l)\times n)$*-матрица, то*

$$\det\begin{pmatrix}A_1(t)\\B_2(t)\\C_3(t)\end{pmatrix}\neq 0$$

для любого $t\in[0,1]$.

Вернёмся к задаче (2), (3). Одним из подходов к исследованию на предмет единственности решения (с учётом того, что начальные условия (3) заданы корректно) и построению численных методов решения является редукция рассматриваемой задачи к системе первого порядка путём введения новой переменной $y(t)=(x'(t)^{\mathrm{т}},x(t)^{\mathrm{т}})^{\mathrm{т}}$. С учётом данного обозначения задачу (2), (3) можно записать в виде ДАУ первого порядка

$$\mathcal{A}(t)y'(t)+\mathcal{B}(t)y(t)=\varphi(t),\quad y(0)=y_0,\quad t\in[0,1], \tag{5}$$

где матрицы $\mathcal{A}(t)$, $\mathcal{B}(t)$ имеют блочный вид

$$\mathcal{A}(t)=\begin{pmatrix}A(t)&B(t)\\0&E\end{pmatrix},\quad \mathcal{B}(t)=\begin{pmatrix}0&C(t)\\-E&0\end{pmatrix},\quad \varphi(t)=(f^{\mathrm{т}}(t),0)^{\mathrm{т}}, \tag{6}$$

а начальные условия – вид $y(0)=(x_0'(t))^{\mathrm{т}}$, $x(t)_0^{\mathrm{т}}=y_0$. Эту задачу исследуют или численно решают методами, разработанными для ДАУ первого порядка (см., например, [4]).

Другой подход – это построение дифференциального оператора степени r такого, что

$$\mathcal{P}_r\circ(A(t)x''(t)+B(t)x'(t)+C(t)x(t))=x''+\tilde{B}(t)x'(t)+\tilde{C}(t)x(t). \tag{7}$$

Такие подходы – запись задачи (2), (3) в виде ДАУ первого порядка с матрицами и правой частью, определёнными по формуле (6), и построение дифференциального оператора (7) –

имеют принципиальный недостаток: индекс ДАУ (5) и r в формуле (7) не всегда являются показателями сложности создания численных методов решения исходной задачи. Приведём достаточно простые иллюстративные примеры, в которых предполагается, что входные данные удовлетворяют тем условиям гладкости, которые необходимы для проведения выкладок.

Пример 1 [1]. Рассмотрим систему

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}'' + \begin{pmatrix} 0 & 1+\alpha \\ 1 & \alpha t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} q(t) \\ g(t) \end{pmatrix}, \tag{8}$$

где $g(t) \in C^2_{[0,1]}$, $q(t) \in C^1_{[0,1]}$, α – скалярный параметр.

Из второго уравнения имеем $u' = g(t) - \alpha t v'$. Подставив это выражение в первое уравнение (8), получим $v = q(t) - g'(t)$.

Достаточно просто можно убедиться в том, что данная система имеет индекс равный двум, а оператор может быть выбран как

$$\mathcal{P}_r = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1-\alpha \end{pmatrix}^{-1} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{d}{dt} \right] \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{d}{dt} \right] =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha t & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \frac{d}{dt} + \begin{pmatrix} 0 & \alpha t \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \left(\frac{d}{dt} \right)^2,$$

здесь $r = 2$.

Хорошо известно [1, 2, 4, 10, 11], что ряд неявных схем, разработанных для ОДУ, в том числе и жёстких, для ДАУ (1) часто порождают неустойчивые процессы или принципиально неприменимые из-за сингулярности матричного пучка $\lambda\mathcal{A} + \mathcal{B}$. То же самое можно сказать и про задачу (2), (3).

Проведём анализ устойчивости простейшей разностной схемы для этого примера. Для упрощения выкладок положим $q(t) = g(t) = 0$. Обозначим $t_j = jh$, $j = \overline{0, N}$, $u_j \approx u(t_j)$, $v_j \approx v(t_j)$ и рассмотрим алгоритм

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha t_{i+1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1} \\ v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1} \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} 0 & 1+\alpha \\ 1 & \alpha t_{i+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{i+1} - u_i \\ v_{i+1} - v_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

полагая, что u_0, u_1, v_0, v_1 заранее заданы. Опуская несложные выкладки, получим, что данная схема будет устойчива только при $|\alpha/(1+\alpha)| < 1$.

Пример 2. ДАУ

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{12}(t) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}'' + \begin{pmatrix} c_{11}(t) & c_{12}(t) \\ 0 & c_{22}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q(t) \\ g(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [0,1], \tag{9}$$

при $c_{22}(t) \neq 0$ для всех $t \in [0,1]$ и $g(t), c_{22}(t) \in C^2_{[0,1]}$ также имеет индекс равный двум.

Оператор $\mathcal{P}_r$ можно взять в виде

$$\mathcal{P}_r = \begin{pmatrix} 1 & a_{12}(t) \\ 0 & c_{22}(t) \end{pmatrix}^{-1} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \left(\frac{d}{dt} \right)^2 \right].$$

Однако в отличие от первого примера простейшая разностная схема

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{12}(t_{i+1}) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1} \\ v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1} \end{pmatrix} + h^2 \begin{pmatrix} c_{11}(t_{i+1}) & c_{12}(t_{i+1}) \\ 0 & c_{22}(t_{i+1}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{i+1} \\ v_{i+1} \end{pmatrix}' = h^2 \begin{pmatrix} q(t_{i+1}) \\ g(t_{i+1}) \end{pmatrix},$$

где $i = \overline{1, N-1}$, сходится к точному решению с первым порядком при определённой гладкости элементов входных данных и $|u_j - u(t_j)| = O(h)$, $|v_j - v(t_j)| = O(h)$, $j = 0, 1$. Элементарные, но громоздкие выкладки показывают, что, записывая системы (8), (9) в виде ДАУ первого порядка с матрицами $\mathcal{A}(t)$, $\mathcal{B}(t)$ и правой частью, определённой по формуле (6), получим задачу индекса два.

Приведём в терминах матричных полиномов достаточные условия существования рассматриваемых задач.

Утверждение 1 [7]. *Пусть для задачи (2), (3) выполнены следующие условия:*

1) матричный полином $\lambda A(t)+\mu B(t)+C(t)$ имеет простую структуру;

2) элементы входных данных обладают достаточной гладкостью (из класса $C^p_{[0,1]}$);

3) начальные условия (3) согласованы с правой частью (2).

Тогда данная задача имеет единственное решение из класса $C^p_{[0,1]}$.

Данное утверждение носит только достаточный характер. Проиллюстрируем это. В примере 1 условия утверждения 1 не выполняются, так как $\operatorname{rank} A(t)=1$, $\operatorname{rank}(A(t)|B(t))=2$. Однако нарушается третье условие определения 1:

$$\det(\lambda A(t)+\mu B(t))=\det\begin{pmatrix}\lambda & \lambda\alpha t+\mu(1+\alpha)\\ \mu & \mu\alpha t\end{pmatrix}=-\mu^2(1+\alpha).$$

В примере 2 при $c_{22}(t)\neq 0$ для любого $t\in[0,1]$ все условия утверждения 1 выполнены: $\operatorname{rank} A(t)=\operatorname{rank}(A(t)|B(t))=1$, $\det(\lambda A(t)+C(t))=\lambda c_{22}(t)+c_{11}c_{22}(t)$.

Приведём ещё один пример.

Пример 3. Рассмотрим ДАУ

$$\begin{pmatrix}a_{11} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}''+\begin{pmatrix}0 & b_{12}\\ b_{21} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}'+\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & c_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

с условиями $u(0)=v(0)=u'(0)=v'(0)=0$. При $a_{11}\neq 0$, $b_{12}\neq 0$, $b_{21}\neq 0$, $c_{22}\neq 0$ и $a_{11}c_{22}=b_{12}b_{21}$ эта задача имеет множество решений $x=(u,v)=(\varphi(t),-b_{221}/c_{22}\varphi'(t))^{\mathrm{т}}$, где $\varphi(t)$ – функция из $C^3_{[0,1]}$, удовлетворяющая условиями $\varphi(0)=\varphi'(0)=\varphi''(0)=0$.

В данном примере матричный полином $\lambda A+\mu B+C$ не имеет простой структуры, так как $\operatorname{rank} A(t)=1$, $\operatorname{rank}(A|B)=2$,

$$\det(\lambda A+\mu B+C)=\det\begin{pmatrix}\lambda a_{11} & \mu b_{12}\\ \mu b_{21} & c_{22}\end{pmatrix}=\lambda a_{11}c_{22}-\mu^2 b_{12}b_{21}.$$

Приведём условия согласования начальных условий и построения оператора $\mathcal{P}_2$. Для этого нам потребуется следующее

Определение 3 (см., например, [3]). Матрица $A^+(t)$ называется *псевдообратной* к матрице $A(t)$, если она удовлетворяет уравнениям:

1) $A(t)A^+(t)A(t)=A(t)$;
2) $A^+(t)A(t)A^+(t)=A^+(t)$;
3) $(A^+(t)A(t))^{\mathrm{т}}=A^+(t)A(t)$;
4) $(A(t)A^+(t))^{\mathrm{т}}=A(t)A^+(t)$.

Матрица $A^+(t)$ определена единственным образом для любой матрицы $A(t)$, её элементы непрерывны, если $\operatorname{rank} A(t)=\mathrm{const}$ при любом t и $A^+(t)=A^{-1}(t)$; если $\det A(t)\neq 0$ для всех t (см., например, [3, 4]), то

$$V(t)A(t)\equiv 0, \tag{10}$$

где $V(t)=E-A^+(t)A(t)$.

Продифференцируем (2) и умножим полученную систему на матрицу $V(t)$. В силу (10) получим систему второго порядка вида

$$V(t)((A'(t)+B(t))x''(t)+(B'(t)+C(t))x'(t)+C'(t)x(t))=V(t)f'(t).$$

Итогом суммирования данной системы с (2) является система

$$A^1(t)x''(t)+B^1(t)x'(t)+C^1(t)x(t)=f^1(t),\quad t\in[0,1], \tag{11}$$

где матрицы $A^1(t)$, $B^1(t)$, $C^1(t)$ и вектор-функция $f^1(t)$ определены по формулам

$$A^1(t) = A(t) + V(t)(A'(t) + B(t)), \tag{12}$$

$$B^1(t) = B(t) + V(t)(B'(t) + C(t)), \tag{13}$$

$$C^1(t) = C(t) + V(t)C'(t), \tag{14}$$

$$f^1(t) = f(t) + V(t)f'(t). \tag{15}$$

Аналогичным образом поступим с системой (11): продифференцируем её и умножим на матрицу $V^1(t) = E - A^{1+}(t)A^1(t)$. Суммируя полученную систему и систему (11), имеем

$$A^2(t)x''(t) + B^2(t)x'(t) + C^2(t)x(t) = f^2(t), \quad t \in [0,1],$$

где

$$A^2(t) = A^1(t) + V^1(t)(A^{1'}(t) + B^1(t)), \quad B^2(t) = B^1(t) + V^1(t)(B^{1'}(t) + C^1(t)),$$
$$C^2(t) = C^1(t) + V^1(t)C^{1'}(t), \quad f^2(t) = f^1(t) + V^1(t)f^{1'}(t).$$

Если матричный полином $\lambda A(t) + \mu B(t) + C(t)$ имеет простую структуру, то, используя технику блочного представления матриц $A(t)$, $A^1(t)$, $B(t)$, $B^1(t)$, $C(t)$, $C^1(t)$ и $V(t)$, $V^1(t)$ (см., например, [12]), лемму 2 и следствие, можно показать, что $\det A^2(t) \neq 0$ при любом $t \in$ $\in [0,1]$.

Итак, оператор $\mathcal{P}_2$ для системы (3) можно выбрать в виде

$$\mathcal{P}_2 = (A^2(t))^{-1}\left(E - A^{1+}(t)A^{1+}\frac{d}{dt}\right)(E - A^+(t)A(t)).$$

В этом случае

$$\mathcal{P}_r \circ (A(t)x''(t) + B(t)x'(t) + C(t)x(t)) =$$
$$= x''(t) + (A^2(t))^{-1}B^2(t)x(t) + (A^2(t))^{-1}C^2(t)x(t) = (A^2(t))^{-1}f^2(t). \tag{16}$$

Отметим, что, используя технику проекторов [2] и операцию дифференцирования, можно указать другой вид оператора $\mathcal{P}_2$. Приведём условия согласования начальных условий (3) для ДАУ (2).

Утверждение 2. *Если для задачи (2), (3) выполнены условия 1) и 2) утверждения 1 и условия согласования начальных данных:*

1) $\operatorname{rank} A(0) = \operatorname{rank}(A(0)|B(0)x_0' + C(0)x_0 - f(0))$;

2) $\operatorname{rank} A^1(0) = \operatorname{rank}(A^1(0)|B^1(0)x_0' + C^1(0)x_0 - f^1(0))$,

где $A^1(0)$, $B^1(0)$, $C^1(0)$, $f^1(0)$ *определены по формулам (12)–(15), то задача (2), (3) имеет единственное решение.*

Доказательство. Подставляя в (2) и в (11) значение $t = 0$, будем соответственно иметь системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$A(0)x''(t)|_{t=0} + B(0)x_0' + C(0)x_0 = f(0)$$

и

$$A^1(0)x''(t)|_{t=0} + B^1(0)x_0' + C^1(0)x_0 = f^1(0).$$

Условия согласования начальных данных вытекают из условий 1) и 2) утверждения 1 и теоремы Кронекера–Капелли. В силу утверждения 2 система (2) эквивалентна (16), которая с условием (3) имеет единственное решение. Утверждение доказано.

Для иллюстрации данного утверждения вернёмся к примеру 2 (формула (9)), для упрощения положив $c_{22}(t) = 1$. В этом случае компоненты $v(t)$ должны удовлетворять условиям

$$v(0) = g(0), \tag{17}$$

$$v'(t)|_{t=0} = g'(t)|_{t=0}. \tag{18}$$

Из условия 1) утверждения 2 вытекает, что $v(0) = g(0)$ (т.е. справедлива формула (17)). Опуская элементарные выкладки, можно показать, что система (11) имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{12}(t) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}'' + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}' + \begin{pmatrix} c_{11}(t) & c_{12}(t) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q(t) \\ g(t) + g'(t) \end{pmatrix}.$$

Из условия 2) утверждения 2 вытекает (так как $\operatorname{rank} A^1 = 1$ для любого t), что

$$\operatorname{rank}\,(A^1(0)|B^1(0)x_0' + C^1(0)x_0 - f^1(0))$$

должен быть равным единице, т.е.

$$\operatorname{rank}\left[\begin{pmatrix} 1 & a_{12}(0) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}'\Bigg|_{t=0} + \begin{pmatrix} c_{11}(0) & c_{12}(0) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(0) \\ v(0) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} q \\ g + g' \end{pmatrix}\Bigg|_{t=0}\right] = 1.$$

Это возможно только при

$$v'(t)|_{t=0} - v(0) - g(0) - g'(t)|_{t=0} = 0,$$

а так как $v(0) = g(0)$ (формула (17)), то и $v'(t) = g'(t)|_{t=0}$ (т.е. формула (18) справедлива).

Следующий пункт посвящён многошаговым методам решения задачи (2), (3).

2. Разностные схемы. Анализ примера 2 показывает, что известные разностные схемы могут быть использованы для численного решения некоторых классов ДАУ второго порядка. Зададим на отрезке интегрирования равномерную сетку $t_j = jh$, $j = \overline{0, N}$, $h = 1/h$ и обозначим

$$A_j = A(t_j), \quad B_j = B(t_j), \quad C_j = C(t_j), \quad f_j = f(t_j), \quad x_j \approx x(t_j).$$

С учётом данных обозначений линейные многошаговые (m-шаговые) методы для задачи (2), (3) имеют вид

$$\bar{A}_{i+1}\frac{1}{h^2}\sum_{j=0}^{m}\rho_j x_{i+1-j} + \bar{B}_{i+1}\sum_{j=0}^{m}\sigma_j x_{i+1-j} + \bar{C}_{i+1}\sum_{j=0}^{m}\gamma_j x_{i+1-j} = \bar{f}_{i+1}, \quad i = \overline{m-1, N-1}. \quad (19)$$

Здесь $\bar{A}_{i+1} = A(t_i^*)$, $\bar{B}_{i+1} = B(t_i^*)$, $\bar{C}_{i+1} = C(t_i^*)$, $f_{i+1}^* = f(t_i^*)$, $t_i^* \in [t_{i+1-m}, t_{i+1}]$ и

$$\frac{1}{h^2}\sum_{j=0}^{m}\rho_j x_{i+1-j} \approx x''(t)|_{t=t_i^*}, \quad \frac{1}{h}\sum_{j=0}^{m}\sigma_j x_{i+1-j} \approx x'(t)|_{t=t_i^*}, \quad \sum_{j=0}^{m}\gamma_j x_{i+1-j} \approx x(t)|_{t=t_i^*}.$$

Коэффициенты ρ_j, σ_j, γ_j и способы вычисления $\bar{A}_{i+1}$, $\bar{B}_{i+1}$, $\bar{C}_{i+1}$, $\bar{f}_{i+1}$ зависят от выбора точки t_i^*. Стандартно предполагается, что при реализации схем (19) заданы или заранее вычислены стартовые значения x_0, x_1, $\ldots$, x_{m-1}.

Схемы (19) можно разделить на классы:

1) неявные схемы $(\rho_0 \neq 0,\ \sigma_0 \neq 0,\ \gamma_0 \neq 0)$;

2) явные схемы $(\rho_0 \neq 0,\ \sigma_0 = \gamma_0 = 0)$;

3) явно-неявные схемы $(\rho_0 \neq 0,\ \sigma_0 \neq 0,\ \gamma_0 = 0$ или $\rho_0 \neq 0,\ \sigma_0 = 0,\ \gamma_0 \neq 0)$.

При реализации схем (19) для задачи (2), (3) на каждом шаге интегрирования требуется решать СЛАУ вида

$$(\rho_0\bar{A}_{i+1} + h\sigma_0\bar{B}_{i+1} + h^2\gamma_0\bar{C}_{i+1})x_{i+1} = \sum_{j=1}^{m}(\rho_j\bar{A}_{i+1} + h\sigma_j\bar{B}_{i+1} + h^2\gamma_j\bar{C}_{i+1})x_{i+1-j} + h^2\bar{f}_{i+1}. \quad (20)$$

В силу того, что $\det A(t) \equiv 0$, явные методы (20) для задачи (2), (3) принципиально неприменимы. Реализация явно-неявных схем приводит к необходимости решать СЛАУ с матрицей перед $\rho_0\bar{A}_{i+1}+h\sigma_0\bar{B}_{i+1}$ или $\rho_0\bar{A}_{i+1}+h\gamma_j\bar{C}_{i+1}$. Эти матрицы также могут быть тождественно вырожденными. Приведём пример $A(t) = \operatorname{diag}\{a_{11}(t),0,0\}$, $B(t) = \operatorname{diag}\{0,b_{22}(t),0\}$, $C(t) = \operatorname{diag}\{0,0,c_{33}(t)\}$, где $a_{11}(t)$, $b_{22}(t)$, $c_{33}(t) \neq 0$ для любого t. Поэтому остановимся на неявных схемах.

Приведём хорошо известные факты (см., например, [13]) из теории разностных схем для линейных ОДУ второго и первого порядков вида

$$x''(t)+B(t)x'(t)+C(t)x(t)=f(t), \quad x(0)=x_0, \quad x'(t)|_{t=0}=x'_0, \quad t\in[0,1], \tag{21}$$

$$x'(t)+C(t)x(t)=f(t), \quad x(0)=x_0, \quad t\in[0,1]. \tag{22}$$

Эти схемы для задач (21) и (22) имеют вид

$$\sum_{j=0}^{m}\rho_j x_{i+1-j}+h\bar{B}_{i+1}\sum_{j=0}^{m}\sigma_j x_{i+1-j}+h^2\bar{C}_{i+1}\sum_{j=0}^{m}\gamma_j x_{i+1-j}=h^2\bar{f}_{i+1}, \tag{23}$$

$$\sum_{j=0}^{m}\sigma_j x_{i+1-j}+h\bar{C}_{i+1}\sum_{j=0}^{m}\gamma_j x_{i+1-j}=h\bar{f}_{i+1} \tag{24}$$

соответственно.

В предположении, что элементы входных данных задач (21) и (22) достаточно гладкие, схемы (23) и (24) аппроксимируют соответствующие задачи с порядком $O(h^q)$, начальные значения $\|x_j-x(t_j)\|=O(h^q)$, $j=\overline{0,m-1}$, и схемы устойчивы, тогда они сходятся к точному решению и справедливы оценки $\|x_i-x(t_i)\|=O(h^q)$, $i=\overline{m,N}$.

Для устойчивости разностных схем (23) и (24) для задач (21) и (22) соответственно, как правило, рассматривают характеристические полиномы

$$\sum_{j=0}^{m}\rho_j p^{m-j}=0, \tag{25}$$

$$\sum_{j=0}^{m}\sigma_j p^{m-j}=0, \tag{26}$$

где p – скаляр.

Следуя общепринятой терминологии [14], будем называть схемы *ρ-устойчивыми*, если характеристическое уравнение (25) имеет два кратных корня $p_1=p_2=1$, а остальные корни p_3, p_4, ..., p_m лежат в единичном круге, и на границе круга нет кратных корней; *σ-устойчивыми*, если характеристическое уравнение (26) имеет корень $p_1=1$, а остальные корни p_2, p_3, ..., p_m лежат в единичном круге, и на границе круга нет кратных корней. В силу того, что рассматриваемая задача может включать в себя и алгебраические уравнения (см. пример 3), потребуем, чтобы корни характеристического полинома

$$\sum_{j=0}^{m}\gamma_j p^{m-j}=0$$

лежали в единичном круге, на границе круга не было кратных корней и не было корня, равного единице. Это условие по аналогии будем называть *γ-устойчивостью.* Анализ устойчивости и скорости сходимости многошаговых методов для ДАУ первого порядка (1) проведён в работах [1, 2, 11, 14]. Если в исходной системе положим $A(t)\equiv 0$, то получим задачу (1), и приведённые выше определения устойчивости схем совпадают с классическими.

Относительно сходимости схем (19) справедливо

Утверждение 3. *Пусть для задачи (2), (3) выполнены условия:*

1) элементы $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$, $f(t)$ принадлежат классу $C^q_{[0,1]}$;

2) начальные значения $x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_{m-1}$ *удовлетворяют оценке* $\|x_j - x(t_j)\| = O(h^q)$, $j = \overline{0, m-1}$;

3) схема (19) аппроксимирует задачу (2), (3) с порядком q;

4) матричный полином $\lambda A(t) + \mu B(t) + C(t)$ *имеет простую структуру;*

5) схема (19) ρ-, σ- *и* γ-*устойчива;*

6) матрица $Q(t) = Q$ *в лемме 2 постоянная.*

Тогда справедлива оценка $\|x_j - x(t_j)\| = O(h^q)$.

Доказательство. Умножим каждое из соотношений (19) на матрицу $\bar{R}_{i+1} = R(t_i^*)$ и произведём замену переменной $x_i = Qy_i$, $i = \overline{0, N}$, где матрицы $R(t)$, $Q(t)$ те же, что и в лемме 2.

В силу условия 6) утверждения 3 и леммы 2 имеем блочные рекуррентные соотношения

$$\frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} E_k & 0 & A_{13}(t_i^*) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sum_{j=0}^m \rho_j \begin{pmatrix} y^1_{i+1-j} \\ y^2_{i+1-j} \\ y^3_{i+1-j} \end{pmatrix} + \frac{1}{h}\begin{pmatrix} B_{11}(t_i^*) & 0 & B_{22}(t_i^*) \\ 0 & E_l & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sum_{j=0}^m \sigma_j \begin{pmatrix} y^1_{i+1-j} \\ y^2_{i+1-j} \\ y^3_{i+1-j} \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} C_{11}(t_i^*) & C_{12}(t_i^*) & 0 \\ C_{21}(t_i^*) & C_{22}(t_i^*) & 0 \\ 0 & 0 & E_{n-k-l} \end{pmatrix} \sum_{j=0}^m \gamma_j \begin{pmatrix} y^1_{i+1-j} \\ y^2_{i+1-j} \\ y^3_{i+1-j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi^1(t_i^*) \\ \varphi^2(t_i^*) \\ \varphi^3(t_i^*) \end{pmatrix}, \tag{27}$$

где

$$\begin{pmatrix} y^1_{i+1-j} \\ y^2_{i+1-j} \\ y^3_{i+1-j} \end{pmatrix} = Q^{-1}x_{i+1-j}, \qquad \begin{pmatrix} \varphi^1(t_i^*) \\ \varphi^2(t_i^*) \\ \varphi^3(t_i^*) \end{pmatrix} = R(t_i^*)f(t_i^*).$$

В силу γ-устойчивости разностных схем, условий 2) и 3) утверждения 3 получим

$$\|y_i^3 - y^3(t_i)\| = O(h^q). \tag{28}$$

Для первой и второй компонент блочной системы (27) будем иметь равенства

$$\sum_{j=0}^m (\rho_j E_k + \sigma_j h B_{11}(t_i^*) + \gamma_j h^2 C_{11}(t_i^*)) y^1_{i+1-j} + \sum_{j=0}^m \gamma_j C_{12}(t_i^*) y^2_{i+1-j} =$$

$$= h^2 \varphi^1_{i+1}(t_i^*) - \sum_{j=0}^m (\rho_j A_{13}(t_i^*) + \sigma_j B_{22}(t_i^*)) y^3_{i+1-j},$$

$$\sum_{j=0}^m (\sigma_j + h\gamma_j C_{22}(t_i)) y^2_{i+1-j} + \sum_{j=0}^m h\gamma_j C_{21}(t_i^*) y^1_{i+1-j} = \varphi^2_{i+1}(t_i^*).$$

Из условий ρ- и σ-устойчивости схем, аппроксимации задачи и результатов о сходимости схем для ОДУ первого и второго порядков [13, 14] следует, что

$$\|y_i^2 - y^2(t_i)\| = O(h^q), \quad \|y_i^1 - y^1(t_i)\| = O(h^q). \tag{29}$$

Вспоминая, что $x(t) = Qy(t)$, и учитывая оценки (28), (29), будем иметь $\|x_i - x(t_i)\| = O(h^q)$, $i = \overline{m, N}$. Утверждение доказано.

Отметим, что условие 6) утверждения 3 для схем вида (19) пока не удалось обойти. Предварительный анализ показывает, что его можно смягчить.

Для иллюстрации приведём двухшаговый метод первого порядка

$$A_{i+1}(x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}) + hB_{i+1}(x_{i+1} - x_i) + h^2 C_{i+1}x_{i+1} = h^2 f_{i+1} \tag{30}$$

и трёхшаговый метод второго порядка

$$A_{i+1}(2x_{i+1} - 5x_i + 4x_{i-1} - x_{i-2}) + \frac{h}{6}B_{i+1}(11x_{i+1} - 18x_i + 9x_{i-1} - 2x_{i-2}) + h^2 C_{i+1}x_{i+1} = h^2 f_{i+1}. \tag{31}$$

В следующем пункте будут приведены некоторые расчёты для данных алгоритмов.

3. Численные расчёты. Проведём расчёты модельных примеров по схемам (30), (31). В качестве стартовых точек взяты точные значения $x(h)$ и $x(2h)$ соответственно.

Пример 4. Рассмотрим ДАУ

$$\begin{pmatrix}\exp(t) & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}'' + \begin{pmatrix}2\alpha\exp(t) & 0 & 0\\ 2\alpha & \exp(-t) & 0\\ 2\alpha & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}' +$$

$$+\begin{pmatrix}(\alpha^2+\beta^2)\exp(t) & 0 & 0\\ (\alpha^2+\beta^2) & 3\gamma\exp(-t) & 0\\ (\alpha^2+\beta^2) & \gamma & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ \sin t\end{pmatrix}$$

с начальными условиями $x(0)=(0,1,0)$, $x'(t)|_{t=0}=(\beta,-\gamma,1)^{\mathrm{т}}$. Точное решение имеет вид

$$x(t)=(\exp(-\alpha t)\sin(\beta t), \exp(-\gamma t), \sin t)^{\mathrm{т}}.$$

Непосредственный проверкой можно убедиться что данный пример удовлетворяет условиям утверждения 1. Варьируя параметры α, β, γ, будем иметь жёсткую систему ОДУ первого порядка для второй компоненты, жёсткую и быстро осциллирующую систему ОДУ второго порядка для первой компоненты, и алгебраическую связь для третьей компоненты.

Результаты расчётов представлены в табл. 1, 2 при параметрах $\alpha=20$, $\beta=5$, $\gamma=30$. Погрешности приведены для каждой компоненты в точке $t=1$.

Таблица 1. Результаты применения метода (30) для примера 4

h	err_1	err_2	err_3
0.05	$7.4\cdot10^{-7}$	$6.1\cdot10^{-9}$	$1.1\cdot10^{-16}$
0.025	$1.8\cdot10^{-8}$	$1.6\cdot10^{-10}$	$1.1\cdot10^{-16}$

Таблица 2. Результаты применения метода (31) для примера 4

h	err_1	err_2	err_3
0.05	$4.6\cdot10^{-5}$	$3.5\cdot10^{-7}$	$1.1\cdot10^{-16}$
0.025	$7.5\cdot10^{-8}$	$4.7\cdot10^{-12}$	$1.1\cdot10^{-16}$

При увеличении жёсткости или жёсткости и осцилляции, т.е. при увеличении параметров α, β и γ, предложенные алгоритмы также неплохо работают.

Отметим, что предложенные схемы можно применять и для численного решения более широкого класса задач.

Пример 5. Точное решение $x(t)$ задачи

$$\begin{pmatrix}\exp(t) & 0 & 0\\ 2 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}'' + \begin{pmatrix}2\exp(t) & 1 & 0\\ 4 & \exp(-t) & 0\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}' +$$

$$+\begin{pmatrix}0 & 3 & \exp(t)\\ 0 & 3\exp(-t) & 1\\ 0 & 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\exp(t)\sin t\\ \sin t\\ \sin t\end{pmatrix}$$

с начальными условиями $x(0)=(1,1,0)$, $x'(t)|_{t=0}=(-2,-3,1)^{\mathrm{т}}$ определяется по формуле

$$x(t)=(\exp(-2t), \exp(-3t), \sin t)^{\mathrm{т}}.$$

С помощью элементарных преобразований получим систему, эквивалентную данной:

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}'' + \begin{pmatrix}2 & \exp(-t) & 0\\ 0 & \exp(-t) & 0\\ 0 & 1-\exp(-t) & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}' + \begin{pmatrix}0 & 3\exp(-t) & 1\\ 0 & -3\exp(-t) & -1\\ 0 & 3-\exp(-t) & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sin t\\ -\sin t\\ 0\end{pmatrix}.$$

Последняя ДАУ при $t=0$ не удовлетворяет условиям утверждения 1, так как нарушено условие 3) определения 2. Численные расчёты этого примера представлены в табл. 3 и 4 для методов (30), (31). Здесь, также как и в предыдущем примере, погрешности для каждой компоненты приведены при $t = 1$.

Таблица 3. Результаты применения метода (30) для примера 5

h	err_1	err_2	err_3
0.05	0.027	0.01	$1.7 \cdot 10^{-14}$
0.025	0.014	0.0055	$2.8 \cdot 10^{-13}$

Таблица 4. Результаты применения метода (31) для примера 5

h	err_1	err_2	err_3
0.05	0.0043	0.00013	$4.8 \cdot 10^{-14}$
0.025	0.0012	$1.6 \cdot 10^{-5}$	$6.7 \cdot 10^{-13}$

Заключение. В статье выделены классы ДАУ второго порядка (начальная задача), которые имеют единственное решение в классе достаточно гладких функций. Для численного решения таких задач предложено построение многошаговых методов. Приведены конкретные двухшаговый и трёхшаговый методы первого и второго порядков соответственно. Их работоспособность продемонстрирована на расчётах модельных примеров.

Работа выполнена в рамках базового проекта “Теория и методы исследования эволюционных уравнений и управляемых систем с их приложениями” (проект 121041300060-4).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Brenan K.F., Campbell S.L., Petzold L.R.* Numerical Solution of Initial-Value Problems in Differential-Algebraic Equations. Philadelphia, 1996.
2. *Lamour R., März R., Tischendorf C.* Differential-Algebraic Equations: a Projector Based Analysis. Berlin; Heidelberg, 2013.
3. *Бояринцев Ю.Е.* Регулярные и сингулярные системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Новосибирск, 1980.
4. *Чистяков В.Ф.* Алгебро-дифференциальные операторы с конечномерным ядром. Новосибирск, 1996.
5. *Sand J.* On implicit Euler and related methods for high-order high-index DAEes // Appl. Numer. Math. 2002. № 42. P. 411–424.
6. *Mehrmann V., Shi C.* Transformation of high order linear differential-algebraic systems to first order // Numer. Algorithms. 2006. № 42. P. 281–307.
7. *Булатов М.В., Минг-Гонг Ли.* Применение матричных полиномов к исследованию линейных дифференциально-алгебраических уравнений высокого порядка // Дифференц. уравнения. 2008. Т. 44. № 10. С. 1299–1306.
8. *Бояринцев Ю.Е., Орлова И.В.* Пучки матриц и алгебро-дифференциальные системы. Новосибирск, 2006.
9. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М., 1986.
10. *Данилов В.А., Чистяков В.Ф.* О препятствиях на пути построения эффективных численных методов решения алгебро-дифференциальных систем. Иркутск, 1990 (Препринт / ИрВЦ СО АН СССР; № 5).
11. *Kunkel P., Mehrmann V.* Differential-Algebraic Equations: Analysis and Numerical Solution. Zürich, 2006.
12. *Булатов М.В.* О преобразовании алгебро-дифференциальных систем уравнений // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1994. Т. 34. № 3. С. 360–372.
13. *Бахвалов Н.С.* Численные методы (анализ, алгебра, обыкновенные дифференциальные уравнения). М., 1975.
14. *Хайрер Э., Ваннер Г.* Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жёсткие и дифференциально-алгебраические задачи. М., 1999.

Институт динамики систем и теории управления
имени В.М. Матросова СО РАН, г. Иркутск

Поступила в редакцию 19.08.2020 г.
После доработки 11.02.2023 г.
Принята к публикации 14.02.2023 г.