

УДК 517.977.5

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ РЕАКЦИИ–ДИФФУЗИИ–КОНВЕКЦИИ

© 2023 г. Р. В. Бризицкий, П. А. Максимов

Исследованы задачи мультипликативного управления для модели реакции–диффузии–конвекции с нелинейно зависящими от решения, а также зависящими от пространственных переменных коэффициентами. В случае степенной зависимости коэффициентов модели от решения для экстремальных задач выведены системы оптимальности. С их помощью получены оценки локальной устойчивости решений конкретных задач управления относительно малых возмущений как функционалов качества, так и одной из заданных функций краевой задачи.

DOI: 10.31857/S0374064123030123, EDN: QVRFAN

1. Введение. Постановка и разрешимость краевой задачи. В последние годы возрастает интерес к исследованию краевых задач и задач управления для моделей тепломассопереноса (см. [1–15]). При этом приложения экстремальных задач не ограничиваются поиском эффективных механизмов управления физическими полями в сплошных средах. В рамках оптимизационного подхода к задачам управления сводятся задачи восстановления неизвестных функций в уравнениях и граничных условиях рассматриваемых моделей по дополнительной информации о решении краевой задачи. В свою очередь, задачи восстановления неизвестных коэффициентов модели сводятся к задачам мультипликативного управления (см. [10, 11, 16–18]).

В данной статье исследуется двухпараметрическая задача мультипликативного управления для нелинейного уравнения реакции–диффузии–конвекции, рассматриваемого в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$:

$$-\operatorname{div}(\lambda(\mathbf{x})\nabla\varphi) + \mathbf{u} \cdot \nabla\varphi + k(\varphi, \mathbf{x})\varphi = f. \quad (1)$$

Предполагается, что граница Γ области Ω состоит из двух частей – Γ_D и Γ_N , и уравнение (1) рассматривается при смешанных краевых условиях

$$\varphi = \psi \text{ на } \Gamma_D, \quad \lambda(\mathbf{x})(\partial\varphi/\partial n + \alpha(\varphi, \mathbf{x})\varphi) = \chi \text{ на } \Gamma_N. \quad (2)$$

Здесь функция φ имеет смысл концентрации загрязняющего вещества, \mathbf{u} – заданный вектор скорости, f – объёмная плотность внешних источников вещества, $\lambda(\mathbf{x})$ – коэффициент диффузии, $k(\varphi, \mathbf{x})$ – коэффициент реакции, $\alpha(\varphi, \mathbf{x})$ – коэффициент массообмена, функция χ имеет смысл плотности граничных источников. Ниже на задачу (1), (2) при заданных функциях λ , k , f , α , χ и ψ будем ссылаться как на задачу 1.

В работе [15] доказана глобальная разрешимость задачи 1 и нелокальная единственность её решения в случае, когда нелинейности $k(\varphi, \cdot)\varphi$ и $\alpha(\varphi, \cdot)\varphi$ являются монотонными, а также установлен принцип максимума и минимума для концентрации φ .

Для задачи 1 исследованы задачи мультипликативного управления. В частности, установлено свойство релейности (или справедливость принципа минимакса) для решения одной из рассматриваемых задач управления. Данное свойство означает, что оптимальное управление в зависимости от $\mathbf{x} \in \Omega$ может принимать только два значения, как правило, это верхняя и нижняя границы множества управлений. Тем самым в зависимости от $\mathbf{x} \in \Omega$ происходит скачок управления из одного состояния в другое (принцип минимакса) или его переключение между двумя состояниями (релейность) (см. [6–8] и [15]).

В настоящей работе для двухпараметрической задачи мультипликативного управления, в случае когда коэффициенты $k(\varphi, \cdot)$ и $\alpha(\varphi, \cdot)$ имеют определённый вид, выводятся системы

оптимальности. На основе анализа данных систем получены оценки локальной устойчивости оптимальных решений относительно малых возмущений как функционалов качества, так и заданной функции f .

При анализе рассматриваемых задач будем использовать функциональные пространства Соболева $H^s(D)$, $s \in \mathbb{R}$. Здесь D обозначает либо область Ω , либо некоторую подобласть $Q \subset \Omega$, либо часть Γ_D границы Γ . Через $\|\cdot\|_{s,Q}$, $|\cdot|_{s,Q}$ и $(\cdot, \cdot)_{s,Q}$ будем обозначать норму, полунорму и скалярное произведение в $H^s(Q)$. Нормы и скалярные произведения в $L^2(Q)$, $L^2(\Omega)$ или в $L^2(\Gamma_N)$ будем обозначать соответственно через $\|\cdot\|_Q$ и $(\cdot, \cdot)_Q$, $\|\cdot\|_\Omega$ и $(\cdot, \cdot)_\Omega$ или $\|\cdot\|_{\Gamma_N}$ и $(\cdot, \cdot)_{\Gamma_N}$. Пусть $L_+^p(D) = \{k \in L^p(D) : k \geq 0 \text{ в } D\}$, $p \geq 3/2$, $H_+^s(D) = \{h \in H^s(D) : h \geq 0 \text{ в } D\}$, $s \geq 0$, $Z = \{\mathbf{v} \in L^4(\Omega)^3 : \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \text{ в } \Omega, \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_N} = 0\}$, $H_{\lambda_0}^s(\Omega) = \{h \in H^s(\Omega) : h \geq \lambda_0 > 0 \text{ в } \Omega\}$, $s > 3/2$, $\mathcal{T} = \{\varphi \in H^1(\Omega) : \varphi|_{\Gamma_D} = 0\}$.

Предположим, что выполняются следующие условия:

(i) Ω – ограниченная область в \mathbb{R}^3 с границей $\Gamma \in C^{0,1}$, состоящей из замыканий двух непересекающихся открытых участков Γ_D и Γ_N ($\Gamma = \overline{\Gamma_D} \cup \overline{\Gamma_N}$, $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$), при этом поверхностная мера $\operatorname{meas} \Gamma_D > 0$ и граница $\partial\Gamma_D$ участка Γ_D состоит из конечного числа липшицевых кривых или является n -угольником;

(ii) $\lambda \in H_{\lambda_0}^s(\Omega)$, $s > 3/2$, $\mathbf{u} \in Z$, $f \in L^2(\Omega)$, $\psi \in H^{1/2}(\Gamma_D)$, $\chi \in L^2(\Gamma_N)$;

(iii) для любой функции $v \in H^1(\Omega)$ справедливо вложение $k(v, \cdot) \in L_+^p(\Omega)$ для некоторого $p \geq 3/2$, не зависящего от v , и на любом шаре $B_r = \{v \in H^1(\Omega) : \|v\|_{1,\Omega} \leq r\}$ радиуса r выполняется неравенство

$$\|k(v_1, \cdot) - k(v_2, \cdot)\|_{L^p(\Omega)} \leq L_1 \|v_1 - v_2\|_{L^4(\Omega)} \quad \text{для любых } v_1, v_2 \in B_r,$$

здесь константа L_1 зависит от r , но не зависит от $v_1, v_2 \in B_r$;

(iv) для любой функции $w \in H^1(\Omega)$ справедливо вложение $\alpha(w, \cdot) \in L_+^q(\Gamma_N)$ для некоторого $q \geq 2$, не зависящего от w , и на любом шаре $S_a = \{w \in H^1(\Omega) : \|w\|_{1,\Omega} \leq a\}$ радиуса a справедливо неравенство

$$\|\alpha(w_1, \cdot) - \alpha(w_2, \cdot)\|_{L^q(\Gamma_N)} \leq L_2 \|w_1 - w_2\|_{L^2(\Gamma_N)} \quad \text{для любых } w_1, w_2 \in S_a,$$

здесь константа L_2 зависит от a , но не зависит от $w_1, w_2 \in S_a$.

Будем предполагать, что нелинейности $k(\varphi, \cdot)\varphi$ и $\alpha(\varphi, \cdot)\varphi$ являются монотонными в следующем смысле:

(v) $(k(\varphi_1, \cdot)\varphi_1 - k(\varphi_2, \cdot)\varphi_2, \varphi_1 - \varphi_2) \geq 0$ для всех $\varphi_1, \varphi_2 \in H^1(\Omega)$;

(vi) $(\alpha(\varphi_1, \cdot)\varphi_1 - \alpha(\varphi_2, \cdot)\varphi_2, \varphi_1 - \varphi_2)_{\Gamma_N} \geq 0$ для всех $\varphi_1, \varphi_2 \in H^1(\Omega)$.

Пусть также функции $k(\varphi, \cdot)$ и $\alpha(\varphi, \cdot)$ ограничены в том смысле, что существуют положительные константы A_1, B_1 , зависящие от k , и A_2, B_2 , зависящие от α , такие, что

(vii) $\|k(\varphi, \cdot)\|_{L^p(\Omega)} \leq A_1 \|\varphi\|_{1,\Omega}^r + B_1$ для всех $\varphi \in H^1(\Omega)$ при $p \geq 3/2$, $r \geq 0$;

(viii) $\|\alpha(\varphi, \cdot)\|_{L^q(\Gamma_N)} \leq A_2 \|\varphi\|_{1,\Omega}^l + B_2$ для всех $\varphi \in H^1(\Omega)$ при $q \geq 2$, $l \geq 0$.

Отметим, что условия (iii), (v) и (vii) описывают оператор, действующий из $H^1(\Omega)$ в $L^p(\Omega)$, $p \geq 3/2$, позволяющий учитывать достаточно произвольную зависимость коэффициента реакции как от концентрации φ , так и от пространственной переменной \mathbf{x} . Например, $k = \varphi^2$ (или $k = \varphi^2 |\varphi|$) в подобласти $Q \subset \Omega$ и $k = k_0(\mathbf{x}) \in L_+^{3/2}(\Omega \setminus \overline{Q})$ в $\Omega \setminus \overline{Q}$.

В свою очередь, условия (iv), (vi) и (viii) задают оператор, действующий из $H^1(\Omega)$ в $L^q(\Gamma_N)$, $q \geq 2$, который позволяет учитывать зависимость коэффициента α от φ и \mathbf{x} . Например, $\alpha = |\varphi|$ на $\Gamma_0 \subset \Gamma_N$ и $\alpha = \alpha_0(\mathbf{x}) \in L_+^2(\Gamma_N \setminus \overline{\Gamma_0})$ в $\Gamma_N \setminus \overline{\Gamma_0}$.

Напомним также, что в силу теоремы вложения Соболева пространство $H^1(\Omega)$ вкладывается в пространство $L^s(\Omega)$ непрерывно при $s \leq 6$ и компактно при $s < 6$, и при некоторой константе C_s , зависящей от s и Ω , справедлива оценка

$$\|\varphi\|_{L^s(\Omega)} \leq C_s \|\varphi\|_{1,\Omega} \quad \text{для всех } \varphi \in H^1(\Omega). \quad (3)$$

Пространство $H^{1/2}(\Gamma_N)$ вкладывается в пространство $L^q(\Gamma_N)$ непрерывно при $q \leq 4$ и компактно при $q < 4$. В силу непрерывности оператора следа $\gamma : H^1(\Omega) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma_N)$ (и его

сужения $\gamma|_{\Gamma_N}$ на $\Gamma_N \subset \Gamma$) с константой \tilde{C}_q , зависящей от q и Γ_N , справедлива оценка

$$\|\varphi\|_{L^q(\Gamma_N)} \leq \tilde{C}_q \|\varphi\|_{1,\Omega} \quad \text{для всех } \varphi \in H^1(\Omega).$$

Наконец, поскольку при $r > 1$ пространство $H^r(\Gamma_N)$ непрерывно и компактно вкладывается в $L^p(\Gamma_N)$, где $p \leq \infty$, из непрерывности оператора частичного следа $\gamma|_{\Gamma_N} : H^{r+1/2}(\Omega) \rightarrow H^r(\Gamma_N)$ вытекает оценка

$$\|\lambda\|_{L^p(\Gamma_N)} \leq \hat{C} \|\lambda\|_{s,\Omega} \quad \text{при любой } \lambda \in H^s(\Omega), \quad s = r + 1/2 > 3/2.$$

Справедлива следующая техническая лемма (см. [14]).

Лемма 1.1. *При выполнении условий (i), (ii), $\mathbf{u} \in Z$, $\lambda \in H^s_{\lambda_0}(\Omega)$, $s > 3/2$, $k_1 \in L^p_+(\Omega)$, $p \geq 3/2$, $\alpha_1 \in L^q_+(\Gamma_N)$, $q \geq 2$, существуют положительные константы $C_0, \delta_0, \gamma_1, \gamma_p$, зависящие или от Ω , или от Ω и p , или от Ω, Γ_N и q , при которых справедливы соотношения*

$$|(\lambda \nabla \varphi, \nabla \eta)| \leq C_0 \|\lambda\|_{s,\Omega} \|\varphi\|_{1,\Omega} \|\eta\|_{1,\Omega}, \quad |(\mathbf{u} \cdot \nabla \varphi, \eta)| \leq \gamma_1 \|\mathbf{u}\|_{L^4(\Omega)^3} \|\varphi\|_{1,\Omega} \|\eta\|_{1,\Omega}, \quad (4)$$

$$|(k_1 \varphi, \eta)| \leq \gamma_p \|k_1\|_{L^p(\Omega)} \|\varphi\|_{1,\Omega} \|\eta\|_{1,\Omega},$$

$$|(\lambda \alpha_1 \varphi, \eta)| \leq \gamma_q \|\lambda\|_{s,\Omega} \|\alpha_1\|_{L^q(\Gamma_N)} \|\varphi\|_{1,\Omega} \|\eta\|_{1,\Omega} \quad \text{для всех } \varphi, \eta \in H^1(\Omega), \quad (5)$$

$$|(\chi, h)| \leq \gamma_2 \|\chi\|_{\Gamma_N} \|h\|_{1,\Omega} \quad \text{для всех } \chi \in L^2(\Gamma_N), \quad h \in H^1(\Omega), \quad (6)$$

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla \varphi, \varphi) = 0, \quad (\lambda \nabla \varphi, \nabla \varphi) \geq \lambda_* \|\varphi\|_{1,\Omega}^2 \quad \text{для любой } \varphi \in \mathcal{T}, \quad \lambda_* \equiv \delta \lambda_0. \quad (7)$$

Умножим уравнение (1) на $h \in \mathcal{T}$ и проинтегрируем по области Ω , применяя формулу Грина. Учитывая (2), получаем

$$\begin{aligned} & (\lambda \nabla \varphi, \nabla h) + (k(\varphi, \cdot) \varphi, h) + (\mathbf{u} \cdot \nabla \varphi, h) + (\lambda \alpha(\varphi, \cdot) \varphi, h)_{\Gamma_N} = \\ & = (f, h) + (\chi, h)_{\Gamma_N} \quad \text{для любой } h \in \mathcal{T}, \quad \varphi|_{\Gamma_D} = \psi. \end{aligned} \quad (8)$$

Определение. Функцию $\varphi \in H^1(\Omega)$, удовлетворяющую равенству (8), назовём *слабым решением* задачи 1.

Для доказательства разрешимости задачи 1 в [15] использовалась следующая

Лемма 1.2. *Пусть выполняются условия (i). Тогда для любой функции $\psi \in H^{1/2}(\Gamma_D)$ существует функция $\varphi_0 \in H^1(\Omega)$ такая, что $\varphi_0 = \psi$ на Γ_D и при некоторой константе C_Γ , зависящей от Ω и Γ_D , справедлива оценка*

$$\|\varphi_0\|_{1,\Omega} \leq C_\Gamma \|\psi\|_{1/2,\Gamma_D}.$$

Справедлива следующая

Теорема 1.1 [15]. *При выполнении условий (i)–(viii) существует единственное слабое решение $\varphi \in H^1(\Omega)$ задачи 1, для которого справедлива оценка*

$$\|\varphi\|_{1,\Omega} \leq M_\varphi \equiv C_* M_l + C_\Gamma \|\psi\|_{1/2,\Gamma_D}, \quad (9)$$

где C_Γ – константа из леммы 1.2 и

$$\begin{aligned} M_l \equiv & \|f\|_\Omega + \gamma_2 \|\chi\|_{\Gamma_N} + (C_0 C_\Gamma \|\lambda\|_{s,\Omega} + \gamma_1 C_\Gamma \|\mathbf{u}\|_{L^4(\Omega)^3}) \|\psi\|_{1/2,\Gamma_D} + \\ & + C_\Gamma (\gamma_p (A_1 C_\Gamma^r \|\psi\|_{1/2,\Gamma_D}^r + B_1) + \gamma_q \|\lambda\|_{s,\Omega} (A_2 C_\Gamma^l \|\psi\|_{1/2,\Gamma_D}^l + B_2)) \|\psi\|_{1/2,\Gamma_D}. \end{aligned}$$

2. Мультипликативная задача управления. Пусть функция $k(\varphi, \mathbf{x})$ удовлетворяет следующему условию:

(ix) $k(\varphi, \mathbf{x}) = \beta(\mathbf{x})k_0(\varphi)$, где $\beta(\mathbf{x}) \in H_+^1(\Omega)$, $k_0(\varphi) \in L_+^2(\Omega)$ для всех $\varphi \in H^1(\Omega)$ удовлетворяет свойству (vii) при $p > 2$, и в любом шаре $B_r = \{\varphi \in H^1(\Omega) : \|\varphi\|_{1,\Omega} \leq r\}$ радиуса r справедливо неравенство

$$\|k_0(\varphi_1) - k_0(\varphi_2)\|_{\Omega} \leq L_3 \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{L^4(\Omega)} \quad \text{для всех } \varphi_1, \varphi_2 \in B_r. \quad (10)$$

Здесь константа L_3 зависит от радиуса r и не зависит от конкретных $\varphi_1, \varphi_2 \in B_r$.

Несложно показать, что условия (ix) описывают частный случай функции $k(\varphi, \mathbf{x})$, удовлетворяющей (iv). Действительно (см. также [12]),

$$\|\beta(k_0(\varphi_1) - k_0(\varphi_2))\|_{L^{3/2}(\Omega)} \leq \|\beta\|_{L^6(\Omega)} \|k_0(\varphi_1) - k_0(\varphi_2)\|_{\Omega} \leq C_6 \|\beta\|_{1,\Omega} \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{L^4(\Omega)}.$$

Для постановки задачи управления разобьем множество исходных данных задачи 1 на две группы: группу фиксированных данных, куда отнесём функции \mathbf{u} , $k_0(\varphi)$, $\alpha(\varphi)$, f , χ и ψ , и группу управлений, куда отнесём функции λ и β , предполагая, что они могут изменяться в некоторых множествах K_1 и K_2 , удовлетворяющих условию

(j) $K_1 \subset H_{\lambda_0}^s(\Omega)$ и $K_2 \subset H_+^1(\Omega)$ – непустые выпуклые замкнутые множества.

Положим $u = (\lambda, \beta)$, $K = K_1 \times K_2$. Введём пространство $Y = \mathcal{T}^* \times H^{1/2}(\Gamma_D)$ и оператор $F = (F_1, F_2) : H^1(\Omega) \times K \rightarrow Y$ по формулам

$$\langle F_1(\varphi, u), h \rangle = (\lambda \nabla \varphi, \nabla h) + (\beta(\mathbf{x})k_0(\varphi)\varphi, h) + (\mathbf{u} \cdot \nabla \varphi, h) + (\lambda \alpha(\varphi, \mathbf{x})\varphi, h)_{\Gamma_N} - (f, h) - (\chi, h)_{\Gamma_N},$$

$$F_2(\varphi) = \varphi|_{\Gamma_D} - \psi$$

и запишем (8) в виде $F(\varphi, u) = 0$. Рассматривая это равенство как условное ограничение на состояние $\varphi \in H^1(\Omega)$ и управление $u \in K$, сформулируем следующую задачу условной минимизации:

$$J(\varphi, u) \equiv \frac{\mu_0}{2} I(\varphi) + \frac{\mu_1}{2} \|\lambda\|_{s,\Omega}^2 + \frac{\mu_2}{2} \|\beta\|_{1,\Omega}^2 \rightarrow \inf, \quad F(\varphi, u) = 0, \quad (\varphi, u) \in H^1(\Omega) \times K. \quad (11)$$

Здесь $I : H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ – функционал, полунепрерывный снизу относительно слабой сходимости.

Обозначим через $Z_{ad} = \{(\varphi, u) \in H^1(\Omega) \times K : F(\varphi, u) = 0, J(\varphi, u) < \infty\}$ множество допустимых пар для задачи (11) и предположим, что выполняется условие

(jj) $\mu_0 > 0$, $\mu_1 \geq 0$, $\mu_2 \geq 0$ (либо $\mu_i > 0$, $i = 0, 1, 2$), K – ограниченное множество и функционал I ограничен снизу.

Будем использовать следующие функционалы качества:

$$I_1(\varphi) = \|\varphi - \varphi^d\|_Q^2 = \int_Q |\varphi - \varphi^d|^2 d\mathbf{x}, \quad I_2(\varphi) = \|\varphi - \varphi^d\|_{1,Q}^2. \quad (12)$$

Здесь $\varphi^d \in L^2(Q)$ (либо $\varphi^d \in H^1(Q)$) – заданная в подобласти $Q \subset \Omega$ функция.

Теорема 2.1. Пусть выполнены условия (i)–(viii), (xi) и (j), (jj), функционал $I : H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ слабо полунепрерывен снизу и множество Z_{ad} не пусто. Тогда существует по крайней мере одно решение $(\varphi, u) \in H^1(\Omega) \times K$ задачи (11).

Замечание. Функционалы в (12) удовлетворяют условиям теоремы 2.1. Также в дальнейшем будем использовать оценки, вытекающие из её условий:

$$\|\lambda\|_{s,\Omega} \leq C_\lambda, \quad \|\beta\|_{1,\Omega} \leq C_\beta \quad \text{для любых } \lambda \in K_1 \text{ и } \beta \in K_2,$$

где C_λ и C_β – положительные константы.

Будем считать далее, что $k(\varphi, \cdot) = \beta(\cdot)k_0(\varphi) \equiv \beta(\cdot)\varphi^2$ и $\alpha(\alpha) = |\alpha|$. При таких коэффициентах реакции и массообмена для экстремальной задачи (11) ниже будет выведена система

оптимальности и на основе её анализа будут получены оценки локальной устойчивости оптимальных решений задачи (11) относительно малых возмущений как функционалов качества, так и заданной функции f .

Несложно показать, что производная Фреше от оператора $F = (F_1, F_2) : H^1(\Omega) \times K \rightarrow Y$ по φ в каждой точке $(\hat{\varphi}, \hat{u}) = (\hat{\varphi}, \hat{\lambda}, \hat{\beta})$ есть линейный оператор $F'_\varphi(\hat{\varphi}, \hat{u}) : H^1(\Omega) \rightarrow Y$, ставящий в соответствие каждому элементу $h \in H^1(\Omega)$ элемент $F'_\varphi(\hat{\varphi}, \hat{u})(h) = (\hat{y}_1, \hat{y}_2) \in Y$. Здесь элементы $\hat{y}_1 \in \mathcal{T}^*$ и $\hat{y}_2 \in H^{1/2}(\Gamma_D)$ определяются по $\hat{\varphi}$ и τ соотношениями

$$\langle \hat{y}_1, \tau \rangle = (\hat{\lambda} \nabla \tau, \nabla h) + 3(\hat{\beta} \hat{\varphi}^2 \tau, h) + 2(\hat{\lambda} |\hat{\varphi}| \tau, h)_{\Gamma_N} + (\mathbf{u} \cdot \nabla \tau, h) \quad \text{для любого } \tau \in H^1(\Omega), \quad y_2 = h|_{\Gamma_D}.$$

Введём сопряжённое к Y пространство $Y^* = \mathcal{T} \times H^{1/2}(\Gamma_D)^*$. Через $F'_\varphi(\hat{\varphi}, \hat{u})^* : Y^* \rightarrow H^1(\Omega)^*$ обозначим сопряжённый к $F'_\varphi(\hat{\varphi}, \hat{u})$ оператор. Следуя общей теории гладко-выпуклых экстремальных задач [19], введём элемент $\mathbf{y}^* = (\theta, \zeta) \in Y^*$, на который будем ссылаться как на сопряжённое состояние, и лагранжиан $\mathcal{L} : H^1(\Omega) \times K \times Y^* \rightarrow \mathbb{R}$ по формуле

$$\mathcal{L}(\varphi, u, \mathbf{y}^*) = J(\varphi, u) + \langle \mathbf{y}^*, F(\varphi, u) \rangle_{Y^* \times Y} \equiv J(\varphi, u) + \langle F_1(\varphi, u), \theta \rangle_{\mathcal{T}^* \times \mathcal{T}} + \langle \zeta, F_2(\varphi, u) \rangle_{\Gamma_D},$$

где $\langle \zeta, \cdot \rangle_{\Gamma_D} = \langle \zeta, \cdot \rangle_{H^{1/2}(\Gamma_D)^* \times H^{1/2}(\Gamma_D)}$.

Из теоремы Лакса–Мильграма вытекает, что для любых $f \in L^2(\Omega)$ и $\psi \in H^{1/2}(\Gamma_D)$ существует единственное решение $\tau \in H^1(\Omega)$ линейной задачи

$$(\hat{\lambda} \nabla \tau, \nabla h) + 3(\hat{\beta} \hat{\varphi}^2 \tau, h) + 2(\hat{\lambda} |\hat{\varphi}| \tau, h)_{\Gamma_N} + (\mathbf{u} \cdot \nabla \tau, h) = (f, h) \quad \text{для всех } h \in \mathcal{T}, \quad \tau|_{\Gamma_D} = \psi.$$

Тогда оператор $F'_\varphi(\hat{\varphi}, \hat{u}) : H^1(\Omega) \times K \rightarrow Y$ – изоморфизм, а из [19] вытекает

Теорема 2.2. Пусть выполняются условия (i), (ii), (j), (jj), $k(\varphi, \cdot) = \beta(\cdot)\varphi^2$, где $\beta(\cdot) \in H^1_+(\Omega)$, и $\alpha(\varphi) = |\varphi|$, функционал $I : H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывно дифференцируем по φ в точке $\hat{\varphi}$ и локальный минимум в задаче (11) достигается в точке $(\hat{\varphi}, \hat{u}) \in H^1(\Omega) \times K$. Тогда существует единственный множитель Лагранжа $\mathbf{y}^* = (\theta, \zeta) \in Y^*$ такой, что выполняется уравнение Эйлера–Лагранжа $F'_\varphi(\hat{\varphi}, \hat{u})^* \mathbf{y}^* = -J'_\varphi(\hat{\varphi}, \hat{u})$ в $H^1(\Omega)^*$, эквивалентное тождеству

$$\begin{aligned} & (\hat{\lambda} \nabla \tau, \nabla \theta) + 3(\hat{\beta} \hat{\varphi}^2 \tau, \theta) + 2(\hat{\lambda} |\hat{\varphi}| \tau, \theta)_{\Gamma_N} + (\mathbf{u} \cdot \nabla \tau, \theta) + \langle \zeta, \tau \rangle_{\Gamma_D} = \\ & = -(\mu_0/2) \langle I'_\varphi(\hat{\varphi}), \tau \rangle \quad \text{для всех } \tau \in H^1(\Omega), \end{aligned}$$

и справедливы принцип минимума $\mathcal{L}(\hat{\varphi}, \hat{u}, \mathbf{y}^*) \leq \mathcal{L}(\hat{\varphi}, u, \mathbf{y}^*)$ для любой $u \in K$, эквивалентный неравенствам

$$\mu_1(\hat{\lambda}, \lambda - \hat{\lambda})_{s, \Omega} + ((\lambda - \hat{\lambda}) \nabla \hat{\varphi}, \nabla \theta) + ((\lambda - \hat{\lambda}) |\hat{\varphi}| \hat{\varphi}, \theta)_{\Gamma_N} \geq 0, \tag{13}$$

$$\mu_2(\hat{\beta}, \beta - \hat{\beta})_{1, \Omega} + ((\beta - \hat{\beta}) \hat{\varphi}^3, \theta) \geq 0 \tag{14}$$

при любых $\lambda \in K_1$ и $\beta \in K_2$.

3. Основное свойство системы оптимальности. Обозначим через $(\varphi_1, u_1) \in H^1(\Omega) \times K$ решение задачи (11), отвечающее заданной функции $f = f_1 \in L^2(\Omega)$, а через $(\varphi_2, u_2) \in H^1(\Omega) \times K$ – решение задачи

$$\tilde{J}(\varphi, u) = \frac{\mu_0}{2} \tilde{I}(\varphi) + \frac{\mu_1}{2} \|\lambda\|_{s, \Omega}^2 + \frac{\mu_2}{2} \|\beta\|_{1, \Omega}^2 \rightarrow \inf, \quad F(\varphi, u, \tilde{f}) = 0, \quad (\varphi, u) \in H^1(\Omega) \times K, \tag{15}$$

которая получается из (11) заменой функционала $I : H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ другим функционалом $\tilde{I} : H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ и заменой функции f функцией $f_2 = \tilde{f} \in L^2(\Omega)$. Считая множество K ограниченным, а функционалы $I(\varphi)$ и $\tilde{I}(\varphi)$ непрерывно дифференцируемыми на $H^1(\Omega)$, выведем одно важное для дальнейшего анализа неравенство для разности решений задач (11) и (15). Напомним, что в силу теоремы 1.1 справедливы следующие оценки для φ_i :

$$\|\varphi_i\|_{1, \Omega} \leq M_\varphi = C_* \sup_{(\lambda, \beta) \in K} \tilde{M}_\varphi, \quad i = 1, 2, \quad C_* \equiv \lambda_*^{-1}, \tag{16}$$

где \tilde{M}_φ определена в (9). Очевидно, что $M_\varphi < \infty$ в случае, когда множество K ограничено.

Обозначим через $(\theta_i, \zeta_i) \in \mathcal{T} \times H^{1/2}(\Gamma_D)^*$ множители Лагранжа, отвечающие решениям (φ_i, u_i) , $i = 1, 2$. В силу теоремы 2.2 они удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} & (\lambda_1 \nabla \tau, \nabla \theta_1) + 3(\beta_1 \varphi_1^2 \tau, \theta_1) + (\mathbf{u} \cdot \nabla \tau, \theta_1) + 2(\lambda_1 |\varphi_1| \tau, \theta_1)_{\Gamma_N} + \\ & + \langle \zeta_1, \tau \rangle_{\Gamma_D} = -\frac{\mu_0}{2} \langle I'_\varphi(\varphi_1), \tau \rangle \quad \text{для любых } \tau \in H^1(\Omega), \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} & (\lambda_2 \nabla \tau, \nabla \theta_2) + 3(\beta_2 \varphi_2^2 \tau, \theta_2) + (\mathbf{u} \cdot \nabla \tau, \theta_2) + 2(\lambda_2 |\varphi_2| \tau, \theta_2)_{\Gamma_N} + \\ & + \langle \zeta_2, \tau \rangle_{\Gamma_D} = -\frac{\mu_0}{2} \langle \tilde{I}'_\varphi(\varphi_2), \tau \rangle \quad \text{для любых } \tau \in H^1(\Omega). \end{aligned} \quad (18)$$

Положим

$$\varphi = \varphi_1 - \varphi_2, \quad \beta = \beta_1 - \beta_2, \quad \lambda = \lambda_1 - \lambda_2, \quad \theta = \theta_1 - \theta_2, \quad \zeta = \zeta_1 - \zeta_2, \quad f = f_1 - f_2. \quad (19)$$

При $k(\varphi, \cdot) = \beta(\cdot)\varphi^2$ и $\alpha(\varphi) = |\varphi|$ слабая формулировка (8) задачи 1 принимает вид

$$\begin{aligned} & (\lambda \nabla \varphi, \nabla h) + (\beta \varphi^3, h) + (\mathbf{u} \cdot \nabla \varphi, h) + (\lambda |\varphi| \varphi, h)_{\Gamma_N} = \\ & = (f, h) + (\chi, h)_{\Gamma_N} \quad \text{для всех } h \in \mathcal{T}, \quad \varphi|_{\Gamma_D} = \psi. \end{aligned} \quad (20)$$

Вычтем тождество (20), записанное для (φ_2, u_2, f_2) , из этого же тождества, записанного для (φ_1, u_1, f_1) . Учитывая, что

$$\begin{aligned} \beta_1 \varphi_1^3 - \beta_2 \varphi_2^3 &= \beta \varphi_1^3 + \beta_2 (\varphi_1^3 - \varphi_2^3), \quad \lambda_1 \nabla \varphi_1 - \lambda_2 \nabla \varphi_2 = \lambda_1 \nabla \varphi + \lambda \nabla \varphi_2, \\ \lambda_1 |\varphi_1| \varphi_1 - \lambda_2 |\varphi_2| \varphi_2 &= \lambda |\varphi_1| \varphi_1 + \lambda_2 (|\varphi_1| \varphi_1 - |\varphi_2| \varphi_2), \end{aligned}$$

получаем равенство

$$\begin{aligned} & (\lambda_1 \nabla \varphi, \nabla h) + (\beta_2 (\varphi_1^3 - \varphi_2^3), h) + (\mathbf{u} \cdot \nabla \varphi, h) + (\lambda_2 (|\varphi_1| \varphi_1 - |\varphi_2| \varphi_2), h)_{\Gamma_N} = \\ & = (f, h) - (\lambda \nabla \varphi_2, \nabla h) - (\beta \varphi_1^3, h) - (\lambda |\varphi_1| \varphi_1, h)_{\Gamma_N} \quad \text{для любых } h \in \mathcal{T}. \end{aligned} \quad (21)$$

Полагая $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ в (21), учитывая (7), (16) и монотонность функций $\lambda_2 \varphi |\varphi|$ и $\beta_2 \varphi^3$:

$$(\lambda_2 (|\varphi_1| \varphi_1 - |\varphi_2| \varphi_2), \varphi_1 - \varphi_2)_{\Gamma_N} \geq 0, \quad (\beta_2 (\varphi_1^3 - \varphi_2^3), \varphi_1 - \varphi_2) \geq 0,$$

выводим оценку

$$\|\varphi\|_{1,\Omega} \leq C_*(a \|\lambda\|_{s,\Omega} + b \|\beta\|_{1,\Omega} + \|f\|_{\Omega}), \quad (22)$$

где $a = C_0 M_\varphi + \gamma_q \tilde{C}_4 M_\varphi^2$, $b = C_6^5 M_\varphi^3$.

Положим $\lambda = \lambda_2$ в неравенстве (13), записанном при $\hat{\lambda} = \lambda_1$, $\hat{\varphi} = \varphi_1$, $\theta = \theta_1$, и $\lambda = \lambda_1$ в неравенстве (13), записанном при $\hat{\lambda} = \lambda_2$, $\hat{\varphi} = \varphi_2$, $\theta = \theta_2$. Имеем

$$\begin{aligned} \mu_1 (\lambda_1, \lambda_2 - \lambda_1)_{s,\Omega} + ((\lambda_2 - \lambda_1) \nabla \varphi_1, \nabla \theta_1) + ((\lambda_2 - \lambda_1) |\varphi_1| \varphi_1, \theta_1)_{\Gamma_N} &\geq 0, \\ \mu_1 (\lambda_2, \lambda_1 - \lambda_2)_{s,\Omega} + ((\lambda_1 - \lambda_2) \nabla \varphi_2, \nabla \theta_2) + ((\lambda_1 - \lambda_2) |\varphi_2| \varphi_2, \theta_2)_{\Gamma_N} &\geq 0. \end{aligned}$$

Сложив последние неравенства, получим

$$\mu_1 \|\lambda\|_{s,\Omega}^2 \leq -(\lambda \nabla \varphi, \nabla \theta_2) - (\lambda \nabla \varphi_1, \nabla \theta) - (\lambda (\varphi_2 (|\varphi_1| - |\varphi_2|) + |\varphi_1| \varphi), \theta_2)_{\Gamma_N} + (\lambda \varphi_1 |\varphi_1|, \theta)_{\Gamma_N}. \quad (23)$$

Положим $\beta = \beta_2$ в неравенстве (14), записанном при $\hat{\beta} = \beta_1$, $\hat{\varphi} = \varphi_1$, $\theta = \theta_1$, и $\beta = \beta_1$ в неравенстве (14), записанном при $\hat{\beta} = \beta_2$, $\hat{\varphi} = \varphi_2$, $\theta = \theta_2$:

$$\mu_2 (\beta_1, \beta_2 - \beta_1)_{1,\Omega} - ((\beta_2 - \beta_1) \varphi_1^3, \theta_1) \geq 0, \quad \mu_2 (\beta_2, \beta_1 - \beta_2)_{1,\Omega} - ((\beta_1 - \beta_2) \varphi_2^3, \theta_2) \geq 0.$$

Складывая эти неравенства, приходим к соотношению

$$\mu_1 \|\beta\|_{1,\Omega}^2 \leq (\beta\varphi(\varphi_1^2 + \varphi_1\varphi_2 + \varphi_2^2), \theta_1) + (\beta\varphi_2^3, \theta). \quad (24)$$

Вычтем теперь тождество (18) из (17). Учитывая, что

$$(\lambda_1 \nabla \tau, \nabla \theta_1) - (\lambda_2 \nabla \tau, \nabla \theta_2) = (\lambda_1 \nabla \tau, \nabla \theta) + (\lambda \nabla \tau, \nabla \theta_2),$$

$$(\lambda_1 |\varphi_1| \tau, \theta_1)_{\Gamma_N} - (\lambda_2 |\varphi_2| \tau, \theta_2)_{\Gamma_N} = (\lambda |\varphi_1| \tau, \theta_1)_{\Gamma_N} + (\lambda_2 (|\varphi_1| - |\varphi_2|) \tau, \theta_1)_{\Gamma_N} + (\lambda_2 |\varphi_2| \tau, \theta)_{\Gamma_N},$$

$$(\beta_1 \varphi_1^2 \tau, \theta_1) - (\beta_2 \varphi_2^2 \tau, \theta_2) = (\beta \varphi_1^2 \tau, \theta_1) + (\beta_2 \varphi (\varphi_1 + \varphi_2) \tau, \theta_1) + (\beta_2 \varphi_2^2 \tau, \theta),$$

будем иметь

$$\begin{aligned} & (\lambda_1 \nabla \tau, \nabla \theta) + 3(\beta_2 \varphi (\varphi_1 + \varphi_2) \tau, \theta_1) + 3(\beta_2 \varphi_2^2 \tau, \theta) + \\ & + 2(\lambda_2 (|\varphi_1| - |\varphi_2|) \tau, \theta_1)_{\Gamma_N} + 2(\lambda_2 |\varphi_2| \tau, \theta)_{\Gamma_N} + (\mathbf{u} \cdot \nabla \tau, \theta) + \langle \zeta, \tau \rangle_{\Gamma_D} = \\ & = -(\lambda \nabla \tau, \nabla \theta_2) - 2(\lambda |\varphi_1| \tau, \theta_1)_{\Gamma_N} - 3(\beta \varphi_1^2 \tau, \theta_1) - (\mu_0/2) \langle I'_\varphi(\varphi_1) - \tilde{I}'_\varphi(\varphi_2), \tau \rangle \end{aligned} \quad (25)$$

для всех $\tau \in H^1(\Omega)$.

Полагая в (25) $\tau = \varphi$, с учётом того, что $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = 0$ на Γ_D , получаем

$$\begin{aligned} & (\lambda_1 \nabla \varphi, \nabla \theta) + 3(\beta_2 (\varphi_1 + \varphi_2) \varphi^2, \theta_1) + 3(\beta_2 \varphi_2^2 \varphi, \theta) + \\ & + 2(\lambda_2 (|\varphi_1| - |\varphi_2|) \varphi, \theta_1)_{\Gamma_N} + 2(\lambda_2 |\varphi_2| \varphi, \theta)_{\Gamma_N} + (\mathbf{u} \cdot \nabla \varphi, \theta) = \\ & = -(\lambda \nabla \varphi, \nabla \theta_2) - 2(\lambda |\varphi_1| \varphi, \theta_1)_{\Gamma_N} - 3(\beta \varphi_1^2 \varphi, \theta_1) - (\mu_0/2) \langle I'_\varphi(\varphi_1) - \tilde{I}'_\varphi(\varphi_2), \varphi \rangle. \end{aligned} \quad (26)$$

Положим далее $h = \theta$ в (21). Будем иметь

$$\begin{aligned} & (\lambda_1 \nabla \varphi, \nabla \theta) + (\beta_2 (\varphi_1^2 + \varphi_1 \varphi_2 + \varphi_2^2) \varphi, \theta) + (\mathbf{u} \cdot \nabla \varphi, \theta) + (\lambda_2 (|\varphi_1| \varphi_1 - |\varphi_2| \varphi_2), \theta)_{\Gamma_N} = \\ & = (f, \theta) - (\lambda \nabla \varphi_2, \nabla \theta) - (\beta \varphi_1^3, \theta) - (\lambda |\varphi_1| \varphi_1, \theta)_{\Gamma_N}. \end{aligned}$$

Вычтем это равенство из (26). Учитывая, что

$$\begin{aligned} & 3(\beta_2 (\varphi_1 + \varphi_2) \varphi^2, \theta_1) + 3(\beta_2 \varphi_2^2 \varphi, \theta) - (\beta_2 (\varphi_1^2 + \varphi_1 \varphi_2 + \varphi_2^2) \varphi, \theta) = \\ & = 3(\beta_2 (\varphi_1 + \varphi_2) \varphi^2, \theta_1) - (\beta_2 (\varphi_1^2 + \varphi_1 \varphi_2 - 2\varphi_2^2) \varphi, \theta), \\ & 2(\lambda_2 |\varphi_2| \varphi, \theta)_{\Gamma_N} - (\lambda_2 (|\varphi_1| \varphi_1 - |\varphi_2| \varphi_2), \theta)_{\Gamma_N} = \\ & = (\lambda_2 (2|\varphi_2| (\varphi_1 - \varphi_2) - |\varphi_1| \varphi_1 + |\varphi_2| \varphi_2), \theta)_{\Gamma_N} = (\lambda_2 (\varphi_1 (|\varphi_2| - |\varphi_1|) + |\varphi_2| \varphi), \theta)_{\Gamma_N}, \end{aligned}$$

получим

$$\begin{aligned} & 3(\beta_2 (\varphi_1 + \varphi_2) \varphi^2, \theta_1) - (\beta_2 (\varphi_1^2 + \varphi_1 \varphi_2 - 2\varphi_2^2) \varphi, \theta) + \\ & + 2(\lambda_2 (|\varphi_1| - |\varphi_2|) \varphi, \theta_1)_{\Gamma_N} + (\lambda_2 (\varphi_1 (|\varphi_2| - |\varphi_1|) \varphi_1 + |\varphi_2| \varphi), \theta)_{\Gamma_N} = \\ & = -(\lambda \nabla \varphi, \nabla \theta_2) - 2(\lambda |\varphi_1| \varphi, \theta_1)_{\Gamma_N} - 3(\beta \varphi_1^2 \varphi, \theta_1) - (\mu_0/2) \langle I'_\varphi(\varphi_1) - \tilde{I}'_\varphi(\varphi_2), \varphi \rangle - \\ & - (f, \theta) + (\lambda \nabla \varphi_2, \nabla \theta) + (\beta \varphi_1^3, \theta) + 2(\lambda |\varphi_1| \varphi_1, \theta)_{\Gamma_N}. \end{aligned} \quad (27)$$

Равенство (27) запишем в следующем виде:

$$\begin{aligned} & (\mu_0/2) \langle I'_\varphi(\varphi_1) - \tilde{I}'_\varphi(\varphi_2), \varphi \rangle = -3(\beta_2 (\varphi_1 + \varphi_2) \varphi^2, \theta_1) + (\beta_2 (\varphi_1^2 + \varphi_1 \varphi_2 - 2\varphi_2^2) \varphi, \theta) - \\ & - 2(\lambda_2 (|\varphi_1| - |\varphi_2|) \varphi, \theta_1)_{\Gamma_N} - (\lambda_2 (|\varphi_2| - |\varphi_1|) \varphi_1 + |\varphi_2| \varphi), \theta)_{\Gamma_N} - (\lambda \nabla \varphi, \nabla \theta_2) - \\ & - 2(\lambda |\varphi_1| \varphi, \theta_1)_{\Gamma_N} - 3(\beta \varphi_1^2 \varphi, \theta_1) - (f, \theta) + (\lambda \nabla \varphi_2, \nabla \theta) + (\beta \varphi_1^3, \theta) + 2(\lambda |\varphi_1| \varphi_1, \theta)_{\Gamma_N}. \end{aligned} \quad (28)$$

Складывая (28) с (23) и (24), получаем соотношения

$$\begin{aligned}
 & (\mu_0/2)\langle I'_\varphi(\varphi_1) - \tilde{I}'_\varphi(\varphi_2), \varphi \rangle + \mu_1 \|\lambda\|_{s,\Omega}^2 + \mu_2 \|\beta\|_{1,\Omega}^2 \leq A_1 + A_2, \\
 & A_1 = -3(\beta_2(\varphi_1 + \varphi_2)\varphi^2, \theta_1) + (\beta_2(\varphi_1^2 + \varphi_1\varphi_2 - 2\varphi_2^2)\varphi, \theta) - \\
 & \quad - (\beta\varphi(-2\varphi_1^2 + \varphi_1\varphi_2 + \varphi_2^2), \theta_1) + (\beta(\varphi_1^3 + \varphi_2^3), \theta) - (f, \theta), \\
 & A_2 = -2(\lambda_2(|\varphi_1| - |\varphi_2|)\varphi, \theta_1)_{\Gamma_N} - (\lambda_2((|\varphi_2| - |\varphi_1|)\varphi_1 + |\varphi_2|\varphi), \theta)_{\Gamma_N} - \\
 & \quad - 2(\lambda\nabla\varphi, \nabla\theta_2) - 2(\lambda|\varphi_1|\varphi, \theta_1)_{\Gamma_N} + (\lambda\nabla\varphi_2, \nabla\theta) + 3(\lambda|\varphi_1|\varphi_1, \theta)_{\Gamma_N} - \\
 & \quad - (\lambda\nabla\varphi_1, \nabla\theta) - (\lambda(\varphi_2(|\varphi_1| - |\varphi_2|) + |\varphi_1|\varphi), \theta_2)_{\Gamma_N}. \tag{29}
 \end{aligned}$$

Сформулируем полученный результат в виде следующей теоремы.

Теорема 3.1. Пусть выполняются условия (i) и (j), $K \subset H_{\lambda_0}^s(\Omega) \times H^1(\Omega)$ – ограниченное множество, пары $(\varphi_1, u_1) \in H^1(\Omega) \times K$ и $(\varphi_2, u_2) \in H^1(\Omega) \times K$ являются решениями соответственно задач (11) при $f = f_1 \in L^2(\Omega)$ и (15) при $f = f_2 \in L^2(\Omega)$. Пусть далее $(\theta_i, \zeta_i) \in \mathcal{T} \times H^{1/2}(\Gamma_D)$ – множители Лагранжа, отвечающие решениям (φ_i, u_i) , $i = 1, 2$, и функционалы I и \tilde{I} непрерывно дифференцируемы относительно φ . Тогда для разностей φ , λ , β , θ и f , введённых в (19), справедлива оценка (22) и выполняется неравенство (29).

4. Оценки локальной устойчивости оптимальных решений. Основываясь на теореме 3.1, установим достаточные условия единственности и устойчивости решений конкретных экстремальных задач. Начнём с анализа следующей экстремальной задачи, отвечающей функционалу качества $I_1(\varphi) = \|\varphi - \varphi^d\|_Q^2$:

$$J(\varphi, u) = \frac{\mu_0}{2} I_1(\varphi) + \frac{\mu_1}{2} \|\lambda\|_{s,\Omega}^2 + \frac{\mu_2}{2} \|\beta\|_{1,\Omega}^2 \rightarrow \inf, \quad F(\varphi, u, f) = 0, \quad (\varphi, u) \in H^1(\Omega) \times K. \tag{30}$$

Обозначим через (φ_1, u_1) решение задачи (30), отвечающее заданным функциям $\varphi^d = \varphi_1^d \in L^2(Q)$ и $f = f_1 \in L^2(\Omega)$. Через (φ_2, u_2) обозначим решение задачи (30), отвечающее возмущённым функциям $\tilde{\varphi}^d = \varphi_2^d \in L^2(Q)$ и $\tilde{f} = f_2 \in L^2(\Omega)$. Полагая $\varphi^d = \varphi_1^d - \varphi_2^d$, в дополнение к (19) имеем в силу (12) равенства

$$\langle I'_1(\varphi_i), \tau \rangle = 2(\varphi_i - \varphi_i^d, \tau)_Q, \quad \langle I'_1(\varphi_1) - \tilde{I}'_1(\varphi_2), \tau \rangle = 2((\varphi, \tau)_Q - (\varphi^d, \tau)_Q), \quad i = 1, 2. \tag{31}$$

С учётом (31) равенства (17), (18) для множителей Лагранжа $\theta_i \in \mathcal{T}$, отвечающие решениям (φ_i, u_i) , принимают вид

$$\begin{aligned}
 & (\lambda_i \nabla \tau, \nabla \theta_i) + 3(\beta_i \varphi_i^2 \tau, \theta_i) + 2(\lambda_i |\varphi_i| \tau, \theta_i) + (\mathbf{u} \cdot \nabla \tau, \theta_i) + \\
 & + \langle \zeta_i, \tau \rangle_{\Gamma_D} = -\mu_0(\varphi_i - \varphi_i^d, \tau)_Q \quad \text{для любых } \tau \in H^1(\Omega), \quad i = 1, 2. \tag{32}
 \end{aligned}$$

В (25) теперь подставим производную Фреше от конкретного функционала качества и запишем это соотношение в виде уравнения относительно разности $\theta = \theta_1 - \theta_2$:

$$\begin{aligned}
 & (\lambda_1 \nabla \tau, \nabla \theta) + 3(\beta_2 \varphi_2^2 \tau, \theta) + 2(\lambda_2 |\varphi_2| \tau, \theta)_{\Gamma_N} + (\mathbf{u} \cdot \nabla \tau, \theta) + \langle \zeta, \tau \rangle_{\Gamma_D} = \\
 & = -3(\beta_2 \varphi(\varphi_1 + \varphi_2) \tau, \theta_1) - 3(\beta \varphi_1^2 \tau, \theta_1) - 2(\lambda_2 (|\varphi_1| - |\varphi_2|) \tau, \theta_1)_{\Gamma_N} - \\
 & - (\lambda \nabla \tau, \nabla \theta_2) - 2(\lambda |\varphi_1| \tau, \theta_1)_{\Gamma_N} - \mu_0(\varphi - \varphi^d, \tau)_Q \quad \text{для всех } \tau \in H^1(\Omega). \tag{33}
 \end{aligned}$$

Наконец, (29) примет следующий вид:

$$\mu_0(\|\varphi\|_Q^2 - (\varphi^d, \varphi)_Q) + \mu_1 \|\lambda\|_{s,\Omega}^2 + \mu_2 \|\beta\|_{1,\Omega}^2 \leq A_1 + A_2 - (f, \theta). \tag{34}$$

Используя (16) и (22), оценим множители θ_i , $i = 1, 2$, разность $\theta = \theta_1 - \theta_2$, а также величины A_1 и A_2 в (34).

Начнём с оценки множителя Лагранжа θ_i , являющегося решением задачи (32). В силу (16) и неравенств $\|\varphi_i\|_Q \leq \|\varphi_i\|_{1,\Omega}$, $\|\tau\|_Q \leq \|\tau\|_{1,\Omega}$ имеем

$$|(\varphi_i - \varphi_i^d, \tau)_Q| \leq M_\varphi^0 \|\tau\|_{1,\Omega} \quad \text{для всех } \tau \in H^1(\Omega), \quad M_\varphi^0 \equiv M_\varphi + \max(\|\varphi_1^d\|_Q, \|\varphi_2^d\|_Q). \quad (35)$$

Полагая $\tau = \theta_i \in \mathcal{T}$ в (32) и используя (35) и лемму 2.1, выводим оценку

$$\|\theta_i\|_{1,\Omega} \leq \mu_0 C_* M_\varphi^0, \quad i = 1, 2. \quad (36)$$

По аналогичной схеме выводится оценка для разности $\theta = \theta_1 - \theta_2$, удовлетворяющей соотношению (33). При этом для её вывода достаточно оценить правую часть (33). Используя (3), (4), (16), (22), (36) и неравенство Гёльдера, имеем последовательно

$$\begin{aligned} |(\varphi, \tau)_Q| &\leq \|\varphi\|_{1,\Omega} \|\tau\|_{1,\Omega} \leq C_*(a\|\lambda\|_{s,\Omega} + b\|\beta\|_{1,\Omega} + \|f\|_\Omega) \|\tau\|_{1,\Omega}, \quad |(\varphi^d, \tau)_Q| \leq \|\varphi^d\|_Q \|\tau\|_{1,\Omega}, \\ 3|(\beta_2 \varphi(\varphi_1 + \varphi_2) \tau, \theta_1)| &\leq 3\|\beta_2\|_{L^6(\Omega)} \|\varphi_1 + \varphi_2\|_{L^6(\Omega)} \|\varphi\|_{L^6(\Omega)} \|\theta_1\|_{L^6(\Omega)} \|\tau\|_{L^6(\Omega)} \leq \\ &\leq 6C_6^5 \|\beta_2\|_{1,\Omega} \|\varphi_i\|_{1,\Omega} \|\theta_1\|_{1,\Omega} \|\varphi\|_{1,\Omega} \|\tau\|_{1,\Omega} \leq 6\mu_0 C_\beta C_6^5 C_*^2 M_\varphi M_\varphi^0 (a\|\lambda\|_{s,\Omega} + b\|\beta\|_{1,\Omega} + \|f\|_\Omega) \|\tau\|_{1,\Omega}, \\ 3|(\beta \varphi_1^2 \tau, \theta_1)| &\leq 3\|\beta\|_{L^6(\Omega)} \|\varphi_1\|_{L^6(\Omega)}^2 \|\theta_1\|_{L^6(\Omega)} \|\tau\|_{L^6(\Omega)} \leq \\ &\leq 3C_6^5 \|\beta\|_{1,\Omega} \|\varphi_1\|_{1,\Omega}^2 \|\theta_1\|_{1,\Omega} \|\tau\|_{1,\Omega} \leq 3\mu_0 C_* C_6^5 M_\varphi^0 M_\varphi^2 \|\beta\|_{1,\Omega} \|\tau\|_{1,\Omega}, \\ 2|(\lambda_2(|\varphi_1| - |\varphi_2|) \tau, \theta_1)_{\Gamma_N}| &\leq 2\gamma_q C_\lambda \|\varphi\|_{L^4(\Gamma_N)} \|\tau\|_{1,\Omega} \|\theta_1\|_{1,\Omega} \leq \\ &\leq 2\mu_0 \gamma_q C_*^2 \tilde{C}_4 C_\lambda M_\varphi^0 (a\|\lambda\|_{s,\Omega} + b\|\beta\|_{1,\Omega} + \|f\|_\Omega) \|\tau\|_{1,\Omega}, \\ |(\lambda \nabla \tau, \nabla \theta_2)| &\leq C_0 \|\lambda\|_{s,\Omega} \|\theta_2\|_{1,\Omega} \|\tau\|_{1,\Omega} \leq \mu_0 C_* C_0 M_\varphi^0 \|\lambda\|_{s,\Omega} \|\tau\|_{1,\Omega}, \\ 2|(\lambda |\varphi_1| \tau, \theta_1)_{\Gamma_N}| &\leq 2\mu_0 \gamma_q C_* \tilde{C}_4 M_\varphi^0 M_\varphi \|\lambda\|_{s,\Omega} \|\tau\|_{1,\Omega}. \end{aligned}$$

Рассуждая аналогично выводу оценки (36) для решения задачи (32), заключаем, что для (единственного) решения θ задачи (33) справедлива оценка

$$\|\theta\|_{1,\Omega} \leq \mu_0 (\alpha_1 \|\lambda\|_{s,\Omega} + \alpha_2 \|\beta\|_{1,\Omega} + \alpha_3 \|f\|_\Omega + \|\varphi^d\|_Q). \quad (37)$$

Здесь константы α_1 , α_2 и α_3 определяются формулами

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= C_* a + 6C_6^5 C_\beta C_*^2 M_\varphi M_\varphi^0 a + 2\gamma_q C_*^2 \tilde{C}_4 C_\lambda M_\varphi^0 a + C_0 C_* M_\varphi^0 + 2\gamma_q C_* \tilde{C}_4 M_\varphi^0 M_\varphi, \\ \alpha_2 &= C_* b + 6C_6^5 C_\beta C_*^2 M_\varphi M_\varphi^0 b + 3C_6^5 C_* M_\varphi^0 M_\varphi^2 + 2\gamma_q C_*^2 \tilde{C}_4 C_\lambda M_\varphi^0 b, \\ \alpha_3 &= C_* + 6C_6^5 C_\beta C_*^2 \mu_0 M_\varphi M_\varphi^0 + 2\gamma_q C_*^2 \tilde{C}_4 C_\lambda M_\varphi^0. \end{aligned}$$

Используя неравенства (16), (22), (36) и (37), оценим теперь слагаемые, входящие в выражение для величин A_1 и A_2 в (29). Учитывая (3)–(5) и неравенство Юнга $2ab \leq \varepsilon a^2 + (1/\varepsilon)b^2$ для $a \geq 0$, $b \geq 0$, $\varepsilon > 0$, оценим каждое из пяти слагаемых, входящих в A_1 :

$$\begin{aligned} |3(\beta_2(\varphi_1 + \varphi_2)\varphi^2, \theta_1)| &\leq 3\|\beta_2\|_{L^6(\Omega)} (\|\varphi_1\|_{L^6(\Omega)} + \|\varphi_2\|_{L^6(\Omega)}) \|\theta_1\|_{L^6(\Omega)} \|\varphi\|_{L^6(\Omega)}^2 \leq \\ &\leq 18\mu_0 C_6^5 C_*^3 C_\beta M_\varphi M_\varphi^0 (a^2 \|\lambda\|_{s,\Omega}^2 + b^2 \|\beta\|_{1,\Omega}^2 + \|f\|_\Omega^2), \quad (38) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |(\beta_2(\varphi_1^2 + \varphi_1\varphi_2 - 2\varphi_2^2)\varphi, \theta)| &\leq 4\|\beta_2\|_{L^6(\Omega)} \max_{i=1,2} \|\varphi_i\|_{L^6(\Omega)}^2 \|\varphi\|_{L^6(\Omega)} \|\theta\|_{L^6(\Omega)} \leq \\ &\leq 4\mu_0 C_6^5 C_\beta M_\varphi^2 (a\|\lambda\|_{s,\Omega} + b\|\beta\|_{1,\Omega} + \|f\|_\Omega) (\alpha_1 \|\lambda\|_{s,\Omega} + \alpha_2 \|\beta\|_{1,\Omega} + \alpha_3 \|f\|_\Omega + \|\varphi^d\|_Q) \leq \\ &\leq 4\mu_0 C_* C_6^5 C_\beta M_\varphi^2 [(a\alpha_1 + 1.5a^2 + \alpha_1^2) \|\lambda\|_{s,\Omega}^2 + (b\alpha_2 + 1.5b^2 + \alpha_2^2) \|\beta\|_{1,\Omega}^2 + (\alpha_3^2 + \alpha_3 + 1.5) \|f\|_\Omega^2 + 1.5 \|\varphi^d\|_Q^2], \\ |(\beta(\varphi_1^3 + \varphi_2^3), \theta)| &\leq 2\mu_0 C_6^5 M_\varphi^3 \|\beta\|_{1,\Omega} (\alpha_1 \|\lambda\|_{s,\Omega} + \alpha_2 \|\beta\|_{1,\Omega} + \alpha_3 \|f\|_\Omega + \|\varphi^d\|_Q) \leq \\ &\leq \mu_0 C_6^5 M_\varphi^3 (\alpha_1^2 \|\lambda\|_{s,\Omega}^2 + 2(\alpha_2 + 1.5) \|\beta\|_{1,\Omega}^2 + \alpha_3^2 \|f\|_\Omega^2 + \|\varphi^d\|_Q^2), \quad (39) \\ |(\beta\varphi(\varphi_1\varphi_2 + \varphi_2^2 - 2\varphi_1^2), \theta_1)| &\leq \mu_0 C_*^2 C_6^5 M_\varphi^2 M_\varphi^0 \|\beta\|_{1,\Omega} (a\|\lambda\|_{s,\Omega} + b\|\beta\|_{1,\Omega} + \|f\|_\Omega) \leq \\ &\leq \mu_0 C_*^2 C_6^5 M_\varphi^2 M_\varphi^0 (0.5a^2 \|\lambda\|_{s,\Omega}^2 + (b+1) \|\beta\|_{1,\Omega}^2 + 0.5 \|f\|_\Omega^2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |(f, \theta)| &\leq \mu_0 \|f\|_{\Omega} (\alpha_1 \|\lambda\|_{s, \Omega} + \alpha_2 \|\beta\|_{1, \Omega} + \alpha_3 \|f\|_{\Omega} + \|\varphi^d\|_Q) \leq \\ &\leq \mu_0 (0.5\alpha_1^2 \|\lambda\|_{s, \Omega}^2 + 0.5\alpha_2^2 \|\beta\|_{1, \Omega}^2 + (1.5 + \alpha_3) \|f\|_{\Omega}^2 + 0.5 \|\varphi^d\|_Q^2). \end{aligned}$$

Выражение в A_2 содержит восемь слагаемых. Сначала детально оценим первые четыре:

$$\begin{aligned} 2|(\lambda_2(|\varphi_1| - |\varphi_2|)\varphi, \theta_1)_{\Gamma_N}| &\leq 2\mu_0\gamma_q C_* C_{\lambda} \tilde{C}_4 M_{\varphi}^0 \|\varphi\|_{1, \Omega}^2 \leq \\ &\leq 2\mu_0\gamma_q C_* C_{\lambda} \tilde{C}_4 M_{\varphi}^0 C_*^2 (3a^2 \|\lambda\|_{s, \Omega}^2 + 3b^2 \|\beta\|_{1, \Omega}^2 + 3\|f\|_{\Omega}^2), \\ |(\lambda_2((|\varphi_2| - |\varphi_1|)\varphi_1 + |\varphi_2|\varphi), \theta)_{\Gamma_N}| &\leq 2\gamma_q C_{\lambda} M_{\varphi} \tilde{C}_4 \|\varphi\|_{1, \Omega} \|\theta\|_{1, \Omega} \leq \\ &\leq 2\mu_0\gamma_q C_{\lambda} M_{\varphi} \tilde{C}_4 C_* (a\|\lambda\|_{s, \Omega} + b\|\beta\|_{1, \Omega} + \|f\|_{\Omega}) (\alpha_1 \|\lambda\|_{s, \Omega} + \alpha_2 \|\beta\|_{1, \Omega} + \alpha_3 \|f\|_{\Omega} + \|\varphi^d\|_Q) \leq \\ &\leq 2\mu_0\gamma_q C_{\lambda} M_{\varphi} \tilde{C}_4 C_* ((a\alpha_1 + \alpha_1^2 + 1.5a^2) \|\lambda\|_{s, \Omega}^2 + (b\alpha_2 + \alpha_2^2 + 1.5b^2) \|\beta\|_{1, \Omega}^2 + \\ &\quad + (\alpha_3 + \alpha_3^2 + 1.5) \|f\|_{\Omega}^2 + 1.5 \|\varphi^d\|_Q^2), \\ |2(\lambda \nabla \varphi, \nabla \theta_2)| &\leq 2C_0 \|\lambda\|_{s, \Omega} \|\varphi\|_{1, \Omega} \|\theta_2\|_{1, \Omega} \leq 2\mu_0 C_0 C_*^2 M_{\varphi}^0 (a\|\lambda\|_{s, \Omega} + b\|\beta\|_{1, \Omega} + \|f\|_{\Omega}) \|\lambda\|_{s, \Omega} \leq \\ &\leq 2\mu_0 C_0 C_*^2 M_{\varphi}^0 ((a+1) \|\lambda\|_{s, \Omega}^2 + 0.5b^2 \|\beta\|_{1, \Omega}^2 + 0.5\|f\|_{\Omega}^2), \\ 2|(\lambda|\varphi_1|\varphi, \theta_1)_{\Gamma_N}| &\leq 2\mu_0\gamma_q C_*^2 \tilde{C}_4 M_{\varphi}^0 M_{\varphi} ((a+1) \|\lambda\|_{s, \Omega}^2 + 0.5b^2 \|\beta\|_{1, \Omega}^2 + 0.5\|f\|_{\Omega}^2). \end{aligned} \quad (40)$$

Рассуждая аналогично, оценим оставшиеся четыре слагаемых в A_2 :

$$\begin{aligned} |(\lambda \nabla \varphi_2, \nabla \theta)| &\leq \mu_0 C_0 M_{\varphi} \|\lambda\|_{s, \Omega} (\alpha_1 \|\lambda\|_{s, \Omega} + \alpha_2 \|\beta\|_{1, \Omega} + \alpha_3 \|f\|_{\Omega} + \|\varphi^d\|_Q) \leq \\ &\leq \mu_0 C_0 M_{\varphi} [(\alpha_1 + 1.5) \|\lambda\|_{s, \Omega}^2 + 0.5\alpha_2^2 \|\beta\|_{1, \Omega}^2 + 0.5\alpha_3^2 \|f\|_{\Omega}^2 + 0.5 \|\varphi^d\|_Q^2], \\ 3|(\lambda|\varphi_1|\varphi_1, \theta)_{\Gamma_N}| &\leq 3\mu_0\gamma_q \tilde{C}_4 M_{\varphi}^2 [(\alpha_1 + 1.5) \|\lambda\|_{s, \Omega}^2 + 0.5\alpha_2^2 \|\beta\|_{1, \Omega}^2 + 0.5\alpha_3^2 \|f\|_{\Omega}^2 + 0.5 \|\varphi^d\|_Q^2], \\ |(\lambda \nabla \varphi_1, \nabla \theta)| &\leq \mu_0 C_0 M_{\varphi} \|\lambda\|_{s, \Omega} (\alpha_1 \|\lambda\|_{s, \Omega} + \alpha_2 \|\beta\|_{1, \Omega} + \alpha_3 \|f\|_{\Omega} + \|\varphi^d\|_Q) \leq \\ &\leq \mu_0 C_0 M_{\varphi} ((\alpha_1 + 1.5) \|\lambda\|_{s, \Omega}^2 + 0.5\alpha_2^2 \|\beta\|_{1, \Omega}^2 + 0.5\alpha_3^2 \|f\|_{\Omega}^2 + 0.5 \|\varphi^d\|_Q^2), \\ |(\lambda(\varphi_2(|\varphi_1| - |\varphi_2|) + |\varphi_1|\varphi), \theta_2)_{\Gamma_N}| &\leq 2\mu_0\gamma_q \tilde{C}_4 C_*^2 M_{\varphi} M_{\varphi}^0 \|\lambda\|_{s, \Omega} (a\|\lambda\|_{s, \Omega} + b\|\beta\|_{1, \Omega} + \|f\|_{\Omega}) \leq \\ &\leq 2\mu_0\gamma_q \tilde{C}_4 C_*^2 M_{\varphi} M_{\varphi}^0 ((a+1) \|\lambda\|_{s, \Omega}^2 + 0.5b^2 \|\beta\|_{1, \Omega}^2 + 0.5\|f\|_{\Omega}^2). \end{aligned} \quad (41)$$

Используя (38)–(41), выводим для величин A_1 и A_2 , определённых в (29), неравенство

$$|A_1| + |A_2| \leq \mu_0 (\omega_1^2 \|\lambda\|_{s, \Omega}^2 + \omega_2^2 \|\beta\|_{1, \Omega}^2 + \omega_3^2 \|f\|_{\Omega}^2 + \omega_4^2 \|\varphi^d\|_Q^2). \quad (42)$$

Здесь положительные константы ω_i , $i = \overline{1, 4}$, зависящие от величин M_{φ} и M_{φ}^0 , определяются следующими формулами:

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= 18C_6^5 C_*^3 C_{\beta} M_{\varphi} M_{\varphi}^0 a^2 + 4C_* C_6^5 C_{\beta} M_{\varphi}^2 (a\alpha_1 + 1.5a^2 + \alpha_1^2) + C_6^5 M_{\varphi}^3 \alpha_1^2 + 0.5C_*^2 C_6^5 M_{\varphi}^2 M_{\varphi}^0 a^2 + \\ &\quad + 6\gamma_q C_* C_{\lambda} \tilde{C}_4 M_{\varphi}^0 C_*^2 a^2 + 2\gamma_q C_{\lambda} M_{\varphi} \tilde{C}_4 C_* (a\alpha_1 + \alpha_1^2 + 1.5a^2) + 2C_0 C_*^2 M_{\varphi}^0 (a+1) + \\ &\quad + 4\gamma_q C_*^2 \tilde{C}_4 M_{\varphi}^0 M_{\varphi} (a+1) + 2C_0 M_{\varphi} (\alpha_1 + 1.5) + 3\gamma_q \tilde{C}_4 M_{\varphi}^2 (\alpha_1 + 1.5) + 0.5\alpha_1^2, \\ \omega_2^2 &= 18C_6^5 C_*^3 C_{\beta} M_{\varphi} M_{\varphi}^0 b^2 + 4C_* C_6^5 C_{\beta} M_{\varphi}^2 (b\alpha_2 + 1.5b^2 + \alpha_2^2) + 2C_6^5 M_{\varphi}^3 (\alpha_2 + 1.5) + \\ &\quad + C_*^2 C_6^5 M_{\varphi}^2 M_{\varphi}^0 (b+1) + 6\gamma_q C_* C_{\lambda} \tilde{C}_4 M_{\varphi}^0 C_*^2 b^2 + 2\gamma_q C_{\lambda} M_{\varphi} \tilde{C}_4 C_* (b\alpha_2 + \alpha_2^2 + 1.5b^2) + \\ &\quad + C_0 C_*^2 M_{\varphi}^0 b^2 + 3\gamma_q C_*^2 \tilde{C}_4 M_{\varphi}^0 M_{\varphi} b^2 + C_0 M_{\varphi} \alpha_2^2 + 1.5\gamma_q \tilde{C}_4 M_{\varphi}^2 \alpha_2^2 + 0.5\alpha_2^2, \\ \omega_3^2 &= 18C_6^5 C_*^3 C_{\beta} M_{\varphi} M_{\varphi}^0 + 4C_* C_6^5 C_{\beta} M_{\varphi}^2 (\alpha_3^2 + \alpha_3 + 1.5) + C_6^5 M_{\varphi}^3 \alpha_3^2 + 0.5C_*^2 C_6^5 M_{\varphi}^2 M_{\varphi}^0 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+ 6\gamma_q C_* C_\lambda \tilde{C}_4 M_\varphi^0 C_*^2 b^2 + 2\gamma_q C_\lambda M_\varphi \tilde{C}_4 C_* (\alpha_3 + \alpha_3^2 + 1.5) + C_0 C_*^2 M_\varphi^0 + 2\gamma_q C_*^2 \tilde{C}_4 M_\varphi^0 M_\varphi + \\
 &\quad + C_0 M_\varphi \alpha_3^2 + 1.5\gamma_q \tilde{C}_4 M_\varphi^2 \alpha_3^2 + (1.5 + \alpha_3), \\
 \omega_4^2 &= 6C_* C_6^5 C_\beta M_\varphi^2 + C_6^5 M_\varphi^3 + 3\gamma_q C_\lambda M_\varphi \tilde{C}_4 C_* + C_0 M_\varphi + 1.5\gamma_q \tilde{C}_4 M_\varphi^2 + 0.5.
 \end{aligned} \tag{43}$$

Пусть исходные данные задачи (30) таковы, что выполняются условия

$$\mu_0 \omega_1^2 < \mu_1(1 - \varepsilon_1), \quad \mu_0 \omega_2^2 < \mu_2(1 - \varepsilon_2), \tag{44}$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in (0, 1)$ – произвольные числа. При выполнении (44) оценка (42) принимает вид

$$|A_1| + |A_2| \leq \mu_1(1 - \varepsilon_1) \|\lambda\|_{s,\Omega}^2 + \mu_2(1 - \varepsilon_2) \|\beta\|_{1,\Omega}^2 + \mu_0(\omega_3^2 \|f\|_\Omega^2 + \omega_4^2 \|\varphi^d\|_Q^2). \tag{45}$$

Используя (45), из неравенства (34) получаем

$$\mu_0 \|\varphi\|_Q^2 \leq \mu_0(\varphi, \varphi^d)_Q - \varepsilon_1 \mu_1 \|\lambda\|_{s,\Omega}^2 - \varepsilon_2 \mu_2 \|\beta\|_{1,\Omega}^2 + \mu_0(\omega_3^2 \|f\|_\Omega^2 + \omega_4^2 \|\varphi^d\|_Q^2). \tag{46}$$

Отбрасывая неположительные слагаемые $-\varepsilon_1 \mu_1 \|\lambda\|_{s,\Omega}^2$ и $-\varepsilon_2 \mu_2 \|\beta\|_{1,\Omega}^2$ в правой части, из (46) находим

$$\|\varphi\|_Q^2 \leq \|\varphi\|_Q \|\varphi^d\|_Q + \omega_3^2 \|f\|_\Omega^2 + \omega_4^2 \|\varphi^d\|_Q^2. \tag{47}$$

Неравенство (47) представляет собой квадратичное неравенство относительно $\|\varphi\|_Q$. Решив его, приходим к следующей оценке для $\|\varphi\|_Q$:

$$\|\varphi\|_Q \leq (\omega_4 + 1) \|\varphi^d\|_Q + \omega_3 \|f\|_\Omega.$$

Поскольку $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$, $\varphi^d = \varphi_1^d - \varphi_2^d$, $f = f_1 - f_2$, то она эквивалентна оценке

$$\|\varphi_1 - \varphi_2\|_Q \leq (\omega_4 + 1) \|\varphi_1^d - \varphi_2^d\|_Q + \omega_3 \|f_1 - f_2\|_\Omega. \tag{48}$$

В случае когда $Q = \Omega$, неравенство (48) имеет в $L^2(\Omega)$ смысл оценки устойчивости компоненты $\hat{\varphi}$ решения $(\hat{\varphi}, \hat{u})$ задачи (30) относительно малых возмущений функций $\varphi^d \in L^2(\Omega)$ и $f \in L^2(\Omega)$. При $f_1 = f_2$ (48) переходит в оценку

$$\|\varphi_1 - \varphi_2\|_Q \leq (\omega_4 + 1) \|\varphi_1^d - \varphi_2^d\|_Q,$$

справедливую при выполнении условия (44). Если, кроме того, $\varphi_1^d = \varphi_2^d$, то из этой оценки следует, что $\varphi_1 = \varphi_2$ в Q . Это даёт вместе с (46) при $\mu_1 > 0$ и $\mu_2 > 0$, что $\lambda = 0$ и $\beta = 0$, а из (22) при $\lambda = 0$, $\beta = 0$ и $f = 0$ тогда следует, что $\varphi = 0$, т.е. $\varphi_1 = \varphi_2$ в Ω . Последнее означает единственность решения задачи (15) при выполнении условия (44).

В общем случае, когда $f_1 \neq f_2$, используя соотношение

$$\|\varphi\|_Q \|\varphi^d\|_Q \leq \|\varphi\|_Q^2 + (1/4) \|\varphi^d\|_Q^2,$$

вытекающее из неравенства Юнга, из (46) получаем

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_1 \mu_1 \|\lambda\|_{s,\Omega}^2 + \varepsilon_2 \mu_2 \|\beta\|_{1,\Omega}^2 &\leq -\mu_0 \|\varphi\|_Q^2 + \mu_0(\varphi, \varphi^d)_Q + \mu_0(\omega_3^2 \|f\|_\Omega^2 + \omega_4^2 \|\varphi^d\|_Q^2) \leq \\
 &\leq (\mu_0/4) \|\varphi^d\|_Q^2 + \mu_0(\omega_3^2 \|f\|_\Omega^2 + \omega_4^2 \|\varphi^d\|_Q^2).
 \end{aligned} \tag{49}$$

Из (49) вытекают оценки

$$\begin{aligned}
 \|\lambda\|_{s,\Omega} &\leq \sqrt{\mu_0/\varepsilon_1 \mu_1} (\omega_3 \|f\|_\Omega + (\omega_4 + 0.5) \|\varphi^d\|_Q), \\
 \|\beta\|_{1,\Omega} &\leq \sqrt{\mu_0/\varepsilon_2 \mu_2} (\omega_3 \|f\|_\Omega + (\omega_4 + 0.5) \|\varphi^d\|_Q),
 \end{aligned}$$

которые с учётом (19) запишем в виде

$$\|\lambda_1 - \lambda_2\|_{s,\Omega} \leq \sqrt{\mu_0/\varepsilon_1\mu_1}(\omega_3\|f_1 - f_2\|_\Omega + (\omega_4 + 0.5)\|\varphi_1^d - \varphi_2^d\|_Q), \quad (50)$$

$$\|\beta_1 - \beta_2\|_{1,\Omega} \leq \sqrt{\mu_0/\varepsilon_2\mu_2}(\omega_3\|f_1 - f_2\|_\Omega + (\omega_4 + 0.5)\|\varphi_1^d - \varphi_2^d\|_Q). \quad (51)$$

Из (50), (51) и (22) следует оценка для разности $\varphi_1 - \varphi_2$:

$$\begin{aligned} \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{1,\Omega} &\leq C_*(a\omega_3\sqrt{\mu_0/\varepsilon_1\mu_1} + b\omega_3\sqrt{\mu_0/\varepsilon_2\mu_2} + 1)\|f_1 - f_2\|_\Omega + \\ &+ C_*(\omega_4 + 0.5)(a\omega_3\sqrt{\mu_0/\varepsilon_1\mu_1} + b\omega_3\sqrt{\mu_0/\varepsilon_2\mu_2})\|\varphi_1^d - \varphi_2^d\|_Q, \end{aligned} \quad (52)$$

где $a = C_0M_\varphi + \gamma_q\tilde{C}_4M_\varphi^2$, $b = C_6^5M_\varphi^3$.

Сформулируем полученные результаты в виде теоремы.

Теорема 4.1. Пусть выполняются условия (i) и (j), K – ограниченное множество, пара $(\varphi_i, u_i) \in H^1(\Omega) \times K$ является решением задачи (30), отвечающим заданным функциям $\varphi_i^d \in L^2(Q)$ и $f_i \in L^2(\Omega)$, $i = 1, 2$, где $Q \subset \Omega$ – произвольное открытое ограниченное множество. Предположим, что $\mu_0 > 0$ и выполняется условие (44). Тогда справедливы оценки (48), (50) и (52), где ω_i , $i = \overline{1, 4}$, определены в (43).

Следствие. Пусть выполняются условия (i), (j), K – ограниченное множество, $\varphi_1^d = \varphi_2^d$ в Q и $f_1 = f_2$ в Ω . Тогда если $\mu_0 > 0$ и справедливо условие (44), решение $(\varphi, u) \in H^1(\Omega) \times K$ задачи (30) единственно.

Отметим, что устойчивость решения экстремальной задачи (30) доказана при положительных параметрах μ_1 и μ_2 , удовлетворяющих условию (44). При фиксированных значениях μ_0 , μ_1 и μ_2 оно означает условие малости на исходные данные задачи (30). Таким образом, слабые $(\mu_1/2)\|\lambda\|_{s,\Omega}^2$ и $(\mu_2/2)\|\beta\|_{1,\Omega}^2$ в выражении (30) для минимизируемого функционала J вносят необходимый регуляризирующий эффект.

Заключение. Доказанная локальная устойчивость (единственность) оптимальных решений задачи (30) дополняет результаты статьи [15], в которой установлена релейность оптимального управления β . Управление λ ввиду большей гладкости не может обладать этим свойством. Не являясь локальным, свойство релейности устанавливается без использования регуляризации, но, как правило, не является и строгим (см. [19]). При этом в экстремальных задачах маскировки принцип минимакса более востребован, чем устойчивость оптимального управления (см. [20]).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 22-21-00271).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ito K., Kunish K. Estimation of the convection coefficient in elliptic equations // Inverse Probl. 1997. V. 14. P. 995–1013.
2. Nguyen P.A., Raymond J.-P. Control problems for convection–diffusion equations with control localized on manifolds // ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations. 2001. V. 6. P. 467–488.
3. Короткий А.И., Ковтунов Д.А. Оптимальное граничное управление системой, описывающей тепловую конвекцию // Тр. Ин-та математики и механ. УРО РАН. 2006. Т. 16. С. 76–101.
4. Алексеев Г.В., Соболева О.В., Терешко Д.А. Задачи идентификации для стационарной модели массопереноса // Прикл. механ. и техн. физика. 2008. № 4. С. 24–35.
5. Алексеев Г.В., Терешко Д.А. Двухпараметрические экстремальные задачи граничного управления для стационарных уравнений тепловой конвекции // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2011. Т. 51. № 9. С. 1645–1664.
6. Ковтанюк А.Е., Чеботарев А.Ю. Стационарная задача свободной конвекции с радиационным теплообменом // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50. № 12. С. 1590–1597.
7. Kovtanyuk A.E., Chebotarev A.Yu., Botkin N.D., Hoffmann K.-H. Optimal boundary control of a steady-state heat transfer model accounting for radiative effects // J. Math. Anal. Appl. 2016. V. 439. P. 678–689.

8. *Chebotaev A.Yu., Grenkin G.V., Kovtanyuk A.E., Botkin N.D., Hoffmann K.-H.* Inverse problem with finite overdetermination for steady-state equations of radiative heat exchange // *J. Math. Anal. and Appl.* 2018. V. 460. № 2. P. 737–744.
9. *Бризицкий Р.В., Саричкая Ж.Ю.* Об устойчивости решений задач управления для уравнения конвекции–диффузии–реакции с сильной нелинейностью // *Дифференц. уравнения.* 2017. Т. 53. № 4. С. 493–504.
10. *Brizitskii R.V., Saritskaya Zh.Yu.* Optimization analysis of the inverse coefficient problem for the nonlinear convection–diffusion–reaction equation // *J. Inverse Ill-Posed Probl.* 2018. V. 26. № 6. P. 821–833.
11. *Бризицкий Р.В., Саричкая Ж.Ю.* Обратные коэффициентные задачи для нелинейного уравнения конвекции–диффузии–реакции // *Изв. РАН. Сер. мат.* 2018. Т. 82. Вып. 1. С. 17–33.
12. *Барановский Е.С., Домнич А.А.* О модели протекания неравномерно нагретой вязкой жидкости через ограниченную область // *Дифференц. уравнения.* 2020. Т. 56. № 3. С. 317–327.
13. *Baranovskii E.S.* Optimal boundary control of the Boussinesq approximation for polymeric fluids // *J. of Optimization Theory and Appl.* 2021. V. 189. P. 623–645.
14. *Мамонтов А.Е., Прокудин Д.А.* Разрешимость нестационарных уравнений трёхмерного движения теплопроводных вязких сжимаемых двухкомпонентных жидкостей // *Изв. РАН. Сер. мат.* 2021. Т. 85. № 4. С. 147–204.
15. *Бризицкий Р.В., Быстрова В.С., Саричкая Ж.Ю.* Анализ краевых и экстремальных задач для нелинейного уравнения реакции–диффузии–конвекции // *Дифференц. уравнения.* 2021. Т. 57. № 5. С. 635–648.
16. *Алексеев Г.В., Романов В.Г.* Об одном классе нерассеивающих акустических оболочек для модели анизотропной акустики // *Сиб. журн. индустр. математики.* 2011. Т. 14. № 2. С. 15–20.
17. *Алексеев Г.В., Левин В.А., Терешко Д.А.* Оптимизационный метод в задачах дизайна сферических слоистых тепловых оболочек // *Докл. АН СССР.* 2017. Т. 476. № 5. С. 512–517.
18. *Алексеев Г.В., Бризицкий Р.В.* Оценки устойчивости решений задач управления для уравнений Максвелла при смешанных граничных условиях // *Дифференц. уравнения.* 2013. Т. 49. № 8. С. 993–1004.
19. *Чеботарев А.Ю.* Задачи оптимального управления для уравнений сложного теплообмена с френелевскими условиями сопряжения // *Журн. вычислит. математики и мат. физики.* 2022. Т. 62. № 3. С. 381–390.
20. *Alekseev G.V., Tereshko D.A.* Particle swarm optimization-based algorithms for solving inverse problems of designing thermal cloaking and shielding devices // *Int. J. Heat and Mass Transfer.* 2019. V. 135. P. 1269–1277.

Институт прикладной математики
ДВО РАН, г. Владивосток,
Дальневосточный федеральный университет,
г. Владивосток

Поступила в редакцию 13.07.2022 г.
После доработки 18.01.2023 г.
Принята к публикации 20.01.2023 г.