ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 4, с. 435–445

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.929.4

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ И ПРЕДЕЛЬНОЙ ОГРАНИЧЕННОСТИ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

© 2023 г. А. Ю. Александров

Для некоторого класса нелинейных систем дифференциальных уравнений с постоянным запаздыванием исследуются условия асимптотической устойчивости нулевого решения и предельной ограниченности решений. Для получения таких условий предлагаются специальные конструкции функционалов Ляпунова–Красовского полного типа. Находятся оценки времени переходных процессов и проводится анализ влияния возмущений на динамику систем. Кроме того, исследуется случай, когда в системах имеются переключения режимов функционирования, и определяются условия, при выполнении которых асимптотическая устойчивость или предельная ограниченность сохраняются при любых допустимых законах переключения.

DOI: 10.31857/S0374064123040015, EDN: AMGSLQ

Введение. Исследование устойчивости нелинейных систем с запаздыванием представляет собой актуальную проблему современной теории управления [1–6]. В последние годы интерес к ней значительно возрос в связи с появлением задач управления мультиагентными и киберфизическими системами [7]. Хорошо известно [2, 8], что запаздывание может существенно влиять на устойчивость и другие динамические характеристики систем. Следует отметить, что во многих прикладных задачах запаздывание не является малым. Кроме того, информация о его величине может быть недоступна. В таких случаях необходимо получить условия, гарантирующие заданное поведение системы при любом запаздывании.

Прямой метод Ляпунова является основным инструментом анализа устойчивости нелинейных систем. Для систем с запаздыванием его применение базируется или на подходе Разумихина, или на функционалах Ляпунова–Красовского. Эти подходы достаточно хорошо развиты для линейных систем [2, 8–11]. Ряд важных и интересных результатов получен для определённых классов нелинейных систем с запаздыванием (см., например, [1, 3, 8, 12–14] и библиографию в них). Однако в целом проблема нахождения функций Ляпунова–Разумихина и функционалов Ляпунова–Красовского для нелинейного случая недостаточно изучена.

В данной статье исследуется нелинейная дифференциально-разностная система специального вида, представляющая собой сложную систему, описывающую взаимодействие двух подсистем, одна из которых линейная, а вторая – нелинейная и однородная. Такие уравнения могут быть получены в критическом случае нескольких нулевых собственных чисел матрицы системы линейного приближения [15, гл. 2, § 4]. Кроме того, при некоторых дополнительных условиях на нелинейности данную систему можно рассматривать как классическую систему Лурье непрямого управления с запаздыванием в канале обратной связи [16, гл. 4, § 5; 17, гл. 2, § 5; 18, §§ 7.5, 11.2].

Предлагается оригинальная конструкция функционала Ляпунова–Красовского, с помощью которой получаются условия, гарантирующие асимптотическую устойчивость или предельную ограниченность решений изучаемой системы при любом постоянном неотрицательном запаздывании. Выводятся оценки времени переходных процессов. Исследуется влияние возмущений на динамику системы. Рассматривается случай, когда в системе имеются переключения режимов функционирования, и определяются условия, при выполнении которых асимптотическая устойчивость или предельная ограниченность сохраняются при любых допустимых законах переключения.

1. Постановка задачи. Пусть задана система дифференциально-разностных уравнений

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + g_1(y(t)) + g_2(y(t-\tau)), \quad \dot{y}(t) = Cx(t) + f_1(y(t)) + f_2(y(t-\tau)). \tag{1}$$

Здесь $t \geqslant 0$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $y(t) \in \mathbb{R}^m$, A и C – постоянные матрицы размерностей $n\times n$ и $m\times n$ соответственно, $f_1(y)$, $f_2(y)$, $g_1(y)$, $g_2(y)$ – непрерывные при $y \in \mathbb{R}^m$ однородные порядка $\mu > 0$ векторные функции соответствующих размерностей, τ – постоянное неотрицательное запаздывание.

Каждое решение системы (1) при $t \geqslant t_0$ определяется начальными условиями: начальным моментом $t_0 \geqslant 0$ и начальной вектор-функцией $\varphi(\theta)$. Будем считать, что начальные функции принадлежат пространству непрерывных функций $C([-\tau,0],\mathbb{R}^{n+m})$ с равномерной нормой $\|\varphi\|_\tau = \max\limits_{\theta\in[-\tau,0]} \|\varphi(\theta)\|$, а под $\|\cdot\|$ будем понимать евклидову норму вектора. Для каждого $t \geqslant 0$ через $(x_t^{\text{т}}, y_t^{\text{т}})^{\text{т}}$ обозначим отрезок решения $(x_t^{\text{т}}, y_t^{\text{т}})^{\text{т}}$, т.е.

$$(x_t^{\text{т}}, y_t^{\text{т}})^{\text{т}} : \theta \mapsto (x^{\text{т}}(t+\theta), y^{\text{т}}(t+\theta))^{\text{т}}$$

при $\theta \in [-\tau, 0]$.

Система (1) имеет нулевое решение. Исследуем условия, при выполнении которых это решение будет асимптотически устойчивым при любом неотрицательном запаздывании. Кроме того, заметим, что во многих прикладных задачах требуется, чтобы все решения изучаемой системы были ограничены. Особый интерес представляет ситуация, когда в фазовом пространстве системы существует компактная область такая, что каждое решение за конечное время попадает в эту область и остаётся там при дальнейшем возрастании времени. Указанное свойство называют *предельной ограниченностью* или *диссипативностью* (см. [8, § 5.4; 19, гл. 4, § 17]). Поэтому, наряду с условиями асимптотической устойчивости, определим условия предельной ограниченности решений системы (1).

Следует отметить, что при $\tau = 0$ устойчивость соответствующей системы (1) исследовалась в статье [20] на основе метода декомпозиции. Однако в [20] предполагалось, что рассматриваемая система являлась сингулярной (в левой части первой подсистемы в качестве множителя при $\dot{x}(t)$ присутствует малый положительный параметр), не проводился анализ диссипативности и не учитывалось влияние запаздывания на динамику системы.

В настоящей работе, в отличие от [20], вместо метода декомпозиции используются специальные конструкции функций Ляпунова и функционалов Ляпунова–Красовского. В.Л. Харитонов разработал теорию функционалов Ляпунова–Красовского полного типа для линейных дифференциально-разностных систем [9]. В статьях [14, 21, 22] предложены подходы для построения функционалов полного типа для некоторых классов нелинейных систем. В данной работе указанные подходы распространяются на системы вида (1). Построенные функционалы полного типа позволяют не только определить условия асимптотической устойчивости и предельной ограниченности, но и получить оценки времени переходных процессов, а также исследовать влияние возмущений на динамику системы. Кроме того, проводится анализ устойчивости и предельной ограниченности для соответствующих систем с переключениями режимов функционирования.

2. Построение функционала Ляпунова–Красовского. Пусть выполнены следующие предположения.

Предположение 1. Система

$$\dot{x}(t) = Ax(t)$$

асимптотически устойчива.

Предположение 2. Нулевое решение однородной системы

$$\dot{y}(t) = f_1(y(t)) + f_2(y(t)) - CA^{-1}(g_1(y(t)) + g_2(y(t)))$$

асимптотически устойчиво.

Замечание 1. Предположения 1 и 2 представляют собой некоторый аналог известных условий абсолютной устойчивости для системы Лурье непрямого управления (см. [16, с. 94]).

Замечание 2. Известно [15, теоремы 36, 38; 23], что при выполнении предположений 1 и 2 для любых чисел $\nu_1 > 2$ и $\nu_2 > 2$ существуют функции Ляпунова $V_1(x)$ и $V_2(y)$, обладающие следующими свойствами:

а) $V_1(x)$ и $V_2(y)$ дважды непрерывно дифференцируемы при всех $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$;
б) $V_1(x)$ и $V_2(y)$ – положительно определённые функции;
в) $V_1(x)$ и $V_2(y)$ – однородные функции порядка ν_1 и ν_2 соответственно;
г) функции

$$\left(\frac{\partial V_1(x)}{\partial x}\right)^{\mathrm{т}} Ax, \quad \left(\frac{\partial V_2(y)}{\partial y}\right)^{\mathrm{т}} (f_1(y) + f_2(y) - CA^{-1}(g_1(y) + g_2(y)))$$

отрицательно определены.

Теорема 1. *Пусть выполнены предположения 1 и 2. Тогда если $\mu > 1$, то нулевое решение системы (1) асимптотически устойчиво при любом $\tau \geqslant 0$, а если $0 < \mu < 1$, то решения системы (1) равномерно предельно ограничены при любом $\tau \geqslant 0$.*

Доказательство. Сначала рассмотрим функцию

$$V(x,y) = V_1(x) + V_2(y) - \left(\frac{\partial V_2(y)}{\partial y}\right)^{\mathrm{т}} CA^{-1}x, \tag{2}$$

где $V_1(x)$ и $V_2(y)$ – однородные порядка ν_1 и ν_2 соответственно функции Ляпунова, обладающие свойствами, указанными в замечании 2.

Дифференцируя функцию (2) в силу системы (1), получаем

$$\dot V(x(t), y(t)) = \left(\frac{\partial V_1(x(t))}{\partial x}\right)^{\mathrm{т}} (Ax(t) + g_1(y(t)) + g_2(y(t-\tau))) +$$

$$+ \left(\frac{\partial V_2(y(t))}{\partial y}\right)^{\mathrm{т}} (f_1(y(t)) + f_2(y(t-\tau))) - \left(\frac{\partial V_2(y(t))}{\partial y}\right)^{\mathrm{т}} CA^{-1}(g_1(y(t)) + g_2(y(t-\tau))) -$$

$$- (Cx(t) + f_1(y(t)) + f_2(y(t-\tau)))^{\mathrm{т}} \frac{\partial^2 V_2(y(t))}{\partial y^2} CA^{-1}x(t) =$$

$$= \left(\frac{\partial V_1(x(t))}{\partial x}\right)^{\mathrm{т}} Ax(t) + \left(\frac{\partial V_2(y(t))}{\partial y}\right)^{\mathrm{т}} (f_1(y(t)) + f_2(y(t)) - CA^{-1}(g_1(y(t)) + g_2(y(t)))) +$$

$$+ \left(\frac{\partial V_1(x(t))}{\partial x}\right)^{\mathrm{т}} (g_1(y(t)) + g_2(y(t-\tau))) - \left(\frac{\partial V_2(y(t))}{\partial y}\right)^{\mathrm{т}} (f_2(y(t)) - f_2(y(t-\tau))) +$$

$$+ \left(\frac{\partial V_2(y(t))}{\partial y}\right)^{\mathrm{т}} CA^{-1}(g_2(y(t)) - g_2(y(t-\tau))) -$$

$$- (Cx(t) + f_1(y(t)) + f_2(y(t-\tau)))^{\mathrm{т}} \frac{\partial^2 V_2(y(t))}{\partial y^2} CA^{-1}x(t).$$

Далее в соответствии с подходом, разработанным в [21, 22], выбираем функционал Ляпунова–Красовского в виде

$$\widetilde{V}(x_t, y_t) = V(x(t), y(t)) + \left(\frac{\partial V_2(y(t))}{\partial y}\right)^{\mathrm{т}} \int\limits_{t-\tau}^{t} (f_2(y(\theta)) - CA^{-1}g_2(y(\theta)))\, d\theta +$$

$$+ \int\limits_{t-\tau}^{t} (\beta + \alpha(\tau - t + \theta)) \|y(\theta)\|^{\nu_2 + \mu - 1}\, d\theta, \tag{3}$$

где α, β – положительные параметры, а функция $V(x,y)$ определена по формуле (2).

Тогда

$$\dot{\widetilde{V}}(x_t,y_t)=\Big(\frac{\partial V_1(x(t))}{\partial x}\Big)^{\mathrm{т}}Ax(t)+$$

$$+\Big(\frac{\partial V_2(y(t))}{\partial y}\Big)^{\mathrm{т}}(f_1(y(t))+f_2(y(t))-CA^{-1}(g_1(y(t))+g_2(y(t))))-$$

$$-\alpha\int\limits_{t-\tau}^{t}\|y(\theta)\|^{\nu_2+\mu-1}\,d\theta+(\beta+\alpha\tau)\|y(t)\|^{\nu_2+\mu-1}-\beta\|y(t-\tau)\|^{\nu_2+\mu-1}+$$

$$+\Big(\frac{\partial V_1(x(t))}{\partial x}\Big)^{\mathrm{т}}(g_1(y(t))+g_2(y(t-\tau)))-(Cx(t)+f_1(y(t))+f_2(y(t-\tau)))^{\mathrm{т}}\frac{\partial^2V_2(y(t))}{\partial y^2}CA^{-1}x(t)+$$

$$+(Cx(t)+f_1(y(t))+f_2(y(t-\tau)))^{\mathrm{т}}\frac{\partial^2V_2(y(t))}{\partial y^2}\int\limits_{t-\tau}^{t}(f_2(y(\theta))-CA^{-1}g_2(y(\theta)))\,d\theta.$$

Учитывая свойства однородных функций (см. [15, с. 112, 118]), получаем оценки

$$b_1\|x(t)\|^{\nu_1}+b_2\|y(t)\|^{\nu_2}-b_3\|x(t)\|\|y(t)\|^{\nu_2-1}-b_4\|y(t)\|^{\nu_2-1}\int\limits_{t-\tau}^{t}\|y(\theta)\|^{\mu}\,d\theta+$$

$$+\beta\int\limits_{t-\tau}^{t}\|y(\theta)\|^{\nu_2+\mu-1}\,d\theta\leqslant\widetilde{V}(x_t,y_t)\leqslant b_5\|x(t)\|^{\nu_1}+b_6\|y(t)\|^{\nu_2}+b_3\|x(t)\|\|y(t)\|^{\nu_2-1}+$$

$$+b_4\|y(t)\|^{\nu_2-1}\int\limits_{t-\tau}^{t}\|y(\theta)\|^{\mu}\,d\theta+(\beta+\alpha\tau)\int\limits_{t-\tau}^{t}\|y(\theta)\|^{\nu_2+\mu-1}\,d\theta,$$

$$\dot{\widetilde{V}}(x_t,y_t)\leqslant-b_7\|x(t)\|^{\nu_1}-(b_8-\beta-\alpha\tau)\|y(t)\|^{\nu_2+\mu-1}-\alpha\int\limits_{t-\tau}^{t}\|y(\theta)\|^{\nu_2+\mu-1}\,d\theta-$$

$$-\beta\|y(t-\tau)\|^{\nu_2+\mu-1}+b_9\|x(t)\|^{\nu_1-1}(\|y(t)\|^{\mu}+\|y(t-\tau)\|^{\mu})+$$

$$+b_{10}(\|x(t)\|+\|y(t)\|^{\mu}+\|y(t-\tau)\|^{\mu})\|y(t)\|^{\nu_2-2}\Big(\|x(t)\|+\int\limits_{t-\tau}^{t}\|y(\theta)\|^{\mu}\,d\theta\Big).$$

Здесь $b_1,\ \ldots,\ b_{10}$ – положительные постоянные.

Выберем и зафиксируем значения параметров α и β так, чтобы выполнялось условие

$$\beta+\alpha\tau<\frac{b_8}{4}. \tag{4}$$

С использованием неравенств Юнга и Гёльдера (см. [24, с. 53, 54, 169]) нетрудно показать, что для любых положительных чисел $p_1,\ p_2$ имеют место соотношения

$$b_3\|x(t)\|\|y(t)\|^{\nu_2-1}+b_4\|y(t)\|^{\nu_2-1}\int\limits_{t-\tau}^{t}\|y(\theta)\|^{\mu}\,d\theta\leqslant$$

$$\leqslant b_3\bigg(\frac{1}{\nu_1}(p_1\|x(t)\|)^{\nu_1}+\frac{\nu_1-1}{\nu_1}\Big(\frac{\|y(t)\|^{\nu_2-1}}{p_1}\Big)^{\nu_1/(\nu_1-1)}\bigg)+$$

$$+ b_4\tau^{(\nu_2-1)/(\nu_2+\mu-1)}\|y(t)\|^{\nu_2-1}\Bigg(\int\limits_{t-\tau}^{t}\|y(\theta)\|^{\nu_2+\mu-1}\,d\theta\Bigg)^{\mu/(\nu_2+\mu-1)} \leqslant$$

$$\leqslant b_3\Bigg(\frac{1}{\nu_1}(p_1\|x(t)\|)^{\nu_1} + \frac{\nu_1-1}{\nu_1}\Bigg(\frac{\|y(t)\|^{\nu_2-1}}{p_1}\Bigg)^{\nu_1/(\nu_1-1)}\Bigg) + b_4\tau^{(\nu_2-1)/(\nu_2+\mu-1)}\times$$

$$\times\Bigg(\frac{\nu_2-1}{\nu_2+\mu-1}p_2^{-(\nu_2+\mu-1)/(\nu_2-1)}\|y(t)\|^{\nu_2+\mu-1} + \frac{\mu}{\nu_2+\mu-1}p_2^{(\nu_2+\mu-1)/\mu}\int\limits_{t-\tau}^{t}\|y(\theta)\|^{\nu_2+\mu-1}\,d\theta\Bigg).$$

Аналогичным образом выводятся неравенства для слагаемых

$$b_9\|x(t)\|^{\nu_1-1}(\|y(t)\|^{\mu} + \|y(t-\tau)\|^{\mu}) +$$

$$+ b_{10}(\|x(t)\| + \|y(t)\|^{\mu} + \|y(t-\tau)\|^{\mu})\|y(t)\|^{\nu_2-2}\Bigg(\|x(t)\| + \int\limits_{t-\tau}^{t}\|y(\theta)\|^{\mu}\,d\theta\Bigg)$$

из оценки производной функционала.

В результате получим, что если $\mu > 1$,

$$\nu_1 < \nu_2, \quad \frac{\mu+1}{2} < \frac{\nu_2+\mu-1}{\nu_1} < \mu, \tag{5}$$

то найдётся число $\delta_1 > 0$ такое, что

$$\frac{1}{2}\Bigg(b_1\|x(t)\|^{\nu_1} + b_2\|y(t)\|^{\nu_2} + \beta\int\limits_{t-\tau}^{t}\|y(\theta)\|^{\nu_2+\mu-1}\,d\theta\Bigg) \leqslant \widetilde{V}(x_t, y_t) \leqslant$$

$$\leqslant 2\Bigg(b_5\|x(t)\|^{\nu_1} + b_6\|y(t)\|^{\nu_2} + (\beta+\alpha\tau)\int\limits_{t-\tau}^{t}\|y(\theta)\|^{\nu_2+\mu-1}\,d\theta\Bigg), \tag{6}$$

$$\dot{\widetilde{V}}(x_t, y_t) \leqslant -\frac{1}{2}\Bigg(b_7\|x(t)\|^{\nu_1} + b_8\|y(t)\|^{\nu_2+\mu-1} + \alpha\int\limits_{t-\tau}^{t}\|y(\theta)\|^{\nu_2+\mu-1}\,d\theta\Bigg) \tag{7}$$

при

$$\|x(t)\|^{\nu_1} + \|y(t)\|^{\nu_2} + \int\limits_{t-\tau}^{t}\|y(\theta)\|^{\nu_2+\mu-1}\,d\theta < \delta_1, \tag{8}$$

а если $0 < \mu < 1$,

$$\nu_2 < \nu_1, \quad \mu < \frac{\nu_2+\mu-1}{\nu_1} < \frac{\mu+1}{2}, \tag{9}$$

то найдётся число $\delta_2 > 0$ такое, что неравенства (6) и (7) справедливы при

$$\|x(t)\|^{\nu_1} + \|y(t)\|^{\nu_2} + \int\limits_{t-\tau}^{t}\|y(\theta)\|^{\nu_2+\mu-1}\,d\theta > \delta_2. \tag{10}$$

Значит [8, теорема 5.2.1; 9, § 2.11; 22], (3) – функционал Ляпунова–Красовского полного типа для системы (1), гарантирующий при $\mu > 1$ асимптотическую устойчивость нулевого решения, а при $0 < \mu < 1$ – равномерную предельную ограниченность решений. Теорема доказана.

Замечание 3. Известно [2, § 3.3; 10, гл. 6], что при $\mu = 1$ выполнение предположений 1 и 2 не гарантирует асимптотической устойчивости нулевого решения или предельной ограниченности решений для соответствующей системы (1) при любом неотрицательном запаздывании.

3. Оценки решений и анализ динамики возмущённой системы. Покажем, что с помощью построенного функционала можно получить оценки времени переходных процессов в системе (1).

Теорема 2. *Пусть $\mu > 1$ и выполнены предположения 1, 2. Тогда для любого $\tau \geqslant 0$ и любого числа $\rho \in ((\mu+1)/2, \mu)$ существуют положительные постоянные a_1, a_2, a_3, $\tilde{\delta}$ такие, что если начальная функция $\varphi(\theta)$ для решения $(x^{\mathrm{T}}(t), y^{\mathrm{T}}(t))^{\mathrm{T}}$ системы (1) удовлетворяет условию*

$$\|\varphi\|_\tau < \tilde{\delta}, \tag{11}$$

то

$$\|x(t)\| \leqslant a_1(1 + a_3 t)^{-\rho/(\mu-1)}, \quad \|y(t)\| \leqslant a_2(1 + a_3 t)^{-1/(\mu-1)} \tag{12}$$

при $t \geqslant 0$.

Доказательство. Строим функционал Ляпунова–Красовского по формуле (3), где величины α и β удовлетворяют условию (4).

Для заданного $\rho \in ((\mu+1)/2, \mu)$ положим $\nu_2 = \rho\nu_1$. Если ν_1 достаточно велико, то условия (5) будут выполнены. Находим $\delta_1 > 0$ так, чтобы из неравенства (8) следовало выполнение оценок (6) и (7).

Нулевое решение системы (1) асимптотически устойчиво. Поэтому существует $\tilde{\delta} > 0$ такое, что если выполнено условие (11), то для соответствующего решения $(x^{\mathrm{T}}(t), y^{\mathrm{T}}(t))^{\mathrm{T}}$ при всех $t \geqslant 0$ будут справедливы соотношения (6)–(8). Тогда (см. доказательство теоремы 1 в работе [22]) функционал (3) на этом решении будет удовлетворять дифференциальному неравенству

$$\dot{\widetilde{V}}(x_t, y_t) \leqslant -\tilde{b}\widetilde{V}^{1+(\mu-1)/\nu_2}(x_t, y_t), \quad \tilde{b} = \mathrm{const} > 0,$$

интегрируя которое и используя нижнюю оценку в (6), приходим к неравенствам (12). Теорема доказана.

Замечание 4. В случае $0 < \mu < 1$ с помощью построенного функционала можно оценить область предельной ограниченности и время попадания решений в эту область.

Действительно, получаем следующий алгоритм нахождения требуемых оценок:

1. Выбираем числа $\nu_1 > 2$ и $\nu_2 > 2$, удовлетворяющие условиям (9), и строим функционал Ляпунова–Красовского $\widetilde{V}(x_t, y_t)$ по формуле (3), где для параметров α, β выполнено неравенство (4).

2. Находим $\delta_2 > 0$ так, чтобы из (10) следовало, что имеют место оценки (6) и (7).

3. Можем указать числа $\Delta > 0$, $\hat{b} > 0$ такие, что

$$\dot{\widetilde{V}}(x_t, y_t) \leqslant -\hat{b}\widetilde{V}^{1+(\mu-1)/\nu_2}(x_t, y_t) \tag{13}$$

при $\widetilde{V}(x_t, y_t) \geqslant \Delta$.

4. Используя дифференциальное неравенство (13), получаем, что если $t_0 \geqslant 0$, $\widetilde{V}(x_{t_0}, y_{t_0}) \leqslant \leqslant \Delta$, то $\widetilde{V}(x_t, y_t) \leqslant \Delta$ при всех $t \geqslant t_0$, а если $t_0 \geqslant 0$, $\widetilde{V}(x_{t_0}, y_{t_0}) > \Delta$, то $\widetilde{V}(x_t, y_t) \leqslant \Delta$ при всех $t \geqslant t_0 + T$, где $T = \nu_2(\widetilde{V}^{(1-\mu)/\nu_2}(x_{t_0}, y_{t_0}) - \Delta^{(1-\mu)/\nu_2})/((1-\mu)\hat{b})$.

5. В качестве оценки области предельной ограниченности выбираем область

$$b_1\|x\|^{\nu_1} + b_2\|y\|^{\nu_2} \leqslant 2\Delta. \tag{14}$$

6. Задаем число $\tilde{\Delta} > 0$. Пусть $\omega = \sup\limits_{\|\varphi\|_\tau \leqslant \tilde{\Delta}} \widetilde{V}(\varphi)$. Тогда если начальная функция решения удовлетворяет условию $\|\varphi\|_\tau \leqslant \tilde{\Delta}$, то при $t \geqslant \max\{0; \nu_2(\omega^{(1-\mu)/\nu_2} - \Delta^{(1-\mu)/\nu_2})/((1-\mu)\hat{b})\}$ это решение будет находиться в области (14).

Далее, наряду с (1), рассмотрим соответствующую возмущённую систему

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + g_1(y(t)) + g_2(y(t-\tau)) + Q(t, x(t), y(t), y(t-\tau)),$$
$$\dot{y}(t) = Cx(t) + f_1(y(t)) + f_2(y(t-\tau)) + R(t, x(t), y(t), y(t-\tau)). \tag{15}$$

Здесь $t \geqslant 0$, векторные функции $Q(t,x,y,u)$, $R(t,x,y,u)$ непрерывны при $t \geqslant 0$, $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$, $u \in \mathbb{R}^m$.

Предположение 3. Существует число $\gamma_1 > 0$ такое, что в области $t \geqslant 0$, $\|x\| + \|y\| + \|u\| < \gamma_1$ справедливы оценки

$$\|Q(t,x,y,u)\| \leqslant c_1(\|x\|^\eta + \|y\|^\zeta + \|u\|^\zeta), \quad \|R(t,x,y,u)\| \leqslant c_2(\|x\|^\eta + \|y\|^\zeta + \|u\|^\zeta), \tag{16}$$

где c_1, c_2, η, ζ – положительные постоянные.

Предположение 4. Существует число $\gamma_2 > 0$ такое, что в области $t \geqslant 0$, $\|x\| + \|y\| + \|u\| > \gamma_2$ справедливы оценки (16), а при $t \geqslant 0$, $\|x\| + \|y\| + \|u\| \leqslant \gamma_2$ функции $Q(t,x,y,u)$, $R(t,x,y,u)$ ограничены.

Теорема 3. *Пусть $\mu > 1$ и выполнены предположения 1–3. Тогда, если*

$$\eta > 1, \quad \zeta > \mu, \tag{17}$$

нулевое решение системы (15) асимптотически устойчиво при любом $\tau \geqslant 0$.

Пусть $0 < \mu < 1$ и выполнены предположения 1, 2, 4. Тогда, если

$$0 < \eta < 1, \quad 0 < \zeta < \mu, \tag{18}$$

решения системы (15) равномерно предельно ограничены при любом $\tau \geqslant 0$.

Доказательство. Рассмотрим функционал (3), в котором параметры α, β удовлетворяют условию (4). Продифференцируем его в силу возмущённой системы и получим

$$\dot{\tilde{V}}(x_t,y_t) = W(x_t,y_t) + \left(\frac{\partial V_1(x(t))}{\partial x}\right)^{\mathrm{т}} Q(t,x(t),y(t),y(t-\tau)) + \left(\frac{\partial V_2(y(t))}{\partial y}\right)^{\mathrm{т}} R(t,x(t),y(t),y(t-\tau)) -$$
$$- R^{\mathrm{т}}(t,x(t),y(t),y(t-\tau)) \frac{\partial^2 V_2(y(t))}{\partial y^2}\left(CA^{-1}x(t) - \int\limits_{t-\tau}^{t} (f_2(y(\theta)) - CA^{-1}g_2(y(\theta)))\,d\theta\right) -$$
$$- \left(\frac{\partial V_2(y(t))}{\partial y}\right)^{\mathrm{т}} CA^{-1}Q(t,x(t),y(t),y(t-\tau)).$$

Здесь $W(x_t,y_t)$ – производная функционала (3) в силу системы (1).

Пусть $\mu > 1$. При $t \geqslant 0$, $\|x(t)\| + \|y(t)\| + \|y(t-\tau)\| < \gamma_1$ имеем

$$\dot{\tilde{V}}(x_t,y_t) \leqslant W(x_t,y_t) + \tilde{b}_1(\|x(t)\|^{\nu_1-1} + \|y(t)\|^{\nu_2-1})(\|x(t)\|^\eta + \|y(t)\|^\zeta + \|y(t-\tau)\|^\zeta) +$$
$$+ \tilde{b}_2\|y(t)\|^{\nu_2-2}(\|x(t)\|^\eta + \|y(t)\|^\zeta + \|y(t-\tau)\|^\zeta)\left(\|x(t)\| + \int\limits_{t-\tau}^{t} \|y(\theta)\|^\mu\,d\theta\right),$$

где $\tilde{b}_1$, $\tilde{b}_2$ – положительные постоянные. Снова используя неравенства Юнга и Гёльдера, нетрудно проверить, что если порядки однородности функций $V_1(x)$ и $V_2(y)$ удовлетворяют условиям

$$\nu_1 < \nu_2, \quad \max\left\{\frac{\mu+1}{2}, \frac{\mu}{\eta}\right\} < \frac{\nu_2+\mu-1}{\nu_1} < \mu$$

и выполнены неравенства (17), то найдётся число $\bar{\delta} > 0$ такое, что при $\|(x_t^{\mathrm{т}}, y_t^{\mathrm{т}})^{\mathrm{т}}\|_\tau < \bar{\delta}$ справедливы оценки (6) и (7).

В случае $0 < \mu < 1$ аналогичным образом показывается, что при выполнении предположений 1, 2, 4 и неравенств (18) решения возмущённой системы будут равномерно предельно ограничены. Теорема доказана.

4. Условия асимптотической устойчивости и предельной ограниченности для системы с переключениями. Исследуем теперь систему вида (1) с переключениями режимов функционирования:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + g_1^{(\sigma(t))}(y(t)) + g_2^{(\sigma(t-\tau))}(y(t-\tau)),$$
$$\dot{y}(t) = Cx(t) + f_1^{(\sigma(t))}(y(t)) + f_2^{(\sigma(t-\tau))}(y(t-\tau)). \tag{19}$$

Здесь $t \geqslant 0$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $y(t) \in \mathbb{R}^m$, A и C – постоянные матрицы размерностей $n \times n$ и $m \times n$ соответственно, $\sigma = \sigma(t)$ – кусочно-постоянная функция, определяющая закон переключения, $\sigma(t) : [-\tau, +\infty) \mapsto \{1, \ldots, N\}$, $f_j^{(s)}(y)$ и $g_j^{(s)}(y)$ – непрерывные при $y \in \mathbb{R}^m$ однородные порядка $\mu > 0$ векторные функции, причём верхний индекс означает номер функции из соответствующего семейства, $j = 1, 2$, $s = \overline{1, N}$, τ – постоянное неотрицательное запаздывание. Предполагаем, что функция $\sigma(t)$ на любом ограниченном промежутке имеет конечное число точек разрыва. Такие законы переключения будем называть *допустимыми*.

Система (19) относится к классу систем с асинхронными переключениями. Известно, что асинхронные переключения имеют место во многих прикладных задачах в случаях, когда управление в системе зависит от режима функционирования и требуется некоторое время для идентификации активной подсистемы и применения соответствующего регулятора [6, 25].

Пусть A – неособая матрица. Рассмотрим семейство однородных подсистем

$$\dot{y}(t) = f_1^{(s)}(y(t)) + f_2^{(s)}(y(t)) - CA^{-1}(g_1^{(s)}(y(t)) + g_2^{(s)}(y(t))), \quad s = \overline{1, N}. \tag{20}$$

Предположение 5. Нулевые решения подсистем из семейства (20) асимптотически устойчивы, причём для этого семейства существует общая функция Ляпунова $\bar{V}(y)$, обладающая следующими свойствами:

а) $\bar{V}(y)$ дважды непрерывно дифференцируема при всех $y \in \mathbb{R}^m$;
б) $\bar{V}(y)$ – положительно определённая функция;
в) $\bar{V}(y)$ – однородная функция порядка $\lambda \geqslant 2$;
г) функции

$$\left(\frac{\partial \bar{V}(y)}{\partial y}\right)^{\mathrm{T}} (f_1^{(s)}(y(t)) + f_2^{(s)}(y(t)) - CA^{-1}(g_1^{(s)}(y(t)) + g_2^{(s)}(y(t)))), \quad s = \overline{1, N},$$

отрицательно определены.

Замечание 5. Некоторые подходы к проверке предположения 5 разработаны в статьях [26, 27].

Теорема 4. *Пусть выполнены предположения 1 и 5. Тогда если $\mu > 1$, то нулевое решение системы (19) асимптотически устойчиво при любом $\tau \geqslant 0$ и любом допустимом законе переключения, а если $0 < \mu < 1$, то решения системы (19) равномерно предельно ограничены при любом $\tau \geqslant 0$ и любом допустимом законе переключения.*

Доказательство. Задаём числа $\nu_1 > 2$, $\nu_2 > 2$ и строим функционал Ляпунова–Красовского по формуле

$$\widetilde{V}(t, x_t, y_t) = V_1(x(t)) + V_2(y(t)) + \int\limits_{t-\tau}^{t} (\beta + \alpha(\tau - t + \theta)) \|y(\theta)\|^{\nu_2 + \mu - 1} \, d\theta -$$
$$- \left(\frac{\partial V_2(y(t))}{\partial y}\right)^{\mathrm{T}} CA^{-1}x(t) + \left(\frac{\partial V_2(y(t))}{\partial y}\right)^{\mathrm{T}} \int\limits_{t-\tau}^{t} (f_2^{(\sigma(\theta))}(y(\theta)) - CA^{-1}g_2^{(\sigma(\theta))}(y(\theta))) \, d\theta.$$

Здесь α, β – положительные параметры, $V_2(y) = \bar{V}^{\nu_2/\lambda}(y)$, а $V_1(x)$ и $\bar{V}(y)$ – однородные порядка ν_1 и λ функции Ляпунова, обладающие свойствами, указанными в замечании 2 и предположении 5 соответственно.

Продифференцируем этот функционал в силу системы (19). Получим

$$\dot{\tilde{V}}(t,x_t,y_t) = \left(\frac{\partial V_1(x(t))}{\partial x}\right)^{\mathrm{T}} Ax(t) + \left(\frac{\partial V_1(x(t))}{\partial x}\right)^{\mathrm{T}} (g_1^{(\sigma(t))}(y(t)) + g_2^{(\sigma(t-\tau))}(y(t-\tau))) +$$

$$+ \left(\frac{\partial V_2(y(t))}{\partial y}\right)^{\mathrm{T}} (f_1^{(\sigma(t))}(y(t)) + f_2^{(\sigma(t))}(y(t)) - CA^{-1}(g_1^{(\sigma(t))}(y(t)) + g_2^{(\sigma(t))}(y(t)))) -$$

$$- \alpha \int\limits_{t-\tau}^{t} \|y(\theta)\|^{\nu_2+\mu-1}\,d\theta + (\beta+\alpha\tau)\|y(t)\|^{\nu_2+\mu-1} - \beta\|y(t-\tau)\|^{\nu_2+\mu-1} -$$

$$- (Cx(t) + f_1^{(\sigma(t))}(y(t)) + f_2^{(\sigma(t-\tau))}(y(t-\tau)))^{\mathrm{T}} \frac{\partial^2 V_2(y(t))}{\partial y^2} CA^{-1}x(t) +$$

$$+ (Cx(t) + f_1^{(\sigma(t))}(y(t)) + f_2^{(\sigma(t-\tau))}(y(t-\tau)))^{\mathrm{T}} \frac{\partial^2 V_2(y(t))}{\partial y^2} \int\limits_{t-\tau}^{t} (f_2^{(\sigma(\theta))}(y(\theta)) -$$

$$- CA^{-1} g_2^{(\sigma(\theta))}(y(\theta)))\,d\theta \leqslant -p_1\|x(t)\|^{\nu_1} - (p_2-\beta-\alpha\tau)\|y(t)\|^{\nu_2+\mu-1} -$$

$$- \alpha \int\limits_{t-\tau}^{t} \|y(\theta)\|^{\nu_2+\mu-1}\,d\theta - \beta\|y(t-\tau)\|^{\nu_2+\mu-1} + p_3\|x(t)\|^{\nu_1-1}(\|y(t)\|^{\mu} + \|y(t-\tau)\|^{\mu}) +$$

$$+ p_4(\|x(t)\| + \|y(t)\|^{\mu} + \|y(t-\tau)\|^{\mu})\|y(t)\|^{\nu_2-2}\left(\|x(t)\| + \int\limits_{t-\tau}^{t} \|y(\theta)\|^{\mu}\,d\theta\right).$$

Здесь p_1, p_2, p_3, p_4 – положительные постоянные.

Дальнейшее доказательство аналогично доказательству теоремы 1.

5. Пример. Пусть система (1) имеет вид

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bh(y(t-\tau)), \quad \dot{y}(t) = Cx(t) + Dh(y(t-\tau)), \tag{21}$$

где $t \geqslant 0$, $x(t) \in \mathbb{R}^2$, $y(t) \in \mathbb{R}^2$, A, B, C, D – постоянные матрицы размерности 2×2, $h(y) = (y_1^{\mu}, y_2^{\mu})^{\mathrm{T}}$, $\mu > 1$, – рациональное число с нечётными числителем и знаменателем, τ – постоянное неотрицательное запаздывание. Такие уравнения соответствуют системе непрямого управления с двумя нелинейными исполнительными органами и запаздыванием в канале обратной связи [16, гл. 4, § 5; 18, §§ 7.5, 11.2].

Определим условия асимптотической устойчивости нулевого решения системы (21). Будем считать, что A – неособая матрица. Чтобы проверить условие предположения 2, построим однородную систему

$$\dot{y}(t) = (D - CA^{-1}B)h(y(t)). \tag{22}$$

Рассмотрим случай, когда

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}, \quad B = C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}, \tag{23}$$

где a – некоторая постоянная.

Для системы (21) с такими матрицами предположение 1 выполнено тогда и только тогда, когда $a < 0$, а уравнения (22) принимают вид

$$\dot{y}(t) = \begin{pmatrix} 2 + 1/a & 1 \\ 4 & -1 + 1/a \end{pmatrix} h(y(t)). \tag{24}$$

Заметим, что (24) – система Важевского [17, гл. 9; 28]. Следовательно [28, пример 9], для асимптотической устойчивости её нулевого решения необходимо и достаточно, чтобы матрица этой системы была гурвицевой.

Применяя теорему 1, получаем, что при выполнении условия $-1/3 < a < 0$ нулевое решение системы (21) с матрицами (23) асимптотически устойчиво при любом неотрицательном запаздывании.

Заключение. Для рассматриваемых классов систем предложены оригинальные конструкции функционалов Ляпунова–Красовского полного типа, с помощью которых установлены новые условия, гарантирующие асимптотическую устойчивость нулевого решения или предельную ограниченность решений при любом постоянном запаздывании. В качестве направления дальнейших исследований отметим развитие предложенных подходов для анализа устойчивости и предельной ограниченности систем с переменным запаздыванием и с обобщённо-однородными нелинейностями.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Karafyllis I., Malisoff M., Mazenc F., Pepe P.* Recent Results on Nonlinear Delay Control Systems. Cham, 2016.
2. *Fridman E.* Introduction to Time-Delay Systems: Analysis and Control. Basel, 2014.
3. *Richard J.-P.* Time-delay systems: an overview of some recent advances and open problems // Automatica. 2003. V. 39. P. 1667–1694.
4. *Глызин С.Д., Колесов А.Ю.* Об одном способе математического моделирования электрических синапсов // Дифференц. уравнения. 2022. Т. 58. № 7. С. 867–881.
5. *Лукоянов Н.Ю., Плаксин А.П.* Стратегии прицеливания в направлении квазиградиентов в задачах оптимального управления системами с запаздыванием // Дифференц. уравнения. 2022. Т. 58. № 11. С. 1515–1524.
6. *Liu G., Hua C., Guan X.* Asynchronous stabilization of switched neutral systems: a cooperative stabilizing approach // Nonlin. Anal.: Hybrid Systems. 2019. № 33. P. 380–392.
7. Проблемы сетевого управления / Под ред. А.Л. Фрадкова. М.; Ижевск, 2015.
8. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. М., 1984.
9. *Kharitonov V.L.* Time-Delay Systems. Lyapunov Functionals and Matrices. Boston, 2013.
10. *Мышкис А.Д.* Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. М., 1972.
11. *Метельский А.В.* Одновременная стабилизация семейства дифференциальных систем с запаздыванием динамической обратной связью по состоянию // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 11. С. 1516–1535.
12. *Efimov D., Polyakov A., Perruquetti W., Richard J.P.* Weighted homogeneity for time-delay systems: finite-time and independent of delay stability // IEEE Trans. Automatic Control. 2016. V. 61. № 1. P. 210–215.
13. *Schiffer J., Fridman E., Ortega R., Raisch J.* Stability of a class of delayed port-hamiltonian systems with application to microgrids with distributed rotational and electronic generation // Automatica. 2016. V. 74. P. 71–79.
14. *Aleksandrov A., Efimov D.* Stability analysis of switched homogeneous time-delay systems under synchronous and asynchronous commutation // Nonlin. Anal.: Hybrid Systems. 2021. V. 42. Art. 101090.
15. *Зубов В.И.* Устойчивость движения. М., 1973.
16. *Барбашин Е.А.* Функции Ляпунова. М., 1970.
17. *Руш Н., Абетс П., Лалуа М.* Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. М., 1980.
18. *Liao X., Yu P.* Absolute Stability of Nonlinear Control Systems. New York; Heidelberg, 2008.
19. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. М., 1967.
20. *Косов А.А., Козлов М.В.* Об асимптотической устойчивости однородных сингулярных систем с переключениями // Автоматика и телемеханика. 2019. № 3. С. 45–54.

21. *Александров А.Ю., Жабко А.П., Печерский В.С.* Функционалы полного типа для некоторых классов однородных дифференциально-разностных систем // Сб. тр. VIII межд. науч. конф. "Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий". Воронеж, 21–26 сентября 2015 г. Воронеж, 2015. С. 5–8.
22. *Efimov D., Aleksandrov A.* Analysis of robustness of homogeneous systems with time delays using Lyapunov–Krasovskii functionals // Int. J. Robust Nonlin. Control. 2021. V. 31. № 9. P. 3730–3746.
23. *Rosier L.* Homogeneous Lyapunov function for homogeneous continuous vector field // Systems Control Lett. 1992. V. 19. P. 467–473.
24. *Харди Г.Г., Литтльвуд Д.Е., Полиа Г.* Неравенства. М., 1948.
25. *Zheng D., Zhang H., Zhang J.A., Zheng W., Su S.W.* Stability of asynchronous switched systems with sequence-based average dwell time approaches // J. Franklin Inst. 2020. V. 357. № 4. P. 2149–2166.
26. *Васильев С.Н., Косов А.А.* Анализ динамики гибридных систем с помощью общих функций Ляпунова и множественных гомоморфизмов // Автоматика и телемеханика. 2011. № 6. С. 27–46.
27. *Aleksandrov A.Yu., Kosov A.A., Platonov A.V.* On the asymptotic stability of switched homogeneous systems // Syst. Control Lett. 2012. V. 61. № 1. P. 127–133.
28. *Мартынюк А.А., Оболенский А.Ю.* Об устойчивости решений автономных систем Важевского // Дифференц. уравнения. 1980. Т. 16. № 8. С. 1392–1407.

Санкт-Петербургский государственный университет

Поступила в редакцию 18.12.2022 г.
После доработки 25.02.2023 г.
Принята к публикации 22.03.2023 г.