

---

---

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

---

---

УДК 517.956+517.968.2

## ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ПО ОПРЕДЕЛЕНИЮ НЕИЗВЕСТНОГО КОЭФФИЦИЕНТА УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЯ БАЛКИ В БЕСКОНЕЧНОЙ ОБЛАСТИ

© 2023 г. У. Д. Дурдиев

Для уравнения поперечных колебаний однородной балки рассматривается прямая начальная задача в бесконечной области, для неё изучается обратная задача по определению зависящего от времени коэффициента жёсткости балки. Приводится решение прямой задачи с помощью фундаментальных решений и доказываются существование и единственность этого решения. Получены оценки устойчивости для решения обратной задачи. С помощью принципа сжатых отображений Банаха доказаны теоремы существования и единственности решения обратной задачи.

DOI: 10.31857/S0374064123040039, EDN: AMTHCF

**Введение.** Балка – это конструктивный элемент (предназначенный для восприятия преимущественно осевой нагрузки), который сопротивляется нагрузкам, приложенным сбоку к её оси. Нагрузки, приложенные к балке, вызывают силы реакции в точках её опоры. Суммарный эффект всех сил, действующих на балку, заключается в создании поперечных сил и изгибающих моментов внутри неё, которые, в свою очередь, вызывают внутренние напряжения, деформации и прогибы балки. Балки характеризуются способом опирания, профилем (формой поперечного сечения), условиями равновесия, длиной и материалом.

Многие задачи о колебаниях стержней, балок и пластин имеют важные приложения в проектировании конструкций, теории устойчивости вращающихся валов, теории колебаний кораблей и трубопроводов и описываются дифференциальными уравнениями порядков выше второго [1–3].

В последние годы возрос интерес к исследованию прямых и обратных задач для уравнения колебаний балки [4–21]. В статье [7] представлен метод восстановления параметров закрепления вязкоупругого стержня с переменной жёсткостью, жёстко закреплённого на одном конце и имеющего вязкоупругие связи на другом при известных смещениях, заданных (измеренных) в двух точках. В работе [11] для уравнения поперечных колебаний однородной балки, свободно опирающейся на концы, рассмотрена прямая начально-краевая задача и для неё изучена обратная задача по определению зависящего от времени коэффициента жёсткости. Численные решения краевых задач для уравнения поперечных колебаний балки приведены в работах [22–24].

Обратные задачи – одни из самых важных, на наш взгляд, математических задач в технических науках и математике, потому что дают возможность ввести необходимые параметры задачи напрямую. Они имеют широкое применение в идентификации систем, оптике, акустике, теории связи, обработке сигналов, геофизике, дистанционном зондировании, машинном обучении и во многих других областях. Обратные задачи математической физики изучены для многих классов дифференциальных уравнений. Так, например, такие задачи для простейшего уравнения гиперболического типа изучались в монографии [25]. Методика доказательств локальных теорем существования и единственности решения, теорем единственности и условной устойчивости для обратных динамических задач, а также численные подходы к нахождению их решения рассмотрены в работах [26–37] (см. также библиографию в них).

В данной статье рассмотрены прямая задача для уравнения колебания бесконечной балки, т.е. задача Коши и обратная задача по определению коэффициента, зависящего от времени при младшем члене этого уравнения.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим бесконечную балку под действием внешней силы  $G(x, t)$ . Вынужденные изгибные поперечные колебания балки описываются уравнением четвёртого порядка

$$\rho S u_{tt} + E J u_{xxxx} + Q(t)u = G(x, t),$$

где  $\rho$  – плотность балки,  $S$  – площадь поперечного сечения балки,  $E$  – модуль упругости материала балки,  $J$  – момент инерции поперечного сечения относительно горизонтальной оси; балка по всей длине поддерживается упругим основанием с коэффициентом жёсткости  $Q(t)$ .

Разделив на  $\rho S$ , запишем это уравнение в следующем виде:

$$u_{tt} + a^2 u_{xxxx} + q(t)u(x, t) = f(x, t), \tag{1}$$

где  $a^2 = EJ/(\rho S)$ ,  $q(t) = Q(t)/(\rho S)$  и  $f(x, t) = G(x, t)/(\rho S)$ . Уравнение (1) рассмотрим в полуплоскости  $D = \{(x, t) : -\infty < x < +\infty, t > 0\}$  вместе с начальными условиями

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

**Прямая задача.** Найти функцию  $u(x, t)$ , удовлетворяющую (1), (2) и условию

$$u(x, t) \in C_{x,t}^{4,2}(D) \cap C_t^1(D \cup \{t = 0\}) \cap C(\overline{D}). \tag{3}$$

При этом функции  $q(t)$ ,  $f(x, t)$ ,  $\varphi(x)$ ,  $\psi(x)$  считаются заданными и достаточно гладкими.

**Обратная задача.** Найти коэффициент  $q(t)$ , если решение задачи Коши (1)–(3) удовлетворяет условию

$$u(0, t) = g(t), \tag{4}$$

где  $g(t)$  – заданная достаточно гладкая функция, кроме того,  $|g(t)| \geq g_0 > 0$ .

Пусть функция  $u(x, t)$  – решение задачи Коши (1)–(3). Преобразуем обратную задачу (1)–(4). Для этого обозначим четвёртую производную  $u(x, t)$  по переменной  $x$  через  $v(x, t)$ , т.е.  $v(x, t) := u_{xxxx}(x, t)$ . Продифференцировав (1) и (2) четырежды по  $x$ , имеем

$$v_{tt} + a^2 v_{xxxx} + q(t)v = f_{xxxx}(x, t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \tag{5}$$

$$v|_{t=0} = \varphi^{(4)}(x), \quad v_t|_{t=0} = \psi^{(4)}(x), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{6}$$

Для того чтобы найти дополнительное условие для функции  $v(x, t)$ , положим  $x = 0$  в (1) и, используя равенства (3) и (4), получим

$$v|_{x=0} = \frac{1}{a^2} [f(0, t) - q(t)g(t) - g''(t)], \quad t > 0. \tag{7}$$

Через  $D_T := \{(x, t) : x \in \mathbb{R}, 0 < t < T\}$  обозначим полосу толщины  $T$ , где  $T > 0$  – произвольное фиксированное число.

**Замечание.** Пусть функции  $\varphi(x), \psi(x) \in C_b^{(4)}(\mathbb{R})$ ,  $f(x, t) \in C_b^{(4)}(D_T)$ , где  $C_b^{(4)}$  – класс ограниченных функций с точностью до производных четвёртого порядка, и верны следующие условия:

$$\frac{\partial^{(i)}}{\partial x} u(0, 0) = \varphi^{(i)}(0), \quad \frac{\partial^{(i)}}{\partial x} u_t(0, 0) = \psi^{(i)}(0), \quad i = \overline{1, 4}.$$

Тогда из (5)–(7) можно вывести задачу (1)–(4).

**2. Исследование прямой задачи.** Воспользуемся результатами работы [6], в которой решение задачи

$$\begin{aligned} u_{tt} + a^2 u_{xxxx} &= 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

построено с помощью фундаментальных решений в виде

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) G_1(x, t, \xi) d\xi + \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\xi) G_2(x, t, \xi) d\xi, \quad (8)$$

где

$$G_1(x, t, \xi) = \frac{1}{2\sqrt{\pi at}} \sin \left[ \frac{(\xi - x)^2}{4at} + \frac{\pi}{4} \right], \quad G_2(x, t, \xi) = \frac{1}{\pi a} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda^2} \sin(a\lambda^2 t) \cos(\lambda(\xi - x)) d\lambda.$$

В статье [6] показано, что функции  $G_i(x, t, \xi)$ ,  $i = 1, 2$ , удовлетворяют следующим условиям:

$$(A_1) \quad G_1(x, t, \xi) \in C^\infty(D);$$

$$(A_2) \quad G_2(x, t, \xi) \in C^\infty(D);$$

$$(B_1) \quad \lim_{t \rightarrow +0} G_1(x, t, \xi) = \infty;$$

$$(B_2) \quad \lim_{t \rightarrow +0} G_2(x, t, \xi) = 1;$$

$$(C_1) \quad \int_{-\infty}^{\infty} G_1(x, t, \xi) d\xi = 1;$$

$$(C_2) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial G_2(x, t, \xi)}{\partial t} d\xi = 1;$$

$$(C_3) \quad \int_{-\infty}^{\infty} G_2(x, t, \xi) d\xi = 2t.$$

Фактически функция  $G_1(x, t, \xi)$  является частной производной от  $G_2(x, t, \xi)$  по переменной  $t$ , т.е.  $\partial G_2(x, t, \xi) / \partial t = G_1(x, t, \xi)$ .

В уравнении (5), перенося слагаемое  $q(t)v(x, t)$  в правую часть, введём обозначение

$$F(x, t) \equiv f_{xxxx}(x, t) - q(t)v(x, t).$$

При  $F(x, t) \neq 0$  воспользуемся принципом Дюамеля и с учётом (8) для решения прямой задачи (5), (6) получим интегральное уравнение

$$v(x, t) = v_0(x, t) - \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} q(\tau)v(\xi, \tau)G_2(x, t - \tau, \xi) d\xi d\tau, \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} v_0(x, t) = & \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^{(4)}(\xi)G_1(x, t, \xi) d\xi + \int_{-\infty}^{\infty} \psi^{(4)}(\xi)G_2(x, t, \xi) d\xi + \\ & + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi\xi\xi\xi}(\xi, \tau)G_2(x, t - \tau, \xi) d\xi d\tau. \end{aligned} \quad (10)$$

Пусть  $C^m(\mathbb{R})$  – класс  $m$  раз непрерывно дифференцируемых и ограниченных в  $\mathbb{R}$  функций, а  $C_{x,t}^{m,k}(D_T)$  – класс  $m$  раз по  $x$  и  $k$  раз по  $t$  непрерывно дифференцируемых и ограниченных при каждом фиксированном  $t \in [0, T]$  в области  $D_T$  функций.

Справедлива следующая

**Лемма.** Если  $q(t) \in C[0, T]$ ,  $f(x, t) \in C_{x,t}^{6,0}(D_T)$ ,  $\varphi(x) \in C^8(\mathbb{R})$ ,  $\psi(x) \in C^6(\mathbb{R})$ , кроме того, функции  $\varphi^{(8)}(x)$ ,  $\varphi^{(6)}(x)$ ,  $\psi^{(6)}(x)$ ,  $\partial^6 f(x, t)/\partial x^6$ ,  $\varphi^{(4)}(x)$ ,  $\psi^{(4)}(x)$ ,  $f_{xxxx}(t)$ ,  $x^4\varphi^{(4)}(x)$ ,  $x^4\psi^{(4)}(x)$ ,  $x^4 f_{xxxx}(t)$ ,  $x^8\psi^{(4)}(x)$  и  $x^8 f_{xxxx}(t)$  абсолютно интегрируемы на  $\mathbb{R}$ , то существует единственное классическое решение интегрального уравнения (9) такое, что  $v(x, t) \in C_{x,t}^{4,2}(D_T)$ .

**Доказательство.** Воспользуемся методом последовательных приближений и рассмотрим последовательность функций, определённых формулами

$$v_n(x, t) = - \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} q(\tau)v_{n-1}(\xi, \tau)G_2(x, t - \tau, \xi) d\xi d\tau, \quad n = 1, 2, \dots, \tag{11}$$

где  $v_0(x, t)$  определена в (10).

Положим  $\varphi_0 = \sup_{x \in \mathbb{R}} |\varphi^{(4)}(x)|$ ,  $\psi_0 = \sup_{x \in \mathbb{R}} |\psi^{(4)}(x)|$ ,  $q_0 = \max_{0 < t \leq T} |q(t)|$ ,  $f_1 = \max_{0 < t \leq T} |f_0(t)|$ , где  $f_0(t) = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_{xxxx}(x, t)|$ . Используя (11) и условия  $(C_1)$ ,  $(C_3)$ , оценим  $v_n(x, t)$  в области  $D_T$  следующим образом:

$$|v_0(x, t)| \leq \varphi_0 + 2T\psi_0 + T^2\|f_0\| =: \lambda_0, \quad |v_1(x, t)| \leq \lambda_0 q_0 \int_0^t 2(t - \tau) d\tau = 2\lambda_0 q_0 \frac{t^2}{2!},$$

$$|v_2(x, t)| \leq \lambda_0 q_0^2 \int_0^t 2(t - \tau)\tau^2 d\tau = 2^2 \lambda_0 q_0^2 \frac{t^4}{4!}, \quad \dots$$

Таким образом, для всех  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  получим оценки

$$|v_n(x, t)| \leq \lambda_0 (2q_0)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!},$$

из которых следует, что ряд

$$v(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(x, t)$$

сходится равномерно в области  $D_T$ , так как его можно мажорировать в  $D_T$  с помощью сходящегося числового ряда

$$\lambda_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2q_0 T^2)^n}{(2n)!},$$

а значит, имеет место следующая оценка решения интегрального уравнения (9):

$$|v(x, t)| \leq \lambda_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2q_0 T^2)^n}{(2n)!} = \lambda_0 \operatorname{ch}(\sqrt{2q_0}T), \quad (x, t) \in D_T. \tag{12}$$

Теперь докажем, что решение интегрального уравнения (9) действительно является классическим решением задачи (1)–(3). Сначала проверим выполнение начальных условий.

Отметим, что при  $t \rightarrow +0$  и выполнении условий  $(A_1)$ – $(C_3)$  интегралы в правой части (10) расходятся. Введём обозначение  $\eta \equiv (\xi - x)/2\sqrt{at}$  и преобразуем эти интегралы. Если функция  $\varphi^{(4)}(x)$  абсолютно интегрируема на  $\mathbb{R}$ , то несобственные интегралы в правой части (10) сходятся равномерно при  $t \geq 0$  и  $x \in \mathbb{R}$ . Тогда, переходя к пределу при  $t \rightarrow +0$ , в силу равенства

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \sin\left(\eta^2 + \frac{\pi}{4}\right) d\eta = 1$$

получим

$$\lim_{t \rightarrow +0} v(x, t) = \varphi^{(4)}(x).$$

Для доказательства выполнения второго начального условия найдём частную производную по  $t$  от функции (9):

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_0(x, t)}{\partial t} &= \sqrt{\frac{a}{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^{(5)}(x + 2\eta\sqrt{at}) \eta \sin\left(\eta^2 + \frac{\pi}{4}\right) d\eta + \int_{-\infty}^{\infty} \psi^{(4)}(\xi) G_1(x, t, \xi) dt - \\ &\quad - \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi\xi\xi\xi}(\xi, \tau) G_1(x, t - \tau, \xi) d\xi d\tau. \end{aligned}$$

Отсюда и из приведённых выше рассуждений получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_0(x, t)}{\partial t} &= \sqrt{\frac{a}{\pi t}} \left[ -\frac{1}{2} \cos\left(\eta^2 + \frac{\pi}{4}\right) \varphi^{(5)}(x + 2\eta\sqrt{at}) \right] \Big|_{-\infty}^{\infty} + \\ &+ \frac{a}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^{(6)}(x + 2\eta\sqrt{at}) \cos\left(\eta^2 + \frac{\pi}{4}\right) d\eta + \int_{-\infty}^{\infty} \psi^{(4)}(\xi) G_1(x, t, \xi) dt - \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi\xi\xi\xi}(\xi, \tau) G_1(x, t - \tau, \xi) d\xi d\tau. \end{aligned}$$

Если  $\varphi^{(5)}(\pm\infty) = 0$ , то

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_0(x, t)}{\partial t} &= \frac{a}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^{(6)}(x + 2\eta\sqrt{at}) \cos\left(\eta^2 + \frac{\pi}{4}\right) d\eta + \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} \psi^{(4)}(\xi) G_1(x, t, \xi) dt - \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi\xi\xi\xi}(\xi, \tau) G_1(x, t - \tau, \xi) d\xi d\tau. \end{aligned}$$

Если функции  $\varphi^{(6)}(x)$  и  $\psi^{(4)}(x)$  абсолютно интегрируемы на  $\mathbb{R}$ , то, переходя к пределу при  $t \rightarrow +0$ , в силу равенства

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \cos\left(x^2 + \frac{\pi}{4}\right) dx = 0$$

находим

$$\lim_{t \rightarrow +0} \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} = \psi^{(4)}(x).$$

Если докажем, что функция  $v_0(x, t)$ , определяемая формулой (10), будет из класса (3), то в силу (11) легко видеть, что все функции  $v_n(x, t)$  будут принадлежать тому же классу. Тогда из общей теории интегральных уравнений следует, что  $v(x, t) \in C_{x,t}^{4,2}(D) \cap C_t^1(D \cup \{t = 0\}) \cap C(\bar{D})$ , т.е. функция  $v(x, t)$  является классическим решением задачи Коши (5), (6).

С этой целью вычислим производную

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v_0(x, t)}{\partial t^2} &= \sqrt{\frac{a^3}{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^{(7)}(x + 2\eta\sqrt{at}) \eta \cos\left(\eta^2 + \frac{\pi}{4}\right) d\eta + \\ &+ \sqrt{\frac{a}{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi^{(5)}(x + 2\eta\sqrt{at}) \eta \sin\left(\eta^2 + \frac{\pi}{4}\right) d\eta + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+ f_{xxxx}(x, t) - \sqrt{\frac{a}{\pi(t-\tau)}} \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi\xi\xi\xi\xi}(x + 2\zeta\sqrt{a(t-\tau)}, \tau) \zeta \sin\left(\zeta^2 + \frac{\pi}{4}\right) d\zeta d\tau = \\
 &= \sqrt{\frac{a^3}{\pi t}} \left[ \frac{1}{2} \sin\left(\eta^2 + \frac{\pi}{4}\right) \varphi^{(7)}(x + 2\eta\sqrt{at}) \right] \Big|_{-\infty}^{\infty} + \frac{a^2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^{(8)}(x + 2\eta\sqrt{at}) \sin\left(\eta^2 + \frac{\pi}{4}\right) d\eta + \\
 &+ \sqrt{\frac{a}{\pi t}} \left[ -\frac{1}{2} \cos\left(\eta^2 + \frac{\pi}{4}\right) \psi^{(5)}(x + 2\eta\sqrt{at}) \right] \Big|_{-\infty}^{\infty} - \frac{a}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi^{(6)}(x + 2\eta\sqrt{at}) \cos\left(\eta^2 + \frac{\pi}{4}\right) d\eta + \\
 &+ f_{xxxx}(x, t) + \sqrt{\frac{a}{\pi(t-\tau)}} \int_0^t \left\{ \left[ -\frac{1}{2} \cos\left(\zeta^2 + \frac{\pi}{4}\right) f_{\xi\xi\xi\xi\xi}(x + 2\zeta\sqrt{a(t-\tau)}, \tau) \right] \Big|_{-\infty}^{\infty} + \right. \\
 &\quad \left. + \sqrt{a(t-\tau)} \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi\xi\xi\xi\xi}(x + 2\zeta\sqrt{a(t-\tau)}, \tau) \cos\left(\zeta^2 + \frac{\pi}{4}\right) d\zeta \right\} d\xi.
 \end{aligned}$$

Если  $\varphi^{(7)}(\pm\infty) = 0$ ,  $\psi^{(5)}(\pm\infty) = 0$  и  $f_{xxxx}(\pm\infty, t) = 0$ , то получим выражение

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 v_0(x, t)}{\partial t^2} &= \frac{a^2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^{(8)}(x + 2\eta\sqrt{at}) \sin\left(\eta^2 + \frac{\pi}{4}\right) d\eta - \frac{a}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi^{(6)}(x + 2\eta\sqrt{at}) \cos\left(\eta^2 + \frac{\pi}{4}\right) d\eta + \\
 &+ f_{xxxx}(x, t) + \frac{a}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi\xi\xi\xi\xi}(x + 2\zeta\sqrt{a(t-\tau)}, \tau) \cos\left(\zeta^2 + \frac{\pi}{4}\right) d\zeta d\xi. \tag{13}
 \end{aligned}$$

Далее аналогично вычисляется  $\partial^4 v_0(x, t)/\partial x^4$ .

Таким образом, если функции  $\varphi^{(8)}(x)$ ,  $\psi^{(6)}(x)$  и  $\partial^6 f(x, t)/\partial x^6$  абсолютно интегрируемы на  $\mathbb{R}$ , то несобственные интегралы в (13) сходятся равномерно при всех  $x \in \mathbb{R}$  и  $t \geq 0$ . И если функции  $\varphi^{(4)}(x)$ ,  $\psi^{(4)}(x)$ ,  $f_{xxxx}(t)$ ,  $x^4\varphi^{(4)}(x)$ ,  $x^4\psi^{(4)}(x)$ ,  $x^4 f_{xxxx}(t)$ ,  $x^8\psi^{(4)}(x)$  и  $x^8 f_{xxxx}(t)$  абсолютно интегрируемы на  $\mathbb{R}$ , то несобственные интегралы в  $\partial^4 v_0(x, t)/\partial x^4$  также сходятся равномерно при всех  $x \in \mathbb{R}$  и  $t \geq 0$ . Лемма доказана.

Теперь оценим норму разности между решением исходного интегрального уравнения (9) и решением этого же уравнения с возмущёнными функциями  $\tilde{q}$ ,  $\tilde{f}_{xxxx}$ ,  $\tilde{\varphi}^{(4)}$  и  $\tilde{\psi}^{(4)}$ , определяющими  $\tilde{v}(x, t)$ :

$$\tilde{v}(x, t) = \tilde{v}_0(x, t) - \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{q}(\tau) \tilde{v}(\xi, \tau) G_2(x, t - \tau, \xi) d\xi d\tau, \tag{14}$$

где

$$\begin{aligned}
 \tilde{v}_0(x, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\varphi}^{(4)}(\xi) G_1(x, t, \xi) d\xi + \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\psi}^{(4)}(\xi) G_2(x, t, \xi) d\xi + \\
 &+ \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}_{\xi\xi\xi\xi}(\xi, \tau) G_2(x, t - \tau, \xi) d\xi d\tau. \tag{15}
 \end{aligned}$$

Тогда для  $v - \tilde{v}$  с помощью (9) и (14) получим линейное интегральное уравнение

$$v(x, t) - \tilde{v}(x, t) = v_0(x, t) - \tilde{v}_0(x, t) - \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} (q(\tau) - \tilde{q}(\tau)) v(\xi, \tau) G_2(x, t - \tau, \xi) d\xi d\tau -$$

$$- \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} (v(\xi, \tau) - \tilde{v}(\xi, \tau)) \tilde{q}(\tau) G_2(x, t - \tau, \xi) d\xi d\tau,$$

откуда выводится следующее неравенство:

$$|v(x, t) - \tilde{v}(x, t)| \leq |v_0(x, t) - \tilde{v}_0(x, t)| + \lambda_0 \operatorname{ch}(\sqrt{2q_0 T}) \|q - \tilde{q}\| + \tilde{q}_0 \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} |(v(\xi, \tau) - \tilde{v}(\xi, \tau))| G_2(x, t - \tau, \xi) d\xi d\tau, \tag{16}$$

где  $\tilde{q}_0 = \max_{t \in [0, T]} |\tilde{q}_0(t)|$ . Из равенств (10) и (15) следует оценка

$$|v_0(x, t) - \tilde{v}_0(x, t)| \leq \|\varphi^{(4)} - \tilde{\varphi}^{(4)}\| + 2T \|\psi^{(4)} - \tilde{\psi}^{(4)}\| + \frac{T^2}{2} \|f_{xxxx} - \tilde{f}_{xxxx}\|$$

или

$$|v(x, t) - \tilde{v}(x, t)|_0 \leq \sigma (\|\varphi^{(4)} - \tilde{\varphi}^{(4)}\| + \|\psi^{(4)} - \tilde{\psi}^{(4)}\| + \|f_{xxxx} - \tilde{f}_{xxxx}\| + \|q - \tilde{q}\|),$$

где  $\sigma = \max\{1, \tilde{q}_0, 2T, T^2/2, \lambda_0 \operatorname{ch}(\sqrt{2q_0 T})\}$ .

Применив метод последовательных приближений к неравенству (16)

$$|v(x, t) - \tilde{v}(x, t)|_n \leq \tilde{q}_0 \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} |v(\xi, \tau) - \tilde{v}(\xi, \tau)| G_2(x, t - \tau, \xi) d\xi d\tau, \quad n \in \mathbb{N},$$

получим оценку

$$|v(x, t) - \tilde{v}(x, t)| \leq \sigma \lambda_0 \operatorname{ch}(\sqrt{2q_0 T}) (\|\varphi^{(4)} - \tilde{\varphi}^{(4)}\| + \|\psi^{(4)} - \tilde{\psi}^{(4)}\| + \|f_{xxxx} - \tilde{f}_{xxxx}\| + \|q - \tilde{q}\|), \tag{17}$$

которая будет использована в следующем пункте. Неравенство (17) является оценкой устойчивости решения задачи Коши (5), (6), единственность которого также следует из (17).

**3. Исследование обратной задачи (5)–(7).** Положив в (9)  $x = 0$  и использовав дополнительное условие (7), после несложных преобразований получим следующее интегральное уравнение для определения  $q(t)$ :

$$q(t) = q_0(t) + \frac{a^2}{g(t)} \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} q(\tau) v(\xi, \tau) G_2(x, t - \tau, \xi) d\xi d\tau, \tag{18}$$

где

$$q_0(t) = \frac{1}{g(t)} \left[ f(0, t) - g''(t) - a^2 \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^{(4)}(\xi) G_1(x, t - \tau, \xi) d\xi - a^2 \int_{-\infty}^{\infty} \psi^{(4)}(\xi) G_2(x, t - \tau, \xi) d\xi - a^2 \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi\xi\xi\xi}(\xi, \tau) G_2(x, t - \tau, \xi) d\xi d\tau \right].$$

Решение интегрального уравнения (9) зависит от функции  $q$ , т.е.  $v = v(x, t; q)$ . Введём оператор  $A$ , определяя его правой частью (18):

$$A[q](t) = q_0(t) + \frac{a^2}{g(t)} \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} q(\tau) v(\xi, \tau; q) G_2(x, t - \tau, \xi) d\xi d\tau. \tag{19}$$

Тогда уравнение (18) запишется в виде

$$q(t) = A[q](t). \tag{20}$$

Пусть  $\|q_{00}\| = \max_{0 < t \leq T} |q_0(t)|$ . Зафиксируем число  $\rho > 0$  и рассмотрим шар

$$B_T(q_0, \rho) := \{q(t) : q(t) \in C[0, T], \|q - q_0\| \leq \rho\}.$$

**Теорема 1.** *Если выполнены условия леммы,  $g(t) \in C^2[0, T]$ ,  $\|g(t)\| \geq g_0 > 0$ ,  $\varphi(0) = g(0)$  и  $\psi(0) = g'(0)$ , то существует такое число  $T^* \in (0, T]$ , что обратная задача (1)–(4) имеет единственное решение  $q(t) \in [0, T^*]$ .*

**Доказательство.** Докажем сначала, что для достаточно малого  $T > 0$  оператор  $A$  переводит шар  $B_T(q_0, \rho)$  в себя, т.е. из условия  $q(t) \in B_T(q_0, \rho)$  следует, что  $A[q](t) \in B_T(q_0, \rho)$ . Действительно, для любой функции  $q(t) \in C[0, T]$  функция  $A[q](t)$ , определяемая формулой (19), принадлежит классу  $C[0, T]$ . Более того, оценивая норму разностей, находим, что

$$\|A[q] - q_0\| \leq \frac{a^2 \lambda_0 q_0 T^2}{g_0} \operatorname{ch}(\sqrt{2q_0}T).$$

Здесь мы воспользовались оценкой (12). Заметим, что функция, стоящая в правой части этого неравенства, монотонно возрастает с увеличением  $T$ , а из того что функция  $q(t)$  принадлежит шару  $B_T(q_0, \rho)$  следует неравенство

$$q_0 \leq \rho + q_{00}. \tag{21}$$

Следовательно, мы только усилим неравенство, если заменим  $q_0$  в этом соотношении выражением  $\rho + q_{00}$ . Выполнив эту замену, получим оценку

$$\|A[q] - q_0\| \leq \frac{a^2 \lambda_0 (\rho + q_{00}) T^2}{g_0} \operatorname{ch}(\sqrt{2(\rho + q_{00})}T).$$

Пусть  $T_1$  – положительный корень уравнения

$$R_1(T) = \frac{a^2 \lambda_0 (\rho + q_{00}) T^2}{g_0} \operatorname{ch}(\sqrt{2(\rho + q_{00})}T) = \rho.$$

Тогда для  $T \in [0, T_1]$  имеем  $A[q](t) \in B_T(q_0, \rho)$ .

Теперь рассмотрим две функции  $q(t)$  и  $\tilde{q}(t)$ , принадлежащие шару  $B_T(q_0, \rho)$ , и оценим расстояние между их образами  $A[q](t)$  и  $A[\tilde{q}](t)$  в пространстве  $C[0, T]$ . Функция  $\tilde{v}(x, t)$ , соответствующая  $\tilde{q}(t)$ , удовлетворяет интегральному уравнению (14) с функциями  $\varphi^{(4)} = \tilde{\varphi}^{(4)}$  и  $f_{xxxx} = \tilde{f}_{xxxx}$ . Составим разность  $A[q](t) - A[\tilde{q}](t)$  с помощью уравнений (9), (14) и оценим её норму

$$\|A[q](t) - A[\tilde{q}(t)]\| \leq \frac{a^2 T^2}{2g_0} [\|v\| \|q - \tilde{q}\| + \|\tilde{q}\| \|v - \tilde{v}\|].$$

Используя оценки (12) и (17) с  $\varphi^{(4)} = \tilde{\varphi}^{(4)}$  и  $f_{xxxx} = \tilde{f}_{xxxx}$ , запишем последнее неравенство в виде

$$\|A[q](t) - A[\tilde{q}(t)]\| \leq \frac{a^2 T^2}{2g_0} \lambda_0 \operatorname{ch}(\sqrt{2q_0}T) (1 + \sigma \tilde{q}_0) \|q - \tilde{q}\|. \tag{22}$$

Функции  $q(t)$  и  $\tilde{q}(t)$  принадлежат шару  $B_T(q_0, \rho)$ , поэтому для каждой из них выполняется неравенство (21). Отметим, что функции в правой части (22) при множителе  $\|q - \tilde{q}\|$  монотонно возрастают с увеличением  $\|q\|$ ,  $\|\tilde{q}\|$  и  $T$ .

Следовательно, замена  $\|q\|$  и  $\|\tilde{q}\|$  в неравенстве (22) (в том числе в  $\sigma$ ) на  $\rho + q_{00}$  только усилит его. Таким образом, имеем

$$\|A[q](t) - A[\tilde{q}(t)]\| \leq \frac{a^2 T^2}{2g_0} \lambda_0 \operatorname{ch}(\sqrt{2(\rho + q_{00})}T) (1 + \sigma(\rho + q_{00})) \|q - \tilde{q}\|.$$



Пусть  $T_2$  – положительный корень уравнения

$$R_2(T) = \frac{a^2 T^2}{2g_0} \lambda_0 \operatorname{ch}(\sqrt{2(\rho + q_{00})}T)(1 + \sigma(\rho + q_{00})) = 1.$$

Тогда для  $T \in [0, T_2]$  расстояние между функциями  $A[q](t)$  и  $A[\tilde{q}](t)$  в пространстве  $C[0, T]$  не превышает расстояния между функциями  $q(t)$  и  $\tilde{q}(t)$ , умноженного на  $R_2(T) < 1$ . Следовательно, если выбрать  $T^* = \min(T_1, T_2)$ , то оператор  $A$  будет сжимающим в шаре  $B_T(q_0, \rho)$ . Следовательно, согласно теореме Банаха, оператор  $A$  имеет единственную неподвижную точку в шаре  $B_T(q_0, \rho)$ , т.е. существует единственное решение уравнения (20). Теорема доказана.

Пусть  $T$  – произвольное положительное фиксированное число. Рассмотрим множество  $\Omega(\delta_0)$  ( $\delta_0 > 0$  – некоторое фиксированное число) заданных функций  $f, \varphi, \psi, g$ , для которых выполнены все условия теоремы 1 и

$$\max\{\|f\|_{C_{x,t}^{6,0}(D_T)}, \|\varphi\|_{C^8(\mathbb{R})}, \|\psi\|_{C^6(\mathbb{R})}, \|g\|_{C^2[0,T]}\} \leq \delta_0.$$

Через  $Q(\delta_1)$  обозначим класс функций  $q(t) \in C[0, T]$ , удовлетворяющих неравенству  $\|q\| \leq \delta_1$  с некоторым фиксированным положительным числом  $\delta_1$ .

**Теорема 2.** Пусть функции  $f, \varphi, \psi, g, \tilde{f}, \tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{g} \in \Omega(\delta_0)$  и  $q, \tilde{q} \in Q(\delta_1)$ . Тогда для решения обратной задачи справедлива следующая оценка устойчивости:

$$\|q - \tilde{q}\| \leq c(\|f - \tilde{f}\|_{C_{x,t}^{6,0}(D_T)} + \|\varphi - \tilde{\varphi}\|_{C^8(\mathbb{R})} + \|\psi - \tilde{\psi}\|_{C^6(\mathbb{R})} + \|g - \tilde{g}\|_{C^2[0,T]}), \quad (23)$$

где постоянная  $c$  зависит только от  $T, \delta_0$  и  $\delta_1$ .

**Доказательство.** Используя (18), запишем уравнение для  $\tilde{q}(t)$  и составим разность  $q(t) - \tilde{q}(t)$ . Оценивая это выражение с учётом неравенств (12) и (17), получаем

$$\begin{aligned} |q - \tilde{q}(t)| &\leq c_0(\|f - \tilde{f}\|_{C_{x,t}^{6,0}(D_T)} + \|\varphi - \tilde{\varphi}\|_{C^8(\mathbb{R})} + \|\psi - \tilde{\psi}\|_{C^6(\mathbb{R})} + \|g - \tilde{g}\|_{C^2[0,T]}) + \\ &+ c_1 \int_0^t |q - \tilde{q}(\tau)| d\tau, \quad t \in [0, T], \end{aligned} \quad (24)$$

где  $c_0$  и  $c_1$  зависят от тех же констант, что и  $c$ . Из (24), используя неравенство Гронуолла, получаем неравенство

$$|q - \tilde{q}(t)| \leq c_0 \exp(c_1 T)(\|f - \tilde{f}\|_{C_{x,t}^{6,0}(D_T)} + \|\varphi - \tilde{\varphi}\|_{C^8(\mathbb{R})} + \|\psi - \tilde{\psi}\|_{C^6(\mathbb{R})} + \|g - \tilde{g}\|_{C^2[0,T]}), \quad t \in [0, T],$$

откуда следует оценка (23), если положить  $c = c_0 \exp(c_1 T)$ . Теорема доказана.

Из теоремы 2 следует теорема единственности для любого  $T > 0$ .

**Теорема 3.** Пусть функции  $q, f, \varphi, \psi, g$  и  $\tilde{q}, \tilde{f}, \tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{g}$  имеют тот же смысл, что и в теореме 1, причём если  $q = \tilde{q}, f = \tilde{f}, \varphi = \tilde{\varphi}, \psi = \tilde{\psi}, g = \tilde{g}$  для  $(x, t) \in D_T$ , то  $q(t) = \tilde{q}(t), t > 0$ .

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (Соглашение № 075-02-2023-939).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Strutt J., Baron Rayleigh.* The Theory of Sound. London, 1877.
2. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М., 1966.
3. *Крылов А.Н.* Вибрация судов. М., 2012.
4. *Ascanelli A., Cicognani M., Colombini F.* The global Cauchy problem for a vibrating beam equation // J. Differ. Equat. 2009. V. 47. P. 1440–1451.

5. *Сабитов К.Б.* К теории начально-граничных задач для уравнения стержней и балок // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53. № 1. С. 89–100.
6. *Сабитов К.Б.* Начальная задача для уравнения колебаний балки // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53. № 5. С. 665–671.
7. *Ватульян А.О., Васильев Л.В.* Об определении параметров закрепления неоднородной балки при наличии затухания // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16. № 4. С. 449–456.
8. *Ахтямов А.М., Ильязов М.А.* Модель изгиба балки с надрезом: прямая и обратная задачи // Прикл. механика и техн. физика. 2013. Т. 54. № 1. С. 152–162.
9. *Ватульян А.М., Бурьян А.Ю., Осипов А.В.* Об идентификации переменной жёсткости при анализе поперечных колебаний балки // Вестн. Донского гос. техн. ун-та. 2010. Т. 10. № 6. С. 825–833.
10. *Loktionov A.P.* Inverse Cauchy problem for beams in building structures // Building and Reconstruction. 2022. V. 2. P. 13–25.
11. *Дурдиев У.Д.* Обратная задача по определению неизвестного коэффициента в уравнении колебания балки // Дифференц. уравнения. 2022. Т. 58. № 1. С. 37–44.
12. *Сабитов К.Б.* Начально-граничные задачи для уравнения колебаний балки с учётом её вращательного движения при изгибе // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 3. P. 364–374.
13. *Сабитов К.Б., Фадеева О.В.* Начально-граничная задача для уравнения вынужденных колебаний консольной балки // Вестн. Самарского гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2021. Т. 25. № 1. С. 51–66.
14. *Marinov T.T., Vatsala A.S.* Inverse problem for coefficient identification in the Euler–Bernoulli equation // Comput. and Math. with Appl. 2008. V. 56. P. 400–410.
15. *Artur Maciag, Anna Pawinska.* Solution of the direct and inverse problems for beam // Comp. Appl. Math. 2016. V. 35. P. 187–201.
16. *Maciag A., Pawinska A.* Solving direct and inverse problems of plate vibration by using the trefftz functions // J. of Theoretical and Appl. Mechanics. 2013. V. 51. № 3. P. 543–552.
17. *Guojin Tan, Jinghui Shan, Chunli Wu, Wensheng Wang.* Direct and inverse problems on free vibration of cracked multiple I-section beam with different boundary conditions // Adv. in Mech. Engin. 2017. V. 9. № 11. P. 1–17.
18. *Moaveni S., Hyde R.* Reconstruction of the area-moment-of-inertia of a beam using a shifting load and the end-slope data // Inverse Problems in Science and Engineering. 2016. V. 24. № 6. P. 990–1010.
19. *Jin-De Chang, Bao-Zhu Guo.* Identification of variable spacial coefficients for a beam equation from boundary measurements // Automatica. 2007. V. 43. P. 732–737.
20. *Cheng-Hung Huang, Chih-Chun Shih.* An inverse problem in estimating simultaneously the time-dependent applied force and moment of an Euler–Bernoulli beam // CMES. 2007. V. 21. № 3. P. 239–254.
21. *Hiroaki Katori.* Inverse problems for an Euler–Bernoulli beam: identification of bending rigidity and external loads // World J. of Mechanics. 2018. V. 8. P. 192–199.
22. *Карчевский А.Л.* Аналитические решения дифференциального уравнения поперечных колебаний кусочно-однородной балки в частотной области для краевых условий любого вида // Сиб. журн. индустр. математики. 2020. Т. 23. № 4. С. 48–68.
23. *Доев В.С.* Поперечные колебания балок. М., 2016.
24. *Baysal O., Hasanov A.* Solvability of the clamped Euler–Bernoulli beam equation // Appl. Math. Lett. 2019. V. 93. P. 85–90.
25. *Романов В.Г.* Обратные задачи математической физики. М., 1984.
26. *Дурдиев Д.К., Тотиева Ж.Д.* Задача об определении одномерного ядра уравнения электровязкоупругости // Сиб. мат. журн. 2017. Т. 58. № 3. С. 553–572.
27. *Дурдиев Д.К., Рахмонов А.А.* Задача об определении двумерного ядра в системе интегродифференциальных уравнений вязкоупругой пористой среды // Сиб. журн. индустр. математики. 2020. Т. 23. № 2. С. 63–80.
28. *Durdiev D., Rahmonov A.* A multidimensional diffusion coefficient determination problem for the time-fractional equation // Turkish J. of Math. 2022. V. 46. № 6. P. 2250–2263.
29. *Карчевский А.Л., Фатьянов А.Г.* Численное решение обратной задачи для системы упругости с последствием для вертикально неоднородной среды // Сиб. журн. вычисл. математики. 2001. Т. 4. № 3. С. 259–268.
30. *Карчевский А.Л.* Определение возможности горного удара в угольном пласте // Сиб. журн. индустр. математики. 2017. Т. 20. № 4. С. 35–43.
31. *Дурдиев У.Д.* Численное определение зависимости диэлектрической проницаемости слоистой среды от временной частоты // Сиб. электрон. мат. изв. 2020. Т. 17. С. 179–189.

32. *Дурдиев У.Д.* Задача об определении коэффициента реакции в дробном уравнении диффузии // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 9. С. 1220–1229.
33. *Дурдиев У.Д.* Обратная задача для системы уравнений вязкоупругости в однородных анизотропных средах // Сиб. журн. индустр. математики. 2019. Т. 22. № 4. С. 26–32.
34. *Durdiev U.D.* A problem of identification of a special 2D memory kernel in an integro-differential hyperbolic equation // Eurasian J. of Math. and Comput. Appl. 2019. V. 7. № 2. P. 4–19.
35. *Durdiev U.D., Totieva Zh.D.* A problem of determining a special spatial part of 3D memory kernel in an integro-differential hyperbolic equation // Math. Methods in the Appl. Sci. 2019. V. 42. № 18. P. 7440–7451.
36. *Durdiev D.K., Zhumaev Zh.Zh.* Memory kernel reconstruction problems in the integro-differential equation of rigid heat conductor // Math. Methods in the Appl. Sci. 2022. V. 45. № 14. P. 8374–8388.
37. *Durdiev D.K., Zhumaev Zh.Zh.* One-dimensional inverse problems of finding the kernel of integrodifferential heat equation in a bounded domain // Ukr. Math. J. 2022. V. 73. № 11. P. 1723–1740.

Бухарский государственный университет,  
Узбекистан,  
Бухарское отделение Института математики  
имени В.И. Романовского, Узбекистан

Поступила в редакцию 08.12.2022 г.  
После доработки 27.02.2023 г.  
Принята к публикации 22.03.2023 г.