
УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.22

ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА С СИНГУЛЯРНЫМ Δ_B -ОПЕРАТОРОМ КИПРИЯНОВА

© 2023 г. Л. Н. Ляхов, Ю. Н. Булатов,
С. А. Рощупкин, Е. Л. Санина

Функции, удовлетворяющие уравнению Лапласа для Δ_B -оператора Киприянова, называются K -гармоническими. В работе приведены и доказаны следующие свойства K -гармонических функций: интегральное представление типа Грина C^2 -функций, теорема о сферическом среднем, принцип максимума. В качестве следствия доказана единственность решения внутренней и внешней задач Дирихле.

DOI: 10.31857/S0374064123040052, EDN: ANDKDD

1. Основные обозначения и определения. Через \mathbb{R}_n будем обозначать евклидово пространство точек $x = (x_1, \dots, x_n)$, а через \mathbb{R}_n^+ — n -полупространство, определённое неравенствами $x_i > 0$, $i = \overline{1, n}$. Пусть мультииндекс $-\gamma = (-\gamma_1, \dots, -\gamma_n)$ имеет фиксированные отрицательные параметры: $-1 < -\gamma_i < 0$. Сингулярный дифференциальный оператор

$$\Delta_{B_{-\gamma}} = \sum_{i=1}^n B_{-\gamma_i}, \quad B_{-\gamma_i} = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} - \frac{\gamma_i}{x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} = x^{\gamma_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(x^{-\gamma_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \right), \quad \gamma_i > 0,$$

называется *оператором Киприянова* [1]. Данный оператор целесообразно применять к функциям, чётным по каждой координате своего аргумента, так как в этом случае существует

$$\lim_{x_i \rightarrow 0} \frac{1}{x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i^2} \Big|_{x_i=0}.$$

Пусть $\Omega^+ \subset \mathbb{R}_n^+$. Учитывая особенность операторов Бесселя, будем полагать, что область Ω^+ прилегает к сингулярным координатным гиперплоскостям $x_i = 0$, $i = \overline{1, n}$, оператора Δ_B . Тогда граница области Ω^+ состоит из двух частей: $\Gamma^+ \in \mathbb{R}_n^+$ и $\Gamma^0 \in \overline{\mathbb{R}_n^+}$. Область $\Omega = \Omega^+ \cup \Omega^-$ получена объединением Ω^+ со своими зеркальными отражениями от координатных гиперплоскостей $x_i = 0$. Граница Γ области Ω предполагается гладкой в окрестности $\Gamma \cap \Gamma^0$ (условие гладкости границы И.А. Киприянова [2, § 3.1]). Это условие также предполагает, что рассматриваемые функции в области Ω^+ должны иметь гладкое чётное продолжение через границу Γ^0 по отношению к каждой координате x_i . В связи с этим вводим следующее

Определение 1. Функцию $f = f(x)$, определённую в m -полупространстве $\mathbb{R}_m^+ \subset \mathbb{R}_n$ ($m \leq n$), будем называть *m -чётной (по Киприянову)*, если она допускает чётное продолжение по каждой из координат $x_i \in \mathbb{R}_m^+$, $i = \overline{1, m}$, своего аргумента с сохранением класса функций своей принадлежности.

В частности, если $u \in C^k(x_i \in [0, \infty))$, то u — i -чётная функция, если все её производные по x_i , $i = \overline{1, n}$, нечётного порядка $\ell \leq k$ равны нулю при $x_i = +0$. Такое определение чётности введено в монографии [2, с. 21]. Функции, удовлетворяющие определению 1, принято называть *чётными по Киприянову*.

Из определения 1 вытекает, что каждую из областей Ω^+ и Ω^- , как правило, удобно считать частично замкнутыми, т.е. считать границу Γ^0 границей симметрии, и поэтому полагаем $\Omega^+ = \Omega^+ \cup \Gamma^0$ и $\Omega^- = \Omega^- \cup \Gamma^0$. Точки, принадлежащие $\Omega^+ = \Omega^+ \cup \Gamma^0$ или $\Omega^- = \Omega^- \cup \Gamma^0$,

будем называть *s-внутренними*. Аналогично подобласть $\Omega_*^+ = \Omega_*^+ \cup \Gamma_*^0$ области Ω^+ , имеющую общую границу $\Gamma_*^0 \subset \Gamma^0$, будем называть *s-подобластью* области Ω^+ . Это же касается и соответствующей подобласти области Ω^- .

Заметим также, что гладкость границы Γ области $\Omega = \Omega^+ \cup \Omega^-$ в окрестности сингулярных гиперплоскостей $x_i = 0$ связана с возможностью корректно ввести локальные координаты с центром в точках пересечения границы Γ с координатной гиперплоскостью $x_i = 0$, $i = \overline{1, n}$.

Определение 2. Функция $u \in C^2(\Omega^+) \cap C^1(\overline{\Omega^+})$ называется *K-гармонической функцией* в области Ω^+ , если $\Delta_{B_{-\gamma}} u = 0$ в каждой точке Ω^+ .

Важную роль в наших рассуждениях играет многомерный \mathbb{T} -псевдосдвиг

$$\mathbb{T}^y f(x) = \prod_{i=1}^n \mathbb{T}_{x_i}^{y_i} f(x), \quad x, y \in \mathbb{R}_n^+,$$

одномерные составляющие которого определены в [3] формулами

$$\mathbb{T}_{x_i}^{y_i} f(x) = \frac{\Gamma((\gamma_i + 3)/2)}{\Gamma(1/2)\Gamma((\gamma_i + 2)/2)} \int_0^\pi \frac{(x_i y_i)^{\gamma_i + 1} f(x_i \overset{\alpha_i}{\rightarrow} y_i, x^i)}{(x_i \overset{\alpha_i}{\rightarrow} y_i)^{\gamma_i + 1}} \sin^{\gamma_i + 1} \alpha_i d\alpha_i, \tag{1}$$

где для сокращения записи положили

$$x^i = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n), \quad x_i \overset{\alpha_i}{\rightarrow} y_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2 - 2x_i y_i \cos \alpha_i}.$$

Конструкция (1) возникла в работе [3] в виде интегрального оператора, связывающего решения $u = \mathbb{J}_\mu$ сингулярного уравнения Бесселя $B_{-\gamma} u(s) + t^2 u(s) = 0$ разных аргументов ($s = x_i$ и $s = y_i$), в виде теоремы сложения \mathbb{J}_μ -функций Бесселя

$$\mathbb{J}_{\mu_1}(\xi t) \mathbb{J}_\mu(\eta t) = \mathbb{T}_\xi^\eta \mathbb{J}_\mu(x_i t), \quad \mu_i = \frac{\gamma_i + 1}{2}.$$

Отметим, что оператор (1) связан с оператором обобщённого сдвига Пуассона [4]

$$T_{x_i}^{y_i} f(x) = \frac{\Gamma((\gamma_i + 3)/2)}{\Gamma(1/2)\Gamma((\gamma_i + 2)/2)} \int_0^\pi f(x_i \overset{\alpha_i}{\rightarrow} y_i, x^i) \sin^{\gamma_i + 1} \alpha_i d\alpha_i$$

формулой

$$\mathbb{T}_{x_i}^{y_i} = (x_i y_i)^{\gamma_i + 1} T_{x_i}^{y_i} (x_i^{-(\gamma_i + 1)} f(x_i, x^i)),$$

которая, по сути, и применяется в статье [3].

Основным свойством \mathbb{T} -псевдосдвига, используемым в этой работе, является равенство*)

$$B_{-\gamma_i} \mathbb{T}_{x_i}^{y_i} f(x) = \mathbb{T}_{x_i}^{y_i} B_{-\gamma_i} f(x),$$

из которого в многомерном случае вытекает теорема о коммутуируемости \mathbb{T} -псевдосдвига и оператора Киприянова $\Delta_{B_{-\gamma}}$:

$$\Delta_{B_{-\gamma}} \mathbb{T}^y f(x) = \mathbb{T}^y \Delta_{B_{-\gamma}} f(x), \quad x, y \in \mathbb{R}_n^+.$$

Введём весовую билинейную форму

$$(u, v)_{-\gamma} = \int_{\mathbb{R}_n^+} u(x)v(x)x^{-\gamma} dx, \quad x^{-\gamma} = \prod_{i=1}^n x_i^{-\gamma_i}$$

*) Для обобщённых сдвигов, определяемых формулой Пуассона [4], это свойство доказано в книге [2, формула (1.8.5)] и в общем случае в работе [5].

на функциональном пространстве $L_2^\gamma = \{f(x) : x^{-\gamma}f(x) \in \mathbb{R}_n^+\}$ (обычно называемым *пространством Лебега–Киприянова*).

Операторы \mathbb{T} -псевдосдвига и оператор Киприянова $\Delta_{B_{-\gamma}}$ симметричны (см. [3]) в следующем смысле:

$$(\Delta_{B_{-\gamma}}u, v)_{-\gamma} = (u, \Delta_{B_{-\gamma}}v)_{-\gamma}, \quad (\mathbb{T}^y u(x), v(x))_{-\gamma} = (u, \mathbb{T}^y v(x))_{-\gamma}.$$

Более востребованным в этих исследованиях оказался оператор

$$\mathbb{T}^* y = x^{\gamma+1} \mathbb{T}^y, \tag{2}$$

где $x^{\gamma+1} = \prod_{i=1}^n x_i^{\gamma_i+1}$, $\gamma_i+1 > 1$, одномерные составляющие которого определены равенством

$$\mathbb{T}_{x_i}^{*y_i} f(x) = \frac{\Gamma((\gamma_i + 3)/2)}{\Gamma(1/2)\Gamma((\gamma_i + 2)/2)} \int_0^\pi \frac{y_i^{\gamma_i+1} f(x_i \overset{\alpha_i}{\rightarrow} y_i)}{(x_i \overset{\alpha_i}{\rightarrow} y_i)^{\gamma_i+1}} \sin^{\gamma_i+1} \alpha_i d\alpha_i. \tag{3}$$

Б.М. Левитан ввёл понятие “оператора обобщённого сдвига”, который должен удовлетворять четырём условиям (см. [6, с. 17–18]). Оператор (1) не удовлетворяет условиям 2° и 4° из этой книги*), поэтому называется (как и в [3]) *\mathbb{T} -псевдосдвигом*. Но он симметричен: $\mathbb{T}_x^y = \mathbb{T}_y^x$, что важно при исследовании свёрток В.А. Какичева на основе \mathbb{T} -псевдосдвига (см. [7, 8]).

Оператор $\mathbb{T}_{x_i}^{*y_i}$, напротив, не симметричен, но удовлетворяет условию 2°, где роль “единичного” элемента играет точка $x_i = 0$, т.е. именно для этой точки выполнено равенство

$$\mathbb{T}^* y f(0) = f(y).$$

Доказательство достаточно просто следует из формулы (1), поскольку

$$(x_i \overset{\alpha_i}{\rightarrow} y_i)|_{x_i=0} = \sqrt{y_i^2} = y_i > 0.$$

Условие 4° Б.М. Левитана в определении оператора \mathbb{T}^* в нашей работе заменено более простым в доказательстве условием ограниченности интегрируемой функции: если $f(x_i, x^i) \in C$ ($x_i \in [0, \infty)$) и $\max_{x_i \in [0, \infty)} f(x) = M$, то $\max_{x_i \in [0, \infty)} \mathbb{T}^* y f(x) = M$. Это утверждение доказано далее в лемме 3.

Отметим, что в более ранних работах Б.М. Левитана условием 4° было именно условие “ограниченности в лебеговых классах функций” (см., например, работу [9]).

На основе изложенного выше будем называть оператор (2) *обобщённым \mathbb{T}^* -сдвигом*. По-видимому, \mathbb{T}^* -сдвиг принадлежит классу обобщённых сдвигов Б.М. Левитана (т.е. выполняются все условия 1°–4° [6]), но в рамках этих исследований необходимо лишь условие ограниченности \mathbb{T}^* -сдвига непрерывной функции.

2. K -формулы Грина. Многие свойства K -гармонических функций вытекают из соответствующих аналогов формул Грина, отвечающих оператору $\Delta_{B_{-\gamma}}$ (*K -формулы Грина*).

Пусть u и v – n -чётные функции, принадлежащие классу функций $C^2(\Omega^+) \cap C^1(\overline{\Omega^+})$, и $x^{-\gamma} = \prod_{i=1}^n x_i^{-\gamma_i}$, $-\gamma_i < -\gamma_i < 0$.

Утверждение. Для $\Delta_{B_{-\gamma}}$ оператора Киприянова справедлива первая K -формула Грина

$$\int_{\Omega^+} v \Delta_{B_{-\gamma}} u x^{-\gamma} dx = - \int_{\Omega^+} \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} x^{-\gamma} dx + \int_{\Gamma^+} v \frac{\partial u}{\partial \bar{\nu}} x^{-\gamma} d\Gamma^+, \tag{4}$$

где $\bar{\nu}$ – направление внешней нормали к границе Γ^+ области Ω^+ .

*) **Условие 2°.** Функция $f \in C$ и существует “единичный” элемент s_0 такой, что $T^{s_0} f(t) = f(t)$.

Условие 4°. Функция $f \in C$, тогда $F(s, t) = T^s f(t)$ непрерывна по совокупности точек (s, t) .

Доказательство. Имеем

$$\int_{\Omega^+} v \Delta_{B^{-\gamma}} u x^{-\gamma} dx = \int_{\Omega^+} v \left(\sum_{i=1}^n x_i^{\gamma_i} \frac{\partial}{\partial x_i} x_i^{-\gamma_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \prod_{k=1}^n x_k^{-\gamma_k} dx = \int_{\Omega^+} v \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} x^{-\gamma_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n x_k^{-\gamma_k} dx.$$

Применив формулу интегрирования по частям, получим

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^+} v \Delta_{B^{-\gamma}} u x^{-\gamma} dx &= \int_{\Gamma^+} v \left(\sum_{i=1}^n x^{-\gamma_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} \cos(\nu, x_i) \right) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n x_k^{-\gamma_k} d\Gamma^+ - \\ &- \int_{\Omega^+} \sum_{k=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial v}{\partial x_k} x^\gamma dx = \int_{\Gamma^+} v \frac{\partial u}{\partial \bar{\nu}} \prod_{k=1}^n x_k^{-\gamma_k} d\Gamma^+ - \int_{\Omega^+} \sum_{k=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial v}{\partial x_k} x^\gamma dx. \end{aligned}$$

Утверждение доказано.

Приведём несколько простых следствий из равенства (4).

Если в (4) $u = v$, то

$$\int_{\Omega^+} u \Delta_{B^{-\gamma}} u x^{-\gamma} dx = - \int_{\Omega^+} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 x^{-\gamma} dx + \int_{\Gamma^+} u \frac{\partial u}{\partial \bar{\nu}} x^{-\gamma} dx. \tag{5}$$

Если в (4) $v = 1$, тогда

$$\int_{\Omega^+} \Delta_{B^{-\gamma}} u x^{-\gamma} dx = \int_{\Gamma^+} \frac{\partial u}{\partial \bar{\nu}} x^{-\gamma} d\Gamma^+. \tag{6}$$

Если в (6) функция u K -гармоническая, то из определения 2 следует равенство

$$\int_{\Gamma^+} \frac{\partial u}{\partial \bar{\nu}} x^{-\gamma} d\Gamma^+ = 0. \tag{7}$$

Условие K -гармоничности. Если равенство (7) справедливо в любой s -подобласти области Ω^+ , то u – K -гармоническая функция в Ω^+ .

Действительно, если функция u K -гармоническая в Ω^+ , то равенство (7) выполнено в любой s -подобласти области Ω^+ , что с очевидностью вытекает из (6).

Наоборот, пусть равенство (7) выполняется в любой s -подобласти области Ω^+ . Тогда из (6) следует, что $\Delta_{B^{-\gamma}} u = 0$ в любой s -внутренней точке области Ω^+ , т.е. выполнено требование определения K -гармоничности функции u в области Ω^+ .

Формулы (5)–(7) называют следствиями из первой K -формулы Грина (4) (чаще просто K -формулами Грина). Вторая K -формула Грина получается из (4) после интегрирования по частям в объёмном интеграле и применения обычной формулы Грина:

$$\int_{\Omega^+} (v \Delta_{B^{-\gamma}} u - u \Delta_{B^{-\gamma}} v) x^{-\gamma} dx = \int_{\Gamma^+} \left(v \frac{\partial u}{\partial \bar{\nu}} - u \frac{\partial v}{\partial \bar{\nu}} \right) x^\gamma d\Gamma^+.$$

3. Интегральное представление Грина n -чётных функций. В работе [1] получено следующее представление оператора Киприянова в сферических координатах $x = r\theta$, $|\theta = 1|$:

$$\Delta_{B^{-\gamma}} = B_{n-|\gamma|-1} - \frac{1}{r^2} \Delta_{B^{-\gamma}}(\theta), \tag{8}$$

где

$$B_{n-|\gamma|-1} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{n-|\gamma|-1}{r} \frac{\partial}{\partial r},$$

а $\Delta_{B-\gamma}(\theta)$ – оператор Киприянова–Бельтрами на сфере.

Используя (8), нетрудно доказать, что функция $v = |x|^{2-n+|\gamma|}$ при $n-|\gamma| > 2$ и $|x| \neq 0$ является K -гармонической. Действительно, переходя в выражении $\Delta_{B-\gamma}|x|^{2-n+|\gamma|}$ к сферическим координатам, с учётом (8) получим

$$\Delta_{B-\gamma}|x|^{2-n+|\gamma|} = B_{n-|\gamma|-1}r^{2-n+|\gamma|} = ((2-n+|\gamma|)(1-n+|\gamma|) + (2-n+|\gamma|)(n-|\gamma|-1))r^{-n+|\gamma|} = 0.$$

Функция $|x|^{2-n+|\gamma|}$ при $n-|\gamma| > 0$ называется *сингулярным (элементарным) решением* оператора Киприянова $\Delta_{B-\gamma}$. Если же $n-|\gamma| \leq 2$, то сингулярным решением будет функция $|x|^{2-n+|\gamma|} \ln|x|$, что проверяется аналогично. Полученные далее результаты справедливы для обоих сингулярных решений. Однако мы приведём доказательство наиболее простого в описании случая, а именно $n-\gamma > 2$.

4. Основные леммы о \mathbb{T} -сдвиге. Напомним, что многомерный \mathbb{T} -сдвиг определён выражением (2), поэтому достаточно рассмотреть одномерный случай \mathbb{T} -сдвига.

4.1. Перестановочность \mathbb{T} -сдвига.

Лемма 1. *Если f и g – функции, суммируемые с весом $x^{-\gamma}$, то*

$$(\mathbb{T}^y f(x), g(y))_{-\gamma} = (f(y), \mathbb{T}^y g(x))_{-\gamma}.$$

Доказательство. Учитывая, что $-\gamma = 1 - 2\mu$, имеем равенства

$$\begin{aligned} (f(y), \mathbb{T}^y g(x))_{-\gamma} &= x^{-2\mu} \int_0^\infty \int_0^\pi (xy)^{2\mu} f(y) \frac{g(\sqrt{x^2 + y^2 - 2xy \cos \alpha})}{(\sqrt{x^2 + y^2 - 2xy \cos \alpha})^{2\mu}} \sin^{2\mu} \alpha \, d\alpha \, y^{1-2\mu} \, dy = \\ &= x^{-2\mu} (\mathbb{T}^y f(x), g(y))_{-\gamma} = (\mathbb{T}^y f(x), g(y))_{-\gamma}. \end{aligned}$$

Здесь использовалось свойство перестановочности \mathbb{T} -псевдосдвига (см. [3]). Лемма доказана.

4.2. Коммутируемость с оператором $B_{-\gamma_i}$. Для удобства введём обозначение $x = (x_i, x^i)$.

Лемма 2. *Пусть f – дважды непрерывно дифференцируемая i -чётная функция, $0 < \gamma_i < 1$ и $x^{-\gamma} f(x) \in L_2(0, \infty)$. Тогда*

$$(B_{-\gamma_i})_{y_i} \mathbb{T}_{x_i}^{y_i} f(x) = \mathbb{T}_{x_i}^{y_i} B_{-\gamma_i} f(x).$$

Доказательство. Для \mathbb{T} -псевдосдвига равенство

$$(B_{-\gamma_i})_{y_i} \mathbb{T}_{x_i}^{y_i} f(x) = \mathbb{T}_{x_i}^{y_i} (B_{-\gamma})_{x_i} f(x)$$

вытекает из теоремы сложения \mathbb{J} -функций Бесселя [3]. Отсюда получаем

$$(B_{-\gamma_i})_{y_i} \mathbb{T}^{y_i x_i} f(x) = x_i^{-2\mu_i} (B_{-\gamma_i})_{y_i} \mathbb{T}_{x_i}^{y_i} f(x) = x_i^{-2\mu_i} \mathbb{T}_{x_i}^{y_i} (B_{-\gamma_i})_{x_i} f(x) = \mathbb{T}_{x+i}^{y_i} B_{-\gamma_i} f(x).$$

Лемма доказана.

Отметим, что леммы 1 и 2 в многомерном случае $\mathbb{T}^x = \prod_{i=1}^n \mathbb{T}^{x_i}$ примут следующий вид.
Лемма 1'. *Если f и g – функции, суммируемые с весом $x^{-\gamma}$, то*

$$(\mathbb{T}^y f(x), g(y))_{-\gamma} = (f(y), \mathbb{T}^y g(x))_{-\gamma}, \quad x, y \in \mathbb{R}_n^+.$$

Лемма 2'. Пусть f – дважды непрерывно дифференцируемая i -чётная функция, $0 < \gamma_i < 1$ и $x^{-\gamma} f(x) \in L_2(0, \infty)$. Тогда

$$(\Delta_{B_{-\gamma}})_y \mathbb{T}^* y f(x) = \mathbb{T}^* y \Delta_{B_{-\gamma}} f(x), \quad x, y \in \mathbb{R}^n.$$

4.3. Ограниченность \mathbb{T} -сдвига непрерывной функции.

Лемма 3. Пусть $f \in C(\overline{\Omega^+})$. Если $\max_{x \in \Omega^+} |f(x)| = M$, то $\max_{x \in \overline{\Omega^+}} |\mathbb{T}^* y f(x)| = M$.

Доказательство. Продолжим функции u и v нулём в область $\Omega_1^+ = \mathbb{R}_n^+ \setminus \overline{\Omega^+}$.

Достаточно доказать это утверждение для одномерного \mathbb{T} -сдвига. Наибольшее значение выражение (3) принимает при $x_i = y_i$ и $\alpha_i \rightarrow 0$. Но при $x_i = y_i$

$$\begin{aligned} |\mathbb{T}^*_{x_i} y_i f(x)| &\leq \frac{\Gamma((\gamma_i + 3)/2)}{\Gamma(1/2)\Gamma((\gamma_i + 2)/2)} \int_0^\pi \frac{y_i^{\gamma_i+1} M}{(x_i \frac{\alpha_i}{y_i} y_i)^{\gamma_i+1}} \Big|_{x_i=y_i} |\sin \alpha_i|^{\gamma_i+1} d\alpha_i = \\ &= \frac{\Gamma((\gamma_i + 3)/2)}{\Gamma(1/2)\Gamma((\gamma_i + 2)/2)} \int_0^\pi \frac{M}{|2(1 - \cos \alpha_i)|^{(\gamma_i+1)/2}} |\sin \alpha_i|^{\gamma_i+1} d\alpha_i = \\ &= M \frac{\Gamma((\gamma_i + 3)/2)}{\Gamma(1/2)\Gamma((\gamma_i + 2)/2)} \cdot 2 \int_0^{\pi/2} \cos^{\gamma_i+1} \alpha_i d\alpha_i = M, \end{aligned}$$

поскольку, согласно определению B -функции Эйлера,

$$2 \int_0^{\pi/2} \cos^{\gamma_i+1} \alpha_i d\alpha_i = B\left(\frac{\gamma_i + 2}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma(1/2)\Gamma((\gamma_i + 2)/2)}{\Gamma((\gamma_i + 3)/2)}.$$

Лемма доказана.

5. Представление Грина n -чётных функций. Учитывая симметричность \mathbb{T} -сдвига в \mathbb{R}_n^+ (лемма 1') и его коммутируемость с Δ_{B_γ} -оператором Киприянова (лемма 2'), имеем

$$\int_{\Omega^+} \mathbb{T}^* y v(x) \Delta_{B_{-\gamma}} u(y) y^{-\gamma} dy = \int_{\Omega^+} v(y) \mathbb{T}^* y (\Delta_{B_{-\gamma}} u)(x) y^{-\gamma} dy = \int_{\Omega^+} v(y) (\Delta_{B_{-\gamma}})_y \mathbb{T}^* y u(x) y^\gamma dy.$$

В следующей теореме доказывается K -формула Грина представления n -чётных функций, которая в нашем случае будет вытекать из правой части записанного выше равенства.

Теорема 1. Пусть n -чётная функция $u \in C^2(\Omega^+) \cap C^1(\overline{\Omega^+})$, $v = |x|^{2-n+|\gamma|}$, $n - |\gamma| > 2$, u \mathbb{T} – сдвиг, определённый в (2). Имеет место следующая формула Грина:

$$\begin{aligned} u(x) = &\frac{1}{(n+|\gamma|-2)|S_1^+(n)|^{-\gamma}} \left(\int_{\Gamma^+} \left(v(y) \frac{\partial \mathbb{T}^* y u(x)}{\partial \overline{v}_y} - \mathbb{T}^* y u(x) \frac{\partial v(y)}{\partial \overline{v}} \right) y^{-\gamma} d\Gamma^+ - \right. \\ &\left. - \int_{\Omega^+} v(y) \Delta_{B_{-\gamma}} \mathbb{T}^* y u(x) y^{-\gamma} dy \right). \end{aligned} \tag{9}$$

Доказательство. Поскольку функция $y^{-\gamma} v = y^{-\gamma} |y|^{2-n+|\gamma|}$ при $n > 2$ имеет особенность в начале координат (считается точкой $\Omega^+ \cup \Gamma^0$), то для применения K -формулы Грина (4)

необходимо вырезать из области Ω^+ n -полушар $|y| < \varepsilon$. Полученную в результате область обозначим Ω_ε^+ . Тогда

$$\int_{\Omega_\varepsilon^+} v(y)(\Delta_{B_{-\gamma}})_y \mathbb{T}^* u(x) y^{-\gamma} dy = \int_{\Gamma^+ \cup S_\varepsilon^+(n)} v(y) \frac{\partial \mathbb{T}^* u(x)}{\partial \bar{v}_y} y^{-\gamma} \left\{ \frac{d\Gamma^+}{dS^+} \right\} - \int_{\Omega_\varepsilon^+} \sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial \mathbb{T}^* u(x)}{\partial y} y^{-\gamma} dy.$$

Интегрирование по частям в последнем слагаемом правой части этого равенства даёт

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\varepsilon^+} v(y) \Delta_{B_{-\gamma}} \mathbb{T}^* u(x) y^{-\gamma} dy &= \int_{\Gamma^+ \cup S_\varepsilon^+(n)} v(y) \frac{\partial \mathbb{T}^* u(x)}{\partial \bar{v}} \left\{ \frac{d\Gamma^+}{dS^+} \right\} - \\ &- \int_{\Gamma^+ \cup S_\varepsilon^+(n)} \left(\frac{\partial v(y)}{\partial \bar{v}} \right) \mathbb{T}^* u(x) y^{-\gamma} \left\{ \frac{d\Gamma^+}{dS^+} \right\} = I_1 + I_2. \end{aligned} \tag{10}$$

Здесь учитывалось, что $\Delta_{B_{-\gamma}} v = 0$ в области Ω_ε^+ .

Теперь в правой части (10) выделим интегрирование по поверхности n -полусферы $S_\varepsilon^+(n)$:

$$\int_{S_\varepsilon^+(n)} v(y) \frac{\partial \mathbb{T}^* u(x)}{\partial \bar{v}} y^{-\gamma} dS^+ - \int_{S_\varepsilon^+(n)} \frac{\partial v(y)}{\partial \bar{v}} \mathbb{T}^* u(x) y^{-\gamma} dS^+ = I_1(\varepsilon) + I_2(\varepsilon). \tag{11}$$

Учитывая, что вектор нормали к сфере направлен вдоль радиуса, получаем

$$I_1(\varepsilon) = \int_{S_1^+(n)} \varepsilon^{2-n-|\gamma|} \left(\frac{\partial \mathbb{T}^{r\theta} u(x)}{\partial r} \right) \Big|_{r=\varepsilon} (\varepsilon\theta)^{-\gamma} \varepsilon^{n-1} dS_1 = \varepsilon \int_{S_1^+(n)} \frac{\partial \mathbb{T}^{r\theta} u(x)}{\partial r} \Big|_{r=\varepsilon} \theta^{-\gamma} dS_1.$$

Отсюда, поскольку \mathbb{T}^* x -сдвиг – ограниченный оператор в пространстве непрерывно дифференцируемых функций (см. лемму 3), следует

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_1(\varepsilon) = \varepsilon \int_{S_1^+(n)} \frac{\partial \mathbb{T}^{r\theta} u(x)}{\partial r} \Big|_{r=\varepsilon} \theta^{-\gamma} dS_1 = 0. \tag{12}$$

Рассмотрим интеграл $I_2(\varepsilon)$. Имеем равенства

$$\begin{aligned} I_2(\varepsilon) &= \int_{S_\varepsilon^+(n)} \frac{\partial r^{2-n+|\gamma|}}{\partial r} \Big|_{r=\varepsilon} \mathbb{T}^* u(x) y^{-\gamma} dS_\varepsilon = (2-n+|\gamma|) \varepsilon^{1-n-|\gamma|} \int_{S_1^+(n)} \mathbb{T}^* u(x) \varepsilon^{|\gamma|} \theta^{-\gamma} \varepsilon^{n-1} dS_1(n) = \\ &= (2-n+|\gamma|) \int_{S_1^+(n)} \mathbb{T}^* u(x) \theta^{-\gamma} dS_1 = (2-n+|\gamma|) \int_{S_1^+(n)} \mathbb{T}^* u(x) \theta^{-\gamma} dS_1, \end{aligned}$$

откуда находим

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_2(\varepsilon) = (2-n+|\gamma|) u(x) \int_{S_1^+} \theta^{-\gamma} dS_1 = (2-n-|\gamma|) |S_1^+(n)|_{-\gamma} u(x). \tag{13}$$

Подставляя пределы (12) и (13) в (11), а затем переходя к пределу в (10) при $\varepsilon \rightarrow 0$, получаем равенство (9). Теорема доказана.

6. Сферическое среднее K -гармонической функции. Из равенства (см. лемму 2)

$$\Delta_{B_{-\gamma}} \mathbb{T}^* y f(x) = \mathbb{T}^* y u(x) \Delta_{B_{-\gamma}} f(x)$$

вытекает, что функции f и $\mathbb{T}^* y f(x)$ одновременно K -гармонические.

Теорема 2. Пусть функция $u(x)$ является K -гармонической в области $\Omega^+ \subset \mathbb{R}_n^+$ и $S_r^+(n)$ – единичная n -полусфера с центром в начале координат, целиком лежащая в области Ω^+ . Тогда

$$u(x) = \frac{1}{|S_r^+(n)|_\gamma} \int_{S_r^+(n)} \mathbb{T}^* y u(x) y^{-\gamma} dS_r(y). \tag{14}$$

Доказательство. Напомним, что по договоренности, принятой при определении области Ω^+ , внутренней подобластью этой области является подобласть, возможно(!), прилегающая к границе Γ^0 . Вначале предположим, что хотя бы одна из координат центра шара не нулевая, т.е. для некоторого $i \in \overline{1, n}$ выполняется условие $x_i \geq 2\delta > 0$. Радиус сферы r выбирается таким, чтобы вся сфера (разумеется, и шар) лежала в области K -гармоничности функции u и начало координат при этом не оказалось на сфере радиуса r с центром в точке x (т.е. выбираемый нами радиус $r < \delta$ или $r > 2\delta$). Тогда $|y| > 0$ и, следовательно, функция $v = |y|^{2-n-|\gamma|}$ бесконечно дифференцируема в любой точке сферы.

Для K -гармонической функции формула (9) примет вид

$$u(x) = \frac{1}{(n-|\gamma|-2)|S_1(n)|_{-\gamma}} \times \\ \times \int_{S_1(n)} \left[r^{2-n+|\gamma|} \left(-\frac{\partial}{\partial r} \mathbb{T}^{*r\theta} u(x) \right) - \mathbb{T}^{*r\theta} u(x) \frac{-\partial r^{2-n+|\gamma|}}{\partial r} \right] (r\theta)^{-\gamma} r^{n-1} dS_1(\theta).$$

Так как шаг сдвига $y = r\theta$ не выводит функцию $\mathbb{T}^* y u(x)$ за пределы области K -гармоничности, то здесь исчезнет первое слагаемое (см. формулу (7)) и

$$u(x) = \frac{1}{|S_{1,x}(n)|_\gamma} \int_{S_{1,x}(n)} \mathbb{T}^{*r\theta} u(x) (\theta)^{-\gamma} dS_1(\theta).$$

Отсюда с очевидностью следует (14).

Пусть теперь все координаты центра шара равны нулю. В этом случае в формуле представления функции (9) отсутствует обобщённый сдвиг и нужно доказать формулу

$$u(0) = \frac{1}{|S_{1,0}(n)|_\gamma} \int_{S_{1,0}(n)} u(r\theta) (\theta)^\gamma dS_1(\theta),$$

которая на самом деле уже известна. Её доказательство для одной особой переменной приведено в работе [9] (см. также [10, 11]) и без особых затруднений переносится на многомерный обобщённый сдвиг Пуассона. Теорема доказана.

Принципиальной особенностью формулы (14) является то, что интегрирование происходит по n -полусфере с центром в начале координат, а точка интегрирования принадлежит сфере с центром в точке $x \in \Omega^+$, вообще говоря, не совпадающей с началом координат. Эта особенность исчезает, если нет весовой нагрузки на оси координат, т.е. если все $\gamma_i = 0$.

Имеет место теорема о среднем при интегрировании по n -полушару в \mathbb{R}_n^+ (ср. [12]).

Теорема 3. Пусть функция u является K -гармонической в области $\Omega^+ \subset \mathbb{R}_n^+$ и $S_r^+(n)$ – единичная n -полусфера с центром в начале координат, целиком лежащая в Ω^+ . Тогда

$$u(x) = \frac{n+|\gamma|}{|\mathbb{H}_R(n)|_\gamma} \int_{|x|<R} \mathbb{T}^{*r\theta} u(x) x^\gamma dS_r, \tag{15}$$

где $\mathbb{Ш}_R(n) = \{x : |x| < R\}^+ - n$ -полушар в \mathbb{R}_n^+ с центром в начале координат и радиуса R , весовой объём которого равен

$$|\mathbb{Ш}_R(n)|_\gamma = \frac{R^{n+|\gamma|}}{2^n} |S_1^+(n)|_\gamma.$$

Учитывая, что

$$|S_r^+(n)|_{-\gamma} = \frac{r^{n+|\gamma|-1}}{2^n} |S_1^+(n)|_\gamma,$$

перепишем равенство (14) в виде

$$r^{n+|\gamma|-1} |S_1^+(n)|_{-\gamma} u(x) = \int_{S_r^+(n)} \mathbb{T}^{*r\theta} u(x) x^\gamma dS_1.$$

Проинтегрируем это равенство по r на отрезке $[0, R]$ и получим формулу (15). Теорема доказана.

7. Экстремальное свойство K -гармонических функций. Для классических гармонических функций экстремальное свойство вытекает из теоремы о среднем гармонике в ограниченной области. В исследуемом случае область Ω^+ прилегает к границе, образованной координатными гиперплоскостями в \mathbb{R}_n^+ , следовательно, части этих гиперплоскостей тоже оказываются границами области Ω^+ , однако они всего лишь границы симметрии.

Теорема 4. K -гармоническая функция $u(x) \not\equiv \text{const}$ в Ω^+ принимает экстремальные значения ($\sup u$ и \inf) на границе Γ^+ области B -гармоничности:

$$\min_{x \in \Gamma^+} u(x) < u(x) < \max_{x \in \Gamma^+} u(x).$$

Доказательство. Предположим противное, т.е., например, что $\sup u = u(x_0)$, x_0 – внутренняя точка Ω^+ .

Применив формулу среднего значения (14) с центром в точке x_0 и такого радиуса, чтобы сфера целиком лежала в Ω^+ , получим

$$u(x_0) = \frac{1}{|S_r(n)|_\gamma} \int_{S_r} \mathbb{T}^{*y} u(x_0) y^\gamma dS_1(y). \tag{16}$$

Так как $u(x) \neq \text{const}$, то на сфере должна присутствовать точка y' , в которой функция u (среди всех значений на этой сфере) принимает наибольшее значение $u(y') = M'$. Обобщённый \mathbb{T} -сдвиг действует ограниченно (лемма 3), а тогда из (16) следует, что

$$u(x_0) = M \leq \frac{M'}{|S_r(n)|_\gamma} |S_r(n)|_\gamma = M',$$

т.е. $u(x_0) = M \leq M'$, что возможно, если $u(x) = \text{const}$ внутри этой сферы. Напомним, что для точек пересечения $\Gamma^0 \cap \Gamma$ выполнено условие Киприянова, поэтому существует конечное покрытие области Ω^+ шарами, в которых функция u K -гармонична и, значит, постоянна: $u(x) = M$, что противоречит условию теоремы. Теорема доказана.

Следствие 1. Если $u \in C_{\text{ev}}^1(\Omega^+)$ – K -гармоническая функция в частично замкнутой области $\Omega^+ = \Omega^+ \cup \Gamma^O$, то

$$|u(x)| \leq \max_{x \in \Gamma^+} |u(x)|, \quad x \in \overline{\Omega^+}.$$

В частности, если $u|_{\Gamma^+} = 0$, то $u \equiv 0$ в Ω^+ .

Будем говорить, что n -чётная функция $u = u(x)$ непрерывна на бесконечности и принимает там значение a , если она непрерывна вне некоторого n -полусфера в $\overline{\mathbb{R}_n^+}$ и $\lim_{\substack{x \in \overline{\mathbb{R}_n^+} \\ \|x\| \rightarrow \infty}} u = a$.

Обозначим через $\Omega_1^+ = \overline{\mathbb{R}_n^+} \setminus \Omega^+$ область, прилегающую к координатным гиперплоскостям по границе Γ^0 .

Следствие 2. Если $u \in C_{ev}^1(\overline{\Omega_1^+})$ – B -гармоническая функция в частично замкнутой области $\overline{\Omega_1^+} = \Omega_1^+ \cup \Gamma^0$ и $u(\infty) \equiv \lim_{\substack{x \in \overline{\mathbb{R}_n^+} \\ \|x\| \rightarrow \infty}} u = 0$, то

$$|u(x)| \leq \max_{x \in \Gamma^+} |u(x)|, \quad x \in \overline{\Omega_1^+}.$$

В частности, если $u|_{\Gamma^+} = 0$ и $u(\infty) = 0$, то $u(x) \equiv 0$, $x \in \Omega_1^+$.

Следствие 3. Если последовательность K -гармонических функций $\{u_k\}_{k=1}^\infty$ равномерно сходится на границе Γ^+ области B -гармоничности Ω^+ , то она равномерно сходится на $\overline{\Omega^+}$. Это справедливо для области Ω_1^+ , если дополнительно известно, что $u_k(\infty) = 0$.

Доказательства следствий 1 и 2 отличаются от доказательств классических утверждений для гармонических функций лишь обозначениями (см., например, [13, § 24]).

8. Постановка и единственность решения внутренней и внешней задач Дирихле.

Внутренняя задача Дирихле. Пусть Ω^+ – конечная область в \mathbb{R}_n^+ , прилегающая к координатным гиперплоскостям по границе Γ^0 , и функция φ задана и непрерывна на части границы $\Gamma^+ \in \mathbb{R}_n^+$. Найти функцию $u \in C^2(\Omega^+) \cap C(\overline{\Omega^+})$, удовлетворяющую в области Ω^+ уравнению Пуассона $\Delta_{B-\gamma} u = f$ и граничным условиям $u|_{\Gamma^+} = \varphi$.

Теорема 5. Внутренняя задача Дирихле для уравнения Пуассона с оператором Киприянова имеет единственное решение.

Доказательство. Предположим, что существуют два решения задачи: u_1 и u_2 . Тогда функция $u = u_1 - u_2$ является K -гармонической: $\Delta_{B-\gamma} u = 0$, и поэтому согласно следствию 1 равна нулю, т.е. $u_1 = u_2$. Теорема доказана.

Внешняя задача Дирихле. Пусть $\Omega_1^+ = \overline{\mathbb{R}_n^+} \setminus \Omega^+$ и функция φ задана и непрерывна на части границы $\Gamma^+ \in \mathbb{R}_n^+$.

Теорема 6. Внешняя задача Дирихле для уравнения Пуассона с оператором Киприянова имеет единственное решение.

Доказательство. Поскольку область Ω^+ предполагается ограниченной, то существует сфера достаточно большого радиуса R , включающая в себя эту область. Из условия убывания решения следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число R , что на этой сфере S_R выполняется условие $u(x)|_{S_R} < \varepsilon$. Область $G^+ = \mathbb{R}_n^+ \setminus \Omega^+$, разумеется, конечная. Если u_1 и u_2 – два решения внешней задачи Дирихле, то функция $u = u_1 - u_2$ K -гармоническая в замкнутой области G^+ с граничным условием $|u| < 2\varepsilon$ на границе ∂G^+ . Согласно следствию 2 $|u(x)| < 2\varepsilon$ в Ω^+ , а поскольку число ε произвольное, то это возможно только если $u = 0$, т.е. когда $u_1 = u_2$. Теорема доказана.

В заключение обратим внимание на одну особенность этих исследований, отмеченную рецензентом: не найдено аналогичных исследований по отношению к B -гармоническим функциям, определяемым равенством $\Delta_{B-\gamma} u = 0$, $\gamma_i > 0$. На самом деле аналогичные результаты для B -гармонических функций легко вытекают из схемы доказательств этой работы, если заменить T -сдвиг обобщённым сдвигом Пуассона.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ляхов Л.Н., Санина Е.Л. Оператор Киприянова–Бельтрами с отрицательной размерностью оператора Бесселя и сингулярная задача Дирихле для B -гармонического уравнения // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 12. С. 1610–1620.
2. Киприянов И.А. Сингулярные эллиптические краевые задачи. М., 1997.

3. *Ляхов Л.Н., Булатов Ю.Н., Рождупкин С.А., Санина Е.Л.* Псевдосдвиг и фундаментальное решение Δ_B -оператора Киприянова // Дифференц. уравнения. 2022. Т. 58. № 12. С. 1654–1665.
4. *Левитан Б.М.* Разложение по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье // Успехи мат. наук. 1951. Т. 6. Вып. 2 (42). С. 102–143.
5. *Ляхов Л.Н.* Построение ядер Дирихле и Валле–Пуссона–Никольского для j -бесселевых интегралов Фурье // Тр. Московского мат. о-ва. 2015. Т. 76. Вып. 1. С. 67–84.
6. *Левитан Б.М.* Теория операторов обобщённого сдвига. М., 1973.
7. *Какичев В.А.* О свёртках для интегральных преобразований // Изв. АН БССР. Сер. физ-мат. наук. 1967. № 2. С. 48–57.
8. *Бритвина Л.Е.* Полисвертки преобразования Ханкеля и дифференциальные операторы // Докл. РАН. 2002. Т. 382. № 3. С. 298–300.
9. *Левитан Б.М.* Применение операторов обобщенного сдвига к линейным дифференциальным уравнениям второго порядка // Успехи мат. наук. 1949. Т. 4. № 1 (29). С. 3–112.
10. *Киприянова Н.И.* Формула среднего значения для собственных функций сингулярного дифференциального уравнения второго порядка // Дифференц. уравнения. 1985. Т. 21. № 11. С. 1998–2001.
11. *Киприянова Н.И., Ляхова С.Л.* Формула среднего значения для регулярных решений сингулярного дифференциального уравнений Гельмгольца и Шредингера // Докл. РАН. 1999. Т. 364. № 1. С. 14–16.
12. *Киприянова Н.И.* Теорема о среднем для B -полигармонического уравнения // Изв. вузов. 1998. № 5 (432). С. 31–34.
13. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М., 1981.

Воронежский государственный университет,
Елецкий государственный университет
имени И.А. Бунина,
Липецкий государственный педагогический
университет имени П.П. Семёнова-Тян-Шанского

Поступила в редакцию 16.01.2023 г.
После доработки 24.02.2023 г.
Принята к публикации 22.03.2023 г.