ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 4, с. 494–500

УРАВНЕНИЯ В КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЯХ

УДК 517.962.2

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ ПРАВЫМИ ЧАСТЯМИ

© 2023 г. А. О. Игнатьев

Рассматриваются однородная и неоднородная системы линейных разностных уравнений с коэффициентами, являющимися N-периодическими функциями дискретного времени. Для однородных систем получены достаточные условия существования периодических и почти периодических решений. Для неоднородных систем показано, что необходимым и достаточным условием существования N-периодического решения является наличие ограниченного решения. Установлены необходимые и достаточные условия ортогональности фундаментальной матрицы однородной системы. Приводятся иллюстрирующие примеры.

DOI: 10.31857/S0374064123040064, EDN: ANEVSL

Введение. Обозначим: $\mathbb{Z}$ – множество целых чисел, $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел, а также, следуя [1, 2], $\mathbb{N}_q \equiv \{n \in \mathbb{N}_0 : n \geqslant q\}$, $\mathbb{N}_0 \equiv \mathbb{N} \bigcup \{0\}$.

Рассмотрим систему линейных разностных уравнений

$$y(n+1) = A(n)y(n) + g(n), \tag{1}$$

где $n \in \mathbb{Z}$ – дискретное время, $y(n) = (y_1(n), \ldots, y_k(n))^{\mathrm{т}} \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{R}^k$ – искомая функция (здесь и в дальнейшем знак $^{\mathrm{т}}$ обозначает операцию транспонирования), а

$$A(n) = \begin{pmatrix} a_{11}(n) & a_{12}(n) & \ldots & a_{1k}(n) \\ a_{21}(n) & a_{22}(n) & \ldots & a_{2k}(n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k1}(n) & a_{k2}(n) & \ldots & a_{kk}(n) \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad g(n) = \begin{pmatrix} g_1(n) \\ g_2(n) \\ \vdots \\ g_k(n) \end{pmatrix}$$

– заданные $k \times k$- и $k \times 1$-матрицы соответственно, элементами которых являются действительные периодические функции с периодом N, определённые при $n \in \mathbb{Z}$. Наряду с системой (1), рассмотрим соответствующую ей линейную однородную систему

$$y(n+1) = A(n)y(n). \tag{2}$$

Предполагаем, что матрица $A(n)$ в системах (1) и (2) является невырожденной при всех $n \in \mathbb{Z}$.

Изучению линейных разностных уравнений посвящено большое количество исследований, из которых отметим работы [3–11]. Практические приложения линейных разностных уравнений с периодическими коэффициентами предложены в [12–14]. Однако не всегда такие уравнения имеют периодические или почти периодические решения, описывающие регулярно повторяющиеся процессы и составляющие важный класс решений разностных уравнений (так как многие процессы, которые можно задать с помощью разностных уравнений, являются периодическими). Изучению таких решений посвящено множество работ (см., например, [13–16]). А. Пуанкаре в исследовании автономных дифференциальных систем придавал особое значение изучению периодических решений, поскольку они в существенном определяют поведение остальных, не периодических, решений указанных систем. Периодические решения представляют собой простейший вид колебательных движений и являются, фактически, единственным типом решений, которые можно целиком наблюдать, так как вся эволюция периодического решения полностью определяется его поведением на конечном промежутке времени.

В случае $k = 1$, т.е. если (1) – скалярное уравнение, в статье [17] доказана следующая

Теорема А. *Пусть $A(n)$ и $b(n)$ являются N-периодическими функциями дискретного времени $n \in \mathbb{Z}$, т.е. $A(n+N) = A(n)$ и $b(n+N) = b(n)$, $n \in \mathbb{Z}$, и функция $A(n)$ отлична от нуля при всех n. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) если $\prod_{i=1}^{N} |A(i)| < 1$, то уравнение (1) имеет единственное равномерно асимптотически устойчивое периодическое решение с периодом N;

2) если $|[\prod_{i=0}^{N-1} A(N-i)]^{-1}|^{-1} > 1$, то у уравнения (1) имеется неустойчивое периодическое решение с периодом N.

В статье [18], как и в [17], система (1) также рассмотрена при $k = 1$. Решается задача: может ли это скалярное уравнение иметь сильно нерегулярные периодические решения$^{*)}$, отличные от постоянных? Доказана

Теорема Б. *Скалярное линейное уравнение (1), в котором функции $A(n)$ и $b(n)$ периодичны с одним и тем же периодом, не имеет сильно нерегулярных периодических решений.*

В работе [5] рассмотрено скалярное линейное разностное уравнение вида (1), где $A(n)$ и $g(n)$ – периодические функции с периодом N. Получено необходимое и достаточное условие существования N-периодического решения периода. Статья [19] посвящена получению достаточных условий существования асимптотически периодических решений у линейного разностного уравнения

$$a_n^r x(n+r) + \ldots + a_n^1 x(n+1) + a_n^0 x(n) = d(n), \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

где $d(n)$ – дискретная N-периодическая функция, a_n^i, $i = \overline{0,r}$, – константы такие, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^i = 0$, $i = \overline{0,r}$, и $a_n^r \neq 0$ при всех $n \in \mathbb{N}_0$. В статье [20] изучаются нелинейные скалярные разностные уравнения вида $x(n+1) = f_n(x(n))$, где функции $f_n(x)$, $n \in \mathbb{N}_0$, периодичны с периодом N, т.е. $f_n(x) \equiv f_{n+N}(x)$ для $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$. Получено условие существования и устойчивости периодического решения с периодом N.

Периодические функции являются частным случаем почти периодических функций. В работах [21, 22] доказано, что существует система линейных разностных уравнений вида (2), где $n \in \mathbb{Z}$ и элементы матрицы $A(n)$ почти периодические функции, не имеющая почти периодического решения, кроме тривиального.

В настоящей работе рассматривается вопрос о существовании периодических и почти периодических решений линейных систем разностных уравнений при других (отличных от [5, 17–22]) условиях.

1. О существовании N-периодических решений систем (1) и (2).

Теорема 1. *У системы (1) тогда и только тогда существует N-периодическое решение, когда у неё существует ограниченное решение.*

Доказательство. Если у системы (1) существует N-периодическое решение, то оно будет и ограниченным.

Покажем теперь, что если у этой системы существует ограниченное решение, то существует также и N-периодическое решение. Зафиксируем какой-либо начальный момент n_0 дискретного времени, и пусть вектор $y_0 \in \mathbb{R}^k$ – положение в момент n_0 решения $y(n) = y(n, n_0, y_0)$, $n \in \mathbb{Z}$, системы (1). Рассмотрим однородную систему (2). Её решение $\varphi(n, n_0, y_0)$ с теми же начальными условиями имеет представление $\varphi(n, n_0, y_0) = \Phi(n, n_0)y_0$, где $\Phi(n, n_0)$ – фундаментальная матрица системы (2). При этом общее решение системы (1) можно записать в виде [4, с. 79]

$$y(n, n_0, y_0) = \Phi(n, n_0)y_0 + \sum_{r=n_0}^{n-1} \Phi(n, r+1)g(r). \tag{3}$$

Второе слагаемое в правой части представляет собой частное решение системы (1).

$^{*)}$ Если в уравнении (1) функции $A(n)$ и $b(n)$ периодичны с периодом N, то периодическое решение этого уравнения с периодом M называется *сильно нерегулярным*, когда числа N и M взаимно просты.

Введём следующее обозначение:

$$\mathcal{F}_s \equiv \sum_{n_0+(s-1)N}^{n_0+sN-1} \Phi(n_0+sN, r+1)g(r), \quad s \in \mathbb{N}.$$

Так как система (2) является N-периодической, то для любого $n \in \mathbb{Z}$ справедливо равенство $\Phi(n+N,n) = \Phi(n_0+N,n_0)$. Поэтому для доказательства существования N-периодического решения у системы (1) нужно показать, что система уравнений

$$\Phi(n_0+N,n_0)y_0 + \mathcal{F}_1 = y_0 \tag{4}$$

имеет решение относительно вектора y_0. При решении этой задачи следует рассмотреть два случая:

$$\mathcal{F}_1 = \mathbf{0}^{\text{т}} \tag{5}$$

и

$$\mathcal{F}_1 \neq \mathbf{0}^{\text{т}}, \tag{6}$$

где $\mathbf{0} = (0,0,\ldots,0)$ – $1 \times k$-матрица.

В первом случае задача сводится к существованию N-периодического решения однородной системы (2), но она всегда имеет N-периодическое решение, в качестве которого можно взять тривиальное (нулевое) решение.

Рассмотрим второй случай, т.е. когда справедливо неравенство (6). Обозначив $\Phi(n_0 + N, n_0) - I =: B \in \mathbb{R}^{k\times k}$ (здесь и далее I – единичная $k \times k$-матрица), систему (4) запишем в виде

$$By_0 = b, \tag{7}$$

где $b = -\mathcal{F}_1 = (b_1, b_2, \ldots, b_k)^{\text{т}} \in \mathbb{R}^k$.

Покажем, что система линейных уравнений (7) имеет решение относительно вектора y_0. Будем доказывать от противного: предположим, что у этой системы решения нет. Это означает, что ранг матрицы B меньше ранга расширенной матрицы $B \mid b$, где

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \ldots & B_{1k} \\ B_{21} & B_{22} & \ldots & B_{2k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ B_{k1} & B_{k2} & \ldots & B_{kk} \end{pmatrix}, \quad B|b = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \ldots & B_{1k} & b_1 \\ B_{21} & B_{22} & \ldots & B_{2k} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ B_{k1} & B_{k2} & \ldots & B_{kk} & b_k \end{pmatrix}.$$

Так как строки матрицы B линейно зависимы, из теоремы Кронекера–Капелли вытекает, что существуют действительные числа α_1, α_2, $\ldots$, α_k, не все равные нулю, при которых

$$\alpha_1(B_{11},\ldots,B_{1k}) + \alpha_2(B_{21},\ldots,B_{2k}) + \ldots + \alpha_k(B_{k1},\ldots,B_{kk}) = (0,0,\ldots,0),$$

но $\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \ldots + \alpha_k b_k \neq 0$. Таким образом, установлено, что при таких α_1, α_2, $\ldots$, α_k справедливы соотношения

$$\alpha(\Phi(n_0+N,n_0) - I) = \mathbf{0} \tag{8}$$

и $\alpha b \neq 0$, где $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$ – матрица-строка.

Умножив справа последовательно обе части равенства (8) на $\Phi(n_0+N,n_0)$, получим

$$\alpha(\Phi^2(n_0+N,n_0) - \Phi(n_0+N,n_0)) = \mathbf{0}, \quad \alpha(\Phi^3(n_0+N,n_0) - \Phi^2(n_0+N,n_0)) = \mathbf{0}, \quad \ldots,$$

откуда и из (8) следует, что

$$\alpha\Phi^s(n_0+N,n_0) = \alpha \quad \text{при любом натуральном } s. \tag{9}$$

Обозначим

$$y_1 = y(n_0+N,n_0,y_0), \quad y_2 = y(n_0+2N,n_0,y_0), \quad \ldots, \quad y_s = y(n_0+sN,n_0,y_0), \quad \ldots$$

Пользуясь формулой (3), последовательно находим

$$y_1 = \Phi(n_0+N, n_0)y_0 + \mathcal{F}_1,$$

$$y_2 = y(n_0+2N, n_0+N, y_1) = \Phi(n_0+2N, n_0+N)y_1 + \mathcal{F}_2 =$$
$$= \Phi(n_0+2N, n_0+N)[\Phi(n_0+N, n_0)y_0 + \mathcal{F}_1] + \mathcal{F}_2, \quad \ldots$$
$$\ldots, \quad y_s = \Phi(n_0+sN, n_0+(s-1)N)y_{s-1} + \mathcal{F}_s.$$

Так как элементы матриц $A(n)$ и $g(n)$ периодичны с периодом N, заключаем, что

$$\Phi(n_0+N, n_0) = \Phi(n_0+2N, n_0+N) = \ldots = \Phi(n_0+sN, n_0+(s-1)N) \tag{10}$$

и

$$\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2 = \ldots = \mathcal{F}_s. \tag{11}$$

Вследствие равенств (10) и (11) выражение для y_s принимает вид

$$y_s = \Phi^s(n_0+N, n_0)y_0 + (\Phi^{s-1}(n_0+N, n_0) + \Phi^{s-2}(n_0+N, n_0) + \ldots + \Phi(n_0+N, n_0) + I)\mathcal{F}_1.$$

Умножая обе части последнего равенства слева на α и используя условия (9), получаем

$$\alpha y_s = \alpha y_0 + s\alpha\mathcal{F}_1.$$

Учитывая, что $\alpha\mathcal{F}_1 \neq 0$, имеем $\lim\limits_{s\to\infty} \|\alpha y_s\| = \infty$. Отметим, что никаких ограничений на начальный вектор y_0 мы не накладывали, т.е. получено, что это предельное соотношение выполняется при любом y_0. Но это противоречит тому, что существует ограниченное решение системы (1). Полученное противоречие доказывает утверждение о том, что система линейных уравнений (7) имеет решение относительно y_0, т.е. система разностных уравнений (1) имеет периодическое решение периода N. Теорема доказана.

Замечание 1. Как следует из доказательства теоремы, при выполнении условия (5) у системы (2), согласно теории Флоке, существует нетривиальное N-периодическое решение тогда и только тогда, когда единица является мультипликатором системы (2), т.е. собственным значением матрицы $\Phi(n_0+N, n_0)$.

Доказанная теорема переносит теорему Массеры [23] на периодические системы разностных уравнений. В статьях [24–26] теорема Массеры переносится на другие классы линейных уравнений. Отметим, что системы линейных разностных уравнений вида (1) с периодическими правыми частями могут не иметь ни периодических, ни ограниченных решений. В качестве иллюстрации воспользуемся примером из статьи [9].

Пример 1. Скалярное разностное уравнение (1), т.е. $k=1$, в котором коэффициент и свободный член заданы равенствами

$$A(2n-1) = -2, \quad A(2n) = -1/2 \quad \text{и} \quad g(2n-1) = -2, \quad g(2n) = 1, \quad n \in \mathbb{Z},$$

является периодичным с периодом $N=2$ и имеет общее решение $y(2n-1) = C-3+2n$, $y(2n) = -2C+4-4n$, где C – произвольная постоянная. Нетрудно убедиться в том, что у этого уравнения нет ни периодических, ни ограниченных решений.

Рассмотрим однородную систему линейных разностных уравнений (2), элементами матрицы $A(n)$ которой являются периодические функции $a_{ij}(n)$, $i,j=\overline{1,k}$, с периодом N. Пусть $n_0=0$ и $\Phi(n,0)=Y(n)$ – фундаментальная матрица, т.е. матрица, столбцами которой являются линейно независимые решения системы (2). Более того, эту матрицу будем считать нормированной, т.е. такой, что выполняются равенства

$$Y(n+1) = A(n)Y(n), \quad Y(0) = I. \tag{12}$$

Теорема 2. *Если в системе разностных уравнений (2) элементы матрицы $A(n)$ периодичны с периодом N и $A(N-1)A(N-2)\cdots A(0) = I$, то все решения этой системы будут периодическими функциями дискретного времени n периода N.*

Доказательство. Пусть $Y(n)$ – нормированная фундаментальная матрица, т.е. матрица, для которой выполняются соотношения (12). Согласно [3, леммы 3.29 и 3.33] $Y(n+N) = Y(n)C$, где $C = Y(N) = A(N-1)A(N-2)\cdots A(0)$. Вследствие условия теоремы верно равенство $A(N-1)A(N-2)\cdots A(0) = I$. Поэтому $Y(n+N) = Y(n)$, что и требовалось доказать.

Пример 2. Рассмотрим систему разностных уравнений (2) при $k=2$, где

$$A(3n) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A(3n+1) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A(3n+2) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Так как элементы матрицы $A(n)$ периодичны с периодом $N=3$ и

$$A(3n+2)A(3n+1)A(3n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

то, согласно теореме 2, все решения этой системы разностных уравнений будут периодическими с периодом $N=3$.

2. О почти периодических решениях системы (2). Приведём определение почти периодической функции дискретной переменной.

Определение [27, с. 45]. Функция $f(n)$, определённая на множестве целых чисел, называется *почти периодической*, если для каждого $\varepsilon > 0$ можно указать такое натуральное число $l = l(\varepsilon)$, что среди любых последовательных l целых чисел найдётся хотя бы одно число p, для которого справедливо неравенство $|f(n+p) - f(n)| < \varepsilon$ для $n \in \mathbb{Z}$. При этом целое число p называется *ε-почти периодом* функции $f(n)$.

Отметим, что все периодические функции являются также и почти периодическими. Это следует из определений периодической и почти периодической функций. Если функция $f(t)$ является непрерывной периодической функцией вещественной переменной t, то $f(n)$, где n – дискретная переменная $(n \in \mathbb{Z})$, является функцией почти периодической. Например, функция $\sin n$ почти периодическая. Почти периодические функции обладают следующим свойством [28, с. 27].

Свойство. *Сумма и произведение почти периодических функций суть также почти периодические функции.*

Пусть $A(n)$ – периодическая матрица периода N, а $Y(n)$ – нормальная фундаментальная матрица системы (2), удовлетворяющая условиям (12). Столбцами этой матрицы являются линейно независимые решения системы (2). Так как элементами матрицы $A(n)$ являются периодические функции периода N, то, согласно [3, лемма 3.29], существует невырожденная $k \times k$-матрица B такая, что

$$Y(n+N) = Y(n)B^N, \quad \text{где} \quad B^N = A(N-1)A(N-2)\cdots A(0).$$

Матрица B^N называется *матрицей монодромии.* В [3, с. 155] доказана следующая

Теорема 3. *Для каждой фундаментальной матрицы $Y(n)$ системы (2) существует невырожденная периодическая матрица $P(n)$ периода N такая, что $Y(n) = P(n)B^n$. Если $z(n)$ – решение системы $z(n+1) = Bz(n)$, то $y(n) = P(n)z(n)$.*

Отметим, что элементы матриц $P(n)$ и B в общем случае являются комплекснозначными. Воспользовавшись теоремой 3 и сформулированным свойством, получаем, что верна

Теорема 4. *Если все собственные числа λ_i, $i = \overline{1,k}$, матрицы B различны и $|\lambda_i| = 1$, $i = \overline{1,k}$, то все решения системы (2) будут почти периодическими.*

Пример 3. Рассмотрим систему разностных уравнений (2) при $k=3$, где

$$A(3n) = \begin{pmatrix} 7/27 & 14/3 & 2/3 \\ -2/27 & 3 & 1/6 \\ -7/27 & -4 & -1/6 \end{pmatrix}, \quad A(3n+1) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad A(3n+2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Правые части этой системы периодичны с периодом $N = 3$. Находим матрицу монодромии

$$B^3 = A(2)A(1)A(0) = \begin{pmatrix} 1/3 & 1 & 0 \\ -1/3 & 1/3 & 1 \\ 20/27 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Корнями её характеристического уравнения

$$\det \begin{pmatrix} 1/3-\mu & 1 & 0 \\ -1/3 & 1/3-\mu & 1 \\ 20/27 & -1/3 & 1/3-\mu \end{pmatrix} = -\mu^3 + \mu^2 - \mu + 1 = 0$$

являются числа $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = i$, $\mu_3 = -i$, где $i = \sqrt{-1}$ – мнимая единица. Все эти корни различны и $|\mu_1| = |\mu_2| = |\mu_3| = 1$. Следовательно, собственные значения λ_1, λ_2, λ_3 матрицы B также различны и $|\lambda_1| = |\lambda_2| = |\lambda_3| = 1$. Согласно теореме 4 все решения рассматриваемой системы будут почти периодическими. Так как одно из собственных значений матрицы B^3 равно единице, на основании теории Флоке можно утверждать, что среди всех решений у этой системы имеются нетривиальные периодические решения с периодом $N = 3$.

3. Об ортогональности фундаментальной матрицы системы (2). Будем считать, что $n_0 = 0$ и $\Phi(n, n_0) = \Phi(n, 0) = Y(n)$. Более того, матрицу $Y(n)$ считаем нормированной, т.е. для неё выполняются соотношения (12).

Теорема 5. *Нормированная фундаментальная матрица $Y(n)$ ортогональна тогда и только тогда, когда матрица $A(n)$ ортогональна.*

Доказательство. Вначале предположим, что $Y(n)$ ортогональна, т.е.

$$Y(n)Y^{\mathrm{т}} = I. \tag{13}$$

Покажем, что

$$A(n)A^{\mathrm{т}}(n) = I. \tag{14}$$

Заметим, что системы (2) и

$$Y^{\mathrm{т}}(n+1) = Y^{\mathrm{т}}(n)A^{\mathrm{т}}(n) \tag{15}$$

эквивалентны [29, с. 130]. Из соотношения $Y(n+1)Y^{\mathrm{т}}(n+1) = I$ и уравнений (2), (15) получаем $A(n)Y(n)Y^{\mathrm{т}}(n)A^{\mathrm{т}}(n) = I$, откуда следует $A(n)A^{\mathrm{т}}(n) = I$ в силу (13).

Теперь предположим, что выполняется равенство (14). Докажем, что матрица $Y(n)$ ортогональна. Из равенства (14) следует, что $A^{\mathrm{т}}(n)A(n) = I$, откуда имеем $Y^{\mathrm{т}}(n+1)Y(n+1) = Y^{\mathrm{т}}(n)A^T(n)A(n)Y(n) = Y^{\mathrm{т}}(n)Y(n) = C$, где C – некоторая постоянная матрица. Так как $Y(0) = Y^{\mathrm{т}}(0) = I$, то $C = I$. Отсюда получаем $Y^{\mathrm{т}}(n)Y(n) = I$, что доказывает ортогональность фундаментальной матрицы $Y(n)$. Теорема доказана.

Замечание 2. Отметим, что ситуация с разностной системой в теореме 5 отличается от ситуации в случае системы обыкновенных дифференциальных уравнений. В статье [30] показано, что нормированная фундаментальная матрица $X(t)$ системы дифференциальных уравнений $\dot{x} = A(t)x$ будет ортогональной при всех t тогда и только тогда, когда матрица коэффициентов $A(t)$ является кососимметрической при всех t, т.е. $A(t) \equiv -A^{\mathrm{т}}(t)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Chen S., Liu X.* Stability analysis of discrete-time coupled systems with delays // J. of the Franklin Institute. 2020. № 357. P. 9942–9959.
2. *Игнатьев А.О.* Метод функций Ляпунова в системах разностных уравнений: устойчивость относительно части переменных // Дифференц. уравнения. 2022. Т. 58. № 3. С. 407–415.
3. *Elaydi S.* An Introduction to Difference Equations. New York, 2005.
4. *Lakshmikantham V., Trigiante D.* Theory of Difference Equations: Numerical Methods and Applications. New York, 2002.

5. *Agarwal R., Popenda J.* Periodic solutions of first order linear difference equations // Math. Comput. Modelling. 1995. V. 22. № 1. P. 11–19.
6. *Савченко А.Я., Игнатьев А.О.* Некоторые задачи устойчивости неавтономных динамических систем. Киев, 1989.
7. *Giang D.V.* Linear difference equations and periodic sequences over finite fields // Acta Math. Vietnam. 2016. V. 41. № 1. P. 171–181.
8. *Hasil P., Vesely M.* Limit periodic homogeneous linear difference systems // Appl. Math. Comput. 2015. V. 265. P. 958–972.
9. *Janglajew K., Schmeidel E.* Periodicity of solutions of nonhomogeneous linear difference equations // Adv. Difference Equat. 2012. V. 195.
10. *Agarwal R.* Difference Equations and Inequalities. Theory, Methods, and Applications. V. 228. New York, 2000.
11. *Agarwal R., Wong P.* Advanced Topics in Difference Equations. Dordrecht, 1997.
12. *Gasull A.* Difference equations everywhere: some motivating examples // Difference Equations, Discrete Dynamical Systems and Applications / Eds. S. Elaydi et al. 2019. V. 287. P. 129–167.
13. *Elaydi S., Sacker R.* Periodic difference equations, population biology and the Cushing–Henson conjectures // Math. Biosci. 2006. V. 201. № 1–2. P. 195–207.
14. *Elaydi S., Sacker R.* Global stability of periodic orbits of non-autonomous difference equations and population biology // J. Differ. Equat. 2005. V. 208. № 1. P. 258–273.
15. *Ignatyev A.O., Ignatyev O.A.* On the stability of discrete systems // Integral Methods in Science and Engineering. Boston, 2006. P. 105–116.
16. *Ignatyev A.O., Ignatyev O.A.* On the stability in periodic and almost periodic difference systems // J. Math. Anal. Appl. 2006. V. 313. № 2. P. 678–688.
17. *Zhang S., Liu P., Gopalsamy K.* Almost periodic solutions of nonautonomous linear difference equations // Appl. Analysis: an Int. J. 2002. V. 81. № 2. P. 281–301.
18. *Деменчук А.К.* О сильно нерегулярных периодических решениях линейного дискретного уравнения первого порядка // Весцi НАН Беларусi. Сер. фiз.-мат. навук. 2020. Т. 56. № 1. С. 30–35.
19. *Popenda J., Schmeidel E.* Asymptotically periodic solution of some linear difference equations // Facta Univ. Ser. Math. Inform. 1999. V. 14. P. 31–40.
20. *Clark M.E., Gross L.J.* Periodic solutions to nonautonomous difference equations // Math. Biosci. 1990. V. 102. № 1. P. 105–119.
21. *Vesely M.* Construction of almost periodic sequences with given properties // Electron. J. Differ. Equat. 2008. V. 126.
22. *Vesely M.* Almost periodic homogeneous linear difference systems without almost periodic solutions // J. Difference Equat. Appl. 2012. V. 18. № 10. P. 1623–1647.
23. *Massera J.L.* The existence of periodic solutions of systems of differential equations // Duke Math. J. 1950. V. 17. № 4. P. 457–475.
24. *Makay G.* On some possible extensions of Massera's theorem // Electronic J. of Qualit. Theory of Differ. Equat. 2000. V. 16. P. 1–8.
25. *Zubelevich O.* A note on theorem of Massera // Regul. Chaotic Dyn. 2006. V. 11. № 4. P. 475–481.
26. *Li Y., Lin Z., Li Z.* A Massera type criterion for linear functional differential equations with advanced and delay // J. Math. Anal. Appl. 1996. V. 200. P. 717–725.
27. *Corduneanu C.* Almost Periodic Functions. New York, 1989.
28. *Левитан Б.М.* Почти периодические функции. М., 1953.
29. *Мишина А.П., Проскуряков И.В.* Справочная математическая библиотека. Высшая алгебра. М., 1965.
30. *Vleck F.S.V.* A note on the relation between periodic and orthogonal fundamental solutions of linear systems // Amer. Math. Monthly. V. 71. № 4. P. 406–408.

Институт прикладной математики и механики,
г. Донецк

Поступила в редакцию 26.12.2022 г.
После доработки 10.03.2023 г.
Принята к публикации 22.03.2023 г.