ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 4, с. 554–562

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 517.977

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПЕРЕКЛЮЧАЕМОЙ АФФИННОЙ СИСТЕМЫ ДЛЯ НЕКОТОРОГО КЛАССА ПЕРЕКЛЮЧАЮЩИХ СИГНАЛОВ

© 2023 г. А. С. Фурсов, П. А. Крылов

Исследована задача об устойчивости нулевого положения равновесия переключаемой аффинной системы, замкнутой линейной статической обратной связью по состоянию. Введено понятие допустимого управления для заданного множества переключающих сигналов и получено конструктивное условие проверки указанного свойства для произвольной линейной обратной связи. Сформулировано достаточное условие устойчивости нулевого положения равновесия переключаемой аффинной системы, замкнутой допустимым управлением.

DOI: 10.31857/S0374064123040118, EDN: ANVLXF

Введение. Как известно [1; 2, с. 10], кусочно-линейные системы могут быть эффективно использованы для аппроксимации нелинейных аффинных управляемых систем вида

$$\dot{x} = g(x) + p(x)u, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

с достаточно гладкими функциями $g(x)$, $p(x)$ и скалярным управлением u. Под кусочно-линейной системой обычно понимают динамическую систему, имеющую различную линейную динамику в разных областях непрерывного пространства состояний. Если говорить более точно, то аппроксимирующие линейные системы имеют вид

$$\dot{x} = A_i x + v_i + b_i u, \quad x \in X_i, \quad A_i \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad i = \overline{1, m}, \tag{2}$$

и фактически являются аффинными, поэтому далее будем называть кусочно-линейные аппроксимации *кусочно-аффинными*. Здесь множества X_i образуют некоторое разбиение пространства состояний $\mathbb{R}^n$ системы (1). Как правило, эти множества представляют собой замкнутые выпуклые многогранники, которые могут пересекаться только своими гранями. Под выпуклым многогранником понимаем выпуклое множество, ограниченное некоторым числом гиперплоскостей. При этом в общем случае многогранник может быть неограниченным. Далее замкнутые выпуклые многогранники разбиения будем обозначать через $\overline{M}_i$.

Алгоритмы управления, в частности стабилизирующие регуляторы, разрабатываемые для кусочно-аффинных аппроксимаций (2), позволяют успешно применять их и для исходных нелинейных систем (1) [2, с. 97; 3]. При этом для обоснования работоспособности указанных регуляторов можно использовать как численное моделирование, так и аналитические методы, например, аппарат дифференциальных включений.

В теории автоматического управления важнейшими задачами являются исследование устойчивости положения равновесия замкнутой системы (с реализованным алгоритмом управления) и стабилизация неустойчивого положения равновесия управляемого объекта, причём, как правило, в таких задачах идет речь о нулевом положении равновесия. В рамках рассматриваемого подхода к управлению нелинейными объектами вида (1), основанного на переходе к кусочно-аффинным аппроксимациям этих систем, далее в настоящей работе основное внимание будет уделено анализу устойчивости нулевого положения равновесия кусочно-аффинных систем, замкнутых линейной статической обратной связью вида $u = -\theta^{\mathrm{T}} x$, т.е. систем

$$\dot{x} = (A_i - b_i\theta^{\mathrm{T}})x + v_i, \quad x \in \overline{M}_i, \quad i = \overline{1, m}, \tag{3}$$

где $v_1 = 0$, $\theta \in \mathbb{R}^n$, а $\overline{M}_i$ – замкнутые выпуклые многогранники, образующие некоторое разбиение евклидова пространства $\mathbb{R}^n$. Под решением системы (3) обычно понимают абсолютно непрерывную функцию, удовлетворяющую уравнению

$$\dot{x} = (A_i - b_i\theta^{\mathrm{T}})x + v_i \tag{4}$$

внутри каждого многогранника $\overline{M}_i$ и доопределяемую на границах между этими многогранниками тем или иным способом, например, в соответствии с методом простейшего выпуклого доопределения [4, с. 40].

Исследованию устойчивости нулевого положения равновесия кусочно-аффинных систем посвящено достаточно большое количество работ различных авторов (см., например, библиографию в работе [2]). При этом, как правило, условия устойчивости формулируются на основе метода функций Ляпунова, в частности, кусочно-квадратичных функций Ляпунова.

Необходимо отметить, что устойчивость положения равновесия кусочно-аффинной системы (3) существенно зависит от разбиения пространства $\mathbb{R}^n$ на многогранники $\overline{M}_i$. Так, в работе [2, с. 56] сформулировано достаточное условие экспоненциальной устойчивости положения равновесия кусочно-аффинной системы, основанное на разрешимости решений линейных матричных неравенств и обеспечивающее существование кусочно-квадратичной функции Ляпунова для данной системы. При этом решения линейных матричных неравенств должны удовлетворять некоторым дополнительным условиям (что, вообще говоря, сильно усложняет проверку их существования), а сами неравенства включать матрицы, описывающие границы областей разбиения. В результате за счёт вариации областей разбиения можно влиять на свойства решений указанных матричных неравенств. Например, в работе [5] удалось добиться более простых условий на решения линейных матричных неравенств за счёт существенного упрощения областей разбиения. Таким образом, задача анализа устойчивости положения равновесия кусочно-аффинной системы остаётся актуальной с точки зрения конструктивности получаемых условий устойчивости.

Заметим, что для каждого фиксированного управления $u = -\theta^{\mathrm{T}}x$ замкнутую кусочно-аффинную систему (3) можно рассматривать (в случае, если на границах многогранников отсутствуют скользящие режимы) как переключаемую систему [6, с. 5], для которой переключающий сигнал $\sigma(x)$ является кусочно-постоянной функцией состояния. При этом значение переключающего сигнала постоянно внутри каждого многогранника разбиения и различно для внутренних точек разных многогранников, т.е. $\sigma(x) = i$, если $x \in M_i$ (через M_i обозначаем множество внутренних точек многогранника $\overline{M}_i$). Тогда разбиение пространства состояний на m многогранников можно определить заданием соответствующего переключающего сигнала.

Пусть теперь заданы семейство открытых аффинных режимов (управление u считаем неопределённым)

$$\dot{x} = A_i x + v_i + b_i u, \quad i = \overline{1, m},$$

и некоторое множество S переключающих сигналов, определяющих различные разбиения пространства состояний $\mathbb{R}^n$. Тогда получим управляемую переключаемую аффинную систему

$$\dot{x} = A_\sigma x + v_\sigma + b_\sigma u, \quad \sigma \in S, \quad v_1 = 0, \tag{5}$$

для которой, так же как и для системы (3), можно поставить задачу анализа устойчивости нулевого положения равновесия при её замыкании заданной обратной связью $u = u(x)$ $(u(0) = 0)$. Именно эта задача и является предметом исследования настоящей работы. Ниже будут даны более точные определения и формулировки, а пока отметим, что такая задача может возникать в случае управления системами с неопределённостями, например, когда значения функций $g(x)$, $p(x)$ и касательные гиперплоскости для функции $g(x)$ нелинейной системы (1) известны лишь для некоторого конечного множества точек $\{x_1, \ldots, x_m\}$ в пространстве состояний. В этом случае кусочно-аффинная аппроксимация может быть построена лишь по указанному набору узлов, при этом выбор разбиения пространства состояний на области активности построенных аффинных режимов становится неоднозначным, в связи с чем в таком случае естественно рассматривать кусочно-аффинную аппроксимацию как переключаемую аффинную систему (5) на некотором множестве S переключающих сигналов.

1. Основные определения и постановка задачи. Прежде чем перейти к точной постановке задачи, введём некоторые необходимые понятия. Рассмотрим разбиение евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ на m замкнутых выпуклых многогранников $\overline{M}_i$, $i=\overline{1,m}$. При этом считаем, что $0 \in M_1$. Так как пара выпуклых многогранников, не имеющих общих внутренних точек, может иметь не более одной общей грани, то в описанном разбиении каждый многогранник имеет не более $m-1$ граней.

Пусть $P_{ij} = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle n_{ij}, x\rangle = d_{ij}\}$ – плоскость, содержащая общую грань многогранников $\overline{M}_i$ и $\overline{M}_j$. Здесь n_{ij} – вектор нормали к плоскости P_{ij}, направленный в сторону многогранника $\overline{M}_j$, $d_{ij} \in \mathbb{R}$, а $\langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle$ – стандартное скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$.

Далее рассмотрим всевозможные наборы чисел $(\alpha_1 \ldots \alpha_p)$, удовлетворяющие условиям:

1) $\alpha_1,\ldots,\alpha_p \in \{1,\ldots,m\}$;

2) $2 \leqslant p \leqslant m$;

3) $\alpha_i \neq \alpha_j$ при $i \neq j$.

Каждому такому набору сопоставим множество $\overline{\Gamma}_{\alpha_1\ldots\alpha_p} = \bigcap_{i=1}^p \overline{M}_{\alpha_i}$. Пусть $\Gamma_{\alpha_1\ldots\alpha_p} = \overline{\Gamma}_{\alpha_1\ldots\alpha_p} \setminus \bigcup_{k\neq\alpha_1,\ldots,\alpha_p} \overline{M}_k$. Тогда множество

$$\Gamma = \bigcup_{\substack{(\alpha_1\ldots\alpha_p)\\ \alpha_1<\ldots<\alpha_p}} \Gamma_{\alpha_1\ldots\alpha_p}$$

содержит все граничные точки заданного разбиения евклидова пространства на выпуклые многогранники. Заметим, что:

1) в общем случае некоторые множества $\Gamma_{\alpha_1\ldots\alpha_p}$ могут быть пустыми;

2) $\Gamma_{\alpha_1\ldots\alpha_p} = \Gamma_{\beta_1\ldots\beta_p}$, если набор $(\beta_1\ldots\beta_p)$ может быть получен некоторой перестановкой чисел из набора $(\alpha_1\ldots\alpha_p)$;

3) любые два различных множества $\Gamma_{\alpha_1\ldots\alpha_p}$ и $\Gamma_{\beta_1\ldots\beta_r}$ не пересекаются.

Далее для удобства будем полагать $\Gamma_i = M_i$ и $\overline{\Gamma}_i = \overline{M}_i$, а также $n_{ij} = 0$, $d_{ij} = 1$, если $\Gamma_{ij} = \varnothing$. Легко видеть, что с учётом введённых понятий аналогично [2, с. 24] любое разбиение евклидова пространства на m выпуклых многогранников может быть описано набором нормалей n_{ij} и соответствующих чисел d_{ij}. Обозначим через $N = [n_{ijk}]$ трёхмерную матрицу размера $m\times m\times n$, для которой коэффициент n_{ijk} является k-й компонентой вектора n_{ij}, и через $D = [d_{ij}]_{i,j=1}^m$ – матрицу из $\mathbb{R}^{m\times m}$. При этом, очевидно, $n_{ji} = -n_{ij}$, $d_{ji} = -d_{ij}$ (в случае, если $n_{ij} = 0$, считаем, что $d_{ij} = d_{ji} = 1$). Для удобства полагаем $n_{ii} = 0$, $d_{ii} = 1$. Через F обозначим некоторое множество пар (N, D), задающих различные разбиения пространства $\mathbb{R}^n$ на m выпуклых многогранников.

Теперь рассмотрим переключаемую скалярную по входу аффинную систему

$$\dot{x} = A_\sigma x + v_\sigma + b_\sigma u, \quad \sigma \in S(F), \tag{6}$$

где $\sigma(x; N, D) : \mathbb{R}^n \to I = \{1,\ldots,m\}$ – кусочно-постоянная функция (переключающий сигнал), задаваемая парой $(N, D) \in F$ и принимающая постоянное значение i на каждом открытом выпуклом многограннике M_i; $x \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния; $u \in \mathbb{R}$ – управляющий вход; $A_\sigma = A\circ\sigma$ – композиция отображения $A : I \to \{A_1,\ldots,A_m\}$ и переключающего сигнала σ; $b_\sigma = b\circ\sigma$ и $v_\sigma = v\circ\sigma$ – аналогичные композиции для отображений $b : I \to \{b_1,\ldots,b_m\}$, $v : I \to \{v_1,\ldots,v_m\}$, причём считаем, что $v_1 = 0$. Через $\Gamma(N; D)$ будем обозначать множество граничных точек разбиения, задаваемого парой $(N, D) \in F$.

Значение функции $\sigma(x; N, D)$ в каждой точке $x \notin \Gamma(N; D)$ определяет активный режим (подсистему) функционирования (A_i, b_i, v_i) переключаемой системы (6), описываемый аффинной системой

$$\dot{x} = A_i x + v_i + b_i u.$$

Для того чтобы доопределить значения переключающего сигнала на множестве $\Gamma(N; D)$, необходимо задать для системы (6) конкретный алгоритм управления u.

Итак, замкнём систему (6) линейной обратной связью $u = -\theta^{\mathrm{т}} x$:

$$\dot{x} = A_\sigma x + v_\sigma - b_\sigma \theta^{\mathrm{т}} x, \quad \sigma \in S(F). \tag{7}$$

Пусть $\overline{A}_i = A_i - b_i\theta^{\mathrm{т}}$. Рассматриваемую обратную связь будем считать *допустимой*, если выполнено следующее условие.

Условие А. Для любой пары $(N, D) \in F$ и любого набора $(\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$ $(\Gamma_{\alpha_1,\ldots,\alpha_p} \neq \varnothing)$ верно, что для любого $x \in \Gamma_{\alpha_1,\ldots,\alpha_p}$ существует единственный номер $\alpha_i \in \{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\}$ такой, что для любого номера $\alpha_k \in \{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\}$, для которого $n_{\alpha_i\alpha_k} \neq 0$, выполняется неравенство

$$\langle n_{\alpha_i\alpha_k}, \overline{A}_{\alpha_i} x + v_{\alpha_i}\rangle < 0.$$

Фактически при выполнении этого условия в каждой точке границы многогранников существует единственный способ выбрать режим α_i таким образом, чтобы векторное поле выбранного режима в данной точке было направлено строго внутрь соответствующего многогранника. В этом случае можно естественным образом доопределить значения переключающего сигнала на границе, положив, учитывая условие А, $\sigma(x) = \alpha_i$.

Теперь остаётся заметить, что при выполнении данного условия и указанного выше доопределения переключающих сигналов решение замкнутой переключаемой системы (7) для любого начального условия $x(0)$ и любого переключающего сигнала $\sigma \in S(F)$ существует в смысле А.Ф. Филиппова [4, с. 40, 59] и единственно.

Замечание. При выполнении условия А любой переключающий сигнал $\sigma \in S(F)$, рассматриваемый вдоль траекторий замкнутой системы (7), является непрерывной справа функцией времени $\sigma(x(t))$.

Будем говорить, что нулевое решение замкнутой переключаемой системы (7) *глобально равномерно устойчиво*, если для любого фиксированного $\sigma \in S(F)$ нулевое решение соответствующей кусочно-аффинной системы глобально асимптотически устойчиво.

Постановка задачи. Для заданной допустимой обратной связи $u = -\theta^{\mathrm{т}} x$ исследовать нулевое решение замкнутой системы (7) на глобальную равномерную устойчивость.

2. О допустимых управлениях. Прежде чем перейти к проблеме исследования устойчивости положения равновесия переключаемой аффинной системы, рассмотрим вопрос о построении конструктивного алгоритма проверки условия А для заданной обратной связи $u = -\theta^{\mathrm{т}} x$. Оказывается, что основные шаги такого алгоритма можно свести к проверке совместности ряда систем линейных неравенств [7, с. 53].

Действительно, вначале заметим, что из условия 1 следует, что любое непустое множество $\Gamma_{\alpha_1,\ldots,\alpha_p}$ данного разбиения проходимо траекториями этой системы только в одну сторону. Более точно, верна следующая

Лемма. *Пусть для разбиения $(N, D) \in F$ системы (7), замкнутой допустимым управлением $u = -\theta^{\mathrm{т}} x$, выполнено равенство $\sigma(x_*; N, D) = \alpha_i$ для некоторого $x_* \in \Gamma_{\alpha_1,\ldots,\alpha_p}$. Тогда $\sigma(x; N, D) = \alpha_i$ для любого $x \in \Gamma_{\alpha_1,\ldots,\alpha_p}$.*

Доказательство. Предположим, что утверждение леммы неверно, т.е. найдётся такое $\hat{x} \in \Gamma_{\alpha_1,\ldots,\alpha_p}$, что $\sigma(\hat{x}; N, D) = \alpha_j$. Тогда по условию А

$$\max_{\alpha_k \in L^{\alpha_i}_{\alpha_1\ldots\alpha_p}} \langle n_{\alpha_i\alpha_k}, \overline{A}_{\alpha_i} x_* + v_{\alpha_i}\rangle < 0, \qquad \max_{\alpha_k \in L^{\alpha_j}_{\alpha_1\ldots\alpha_p}} \langle n_{\alpha_j\alpha_k}, \overline{A}_{\alpha_j} x_* + v_{\alpha_j}\rangle \geqslant 0$$

и

$$\max_{\alpha_k \in L^{\alpha_j}_{\alpha_1\ldots\alpha_p}} \langle n_{\alpha_j\alpha_k}, \overline{A}_{\alpha_j} \hat{x} + v_{\alpha_j}\rangle < 0, \qquad \max_{\alpha_k \in L^{\alpha_i}_{\alpha_1\ldots\alpha_p}} \langle n_{\alpha_i\alpha_k}, \overline{A}_{\alpha_i} \hat{x} + v_{\alpha_i}\rangle \geqslant 0,$$

где $L^{\alpha_r}_{\alpha_1\ldots\alpha_p} = \{\alpha_l \in \{\alpha_1 \ldots \alpha_p\} : l \neq r, \ n_{\alpha_r\alpha_l} \neq 0\}$.

Рассмотрим на $\Gamma_{\alpha_1,\ldots,\alpha_p}$ функцию

$$\varphi(x) = \max_{\alpha_k \in L^{\alpha_i}_{\alpha_1\ldots\alpha_p}} \langle n_{\alpha_i\alpha_k}, \overline{A}_{\alpha_i} x + v_{\alpha_i}\rangle - \max_{\alpha_k \in L^{\alpha_j}_{\alpha_1\ldots\alpha_p}} \langle n_{\alpha_j\alpha_k}, \overline{A}_{\alpha_j} x + v_{\alpha_j}\rangle.$$

Так как по условию $\sigma(x_*; N, D) = \alpha_i$ и по предположению $\sigma(\hat{x}; N, D) = \alpha_j$, то $\varphi(x_*) < 0$ и $\varphi(\hat{x}) > 0$. Далее, пусть $\gamma = \gamma(q)$, $q \in [0,1]$, – однопараметрическая непрерывная кривая на $\Gamma_{\alpha_1 \ldots \alpha_p}$, соединяющая точки x_* и $\hat{x}$. В силу непрерывности скалярного произведения функция $\lambda(q) = \varphi(\gamma(q))$ непрерывна на отрезке $[0,1]$ и при этом $\lambda(0) > 0$, а $\lambda(1) < 0$. Следовательно, найдётся такое $\tilde{q} \in (0,1)$, что $\lambda(\tilde{q}) = 0$ (если $\lambda(q)$ имеет более одного нуля на интервале $(0,1)$, то пусть $\tilde{q}$ будет минимальным из них). Но тогда для $\tilde{x} = \gamma(\tilde{q}) \in \Gamma_{\alpha_1,\ldots,\alpha_p}$ имеем $\varphi(\tilde{x}) = 0$. Отсюда следует, что

$$\max_{\alpha_k \in L^{\alpha_j}_{\alpha_1 \ldots \alpha_p}} \langle n_{\alpha_j \alpha_k}, \overline{A}_{\alpha_j} \tilde{x} + v_{\alpha_j} \rangle = 0, \qquad \max_{\alpha_k \in L^{\alpha_i}_{\alpha_1 \ldots \alpha_p}} \langle n_{\alpha_i \alpha_k}, \overline{A}_{\alpha_i} \tilde{x} + v_{\alpha_i} \rangle = 0.$$

Тогда в силу условия А должен найтись номер $\alpha_r \in \{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\}$ такой, для которого будет выполнено неравенство

$$\max_{\alpha_k \in L^{\alpha_r}_{\alpha_1 \ldots \alpha_p}} \langle n_{\alpha_r \alpha_k}, \overline{A}_{\alpha_r} \tilde{x} + v_{\alpha_r} \rangle < 0,$$

сохраняющее в силу непрерывности скалярного произведения свой знак в некоторой окрестности точки $\tilde{q}$ на отрезке $[0,1]$. В этом случае найдётся такое $\varepsilon > 0$, что будут выполнены одновременно два равенства

$$\sigma(x(\gamma(\tilde{x} - \varepsilon)); N, D) = \alpha_i, \quad \sigma(x(\gamma(\tilde{x} - \varepsilon)); N, D) = \alpha_r,$$

что противоречит выполнению условия А на множестве $\Gamma_{\alpha_1,\ldots,\alpha_p}$. Из полученного противоречия следует, что $\sigma(x; N, D) = \alpha_i$ для любого $x \in \Gamma_{\alpha_1,\ldots,\alpha_p}$. Лемма доказана.

С учётом доказанной леммы далее будем использовать запись $\sigma(\Gamma_{\alpha_1,\ldots,\alpha_p}; N, D) = \alpha_i$, понимая под этим, что $\sigma(x; N, D) = \alpha_i$ для любого $x \in \Gamma_{\alpha_1,\ldots,\alpha_p}$.

Опишем теперь введённые выше множества граничных точек произвольного разбиения (N, D) на языке линейных неравенств. Очевидно, что для любого $i \in I = \{1, \ldots, m\}$

$$x \in \overline{M}_i \Leftrightarrow \begin{cases} \langle n_{i1}, x \rangle \leqslant d_{i1}, \\ \ldots \\ \langle n_{im}, x \rangle \leqslant d_{im}. \end{cases} \tag{8}$$

Тогда для любого набора $(\alpha_1 \ldots \alpha_p)$

$$x \in \overline{\Gamma}_{\alpha_1 \ldots \alpha_p} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \overline{M}_{\alpha_1}, \\ \ldots \\ x \in \overline{M}_{\alpha_p}. \end{cases} \tag{9}$$

Для любого подмножества $J \subset I$ и любого индекса $i \notin J$

$$x \in \overline{M}_i \setminus \bigcup_{j \in J} \overline{M}_j \Leftrightarrow \begin{cases} \langle n_{ij}, x \rangle < d_{ij} & \text{при всех } \ j \in J, \\ \langle n_{ik}, x \rangle \leqslant d_{ik} & \text{при всех } \ k \in I \setminus J. \end{cases} \tag{10}$$

Далее, учитывая, что

$$\Gamma_{\alpha_1 \ldots \alpha_p} = \overline{\Gamma}_{\alpha_1 \ldots \alpha_p} \setminus \Bigl(\bigcup_{k \neq \alpha_1,\ldots,\alpha_p} \overline{M}_k \Bigr) = \Bigl(\bigcap_{i=1}^{p} \overline{M}_{\alpha_i} \Bigr) \Bigm\backslash \Bigl(\bigcup_{k \neq \alpha_1,\ldots,\alpha_p} \overline{M}_k \Bigr) = \bigcap_{i=1}^{p} \Bigl(\overline{M}_{\alpha_i} \setminus \bigcup_{k \neq \alpha_1,\ldots,\alpha_p} \overline{M}_k \Bigr),$$

имеем

$$x \in \Gamma_{\alpha_1 \ldots \alpha_p} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \overline{M}_{\alpha_1} \setminus \bigcup_{k \neq \alpha_1,\ldots,\alpha_p} \overline{M}_k, \\ \ldots \\ x \in \overline{M}_{\alpha_p} \setminus \bigcup_{k \neq \alpha_1,\ldots,\alpha_p} \overline{M}_k. \end{cases} \tag{11}$$

Используя системы линейных неравенств (8)–(11), сформулируем критерий о допустимых управлениях, который фактически позволяет построить численную процедуру проверки выполнения условия А для фиксированной линейной обратной связи $u = -\theta^{\mathrm{т}} x$ и заданного разбиения (N, D).

Теорема 1. *Линейная обратная связь $u = -\theta^{\mathrm{т}} x$ является допустимым управлением для системы (6) тогда и только тогда, когда для каждого разбиения $(N, D) \in F$ и каждого набора $(\alpha_1 \ldots \alpha_p)$ такого, что $\alpha_1 < \ldots < \alpha_p$, выполнено одно из следующих условий:*

система линейных неравенств

$$\langle n_{\alpha_s h}, x\rangle < d_{\alpha_s h} \quad \textit{при всех} \quad \alpha_s \in \{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\} \quad \textit{и} \quad h \in I \setminus \{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\},$$

$$\langle n_{\alpha_s g}, x\rangle \leqslant d_{\alpha_s g} \quad \textit{при всех} \quad \alpha_s \in \{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\} \quad \textit{и} \quad g \in \{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\} \tag{12}$$

не имеет решений;

существует единственный номер $\alpha_i \in \{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\}$ такой, что для каждого $\alpha_k \in L^{\alpha_i}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_p}$ соответствующая система линейных неравенств

$$\langle n_{\alpha_s h}, x\rangle < d_{\alpha_s h} \quad \textit{при всех} \quad \alpha_s \in \{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\} \quad \textit{и} \quad h \in I \setminus \{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\},$$

$$\langle n_{\alpha_s g}, x\rangle \leqslant d_{\alpha_s g} \quad \textit{при всех} \quad \alpha_s \in \{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\} \quad \textit{и} \quad g \in \{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\},$$

$$\langle \overline{A}^{\mathrm{т}}_{\alpha_i} n_{\alpha_i \alpha_k}, x\rangle + \langle n_{\alpha_i \alpha_k}, v_{\alpha_i}\rangle \geqslant 0 \tag{13}$$

не имеет решений.

Доказательство. Необходимость. Вначале заметим, что в силу свойств скалярного произведения выполнено равенство

$$\langle n_{\alpha_i \alpha_k}, \overline{A}_{\alpha_i} x + v_{\alpha_i}\rangle = \langle \overline{A}^{\mathrm{т}}_{\alpha_i} n_{\alpha_i \alpha_k}, x\rangle + \langle n_{\alpha_i \alpha_k}, v_{\alpha_i}\rangle.$$

Далее, пусть управление $u = -\theta^{\mathrm{т}} x$ является допустимым. Зафиксируем произвольное разбиение $(N, D) \in F$ и рассмотрим для него некоторое непустое множество $\Gamma_{\alpha_1 \ldots \alpha_p}$. Тогда в силу условия А и леммы найдётся единственный номер $\alpha_i \in \{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\}$ такой, что $\sigma(\Gamma_{\alpha_1,\ldots,\alpha_p}; N, D) = \alpha_i$, т.е.

$$\max_{\alpha_k \in L^{\alpha_i}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_p}} \{\langle \overline{A}^{\mathrm{т}}_{\alpha_i} n_{\alpha_i \alpha_k}, x\rangle + \langle n_{\alpha_i \alpha_k}, v_{\alpha_i}\rangle\} < 0 \tag{14}$$

для каждого $x \in \Gamma_{\alpha_1 \ldots \alpha_p}$. Но тогда для данного α_i все системы (13) должны быть несовместны, так как в противном случае будет нарушено условие (14). С другой стороны, если найдётся ещё один номер $\alpha_j \in \{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\}$, отличный от α_i и такой, что системы

$$\langle n_{\alpha_s h}, x\rangle < d_{\alpha_s h} \quad \text{при всех} \quad \alpha_s \in \{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\} \quad \text{и} \quad h \in I \setminus \{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\},$$

$$\langle n_{\alpha_s g}, x\rangle \leqslant d_{\alpha_s g} \quad \text{при всех} \quad \alpha_s \in \{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\} \quad \text{и} \quad g \in \{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\},$$

$$\langle \overline{A}^{\mathrm{т}}_{\alpha_j} n_{\alpha_j \alpha_k}, x\rangle + \langle n_{\alpha_j \alpha_k}, v_{\alpha_j}\rangle \geqslant 0$$

не имеют решений при всех $\alpha_k \in L^{\alpha_j}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_p}$, то тогда для всех $x \in \Gamma_{\alpha_1 \ldots \alpha_p}$

$$\max_{\alpha_k \in L^{\alpha_j}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_p}} \{\langle \overline{A}^{\mathrm{т}}_{\alpha_j} n_{\alpha_j \alpha_k}, x\rangle + \langle n_{\alpha_j \alpha_k}, v_{\alpha_j}\rangle\} < 0.$$

Отсюда следует, что номер α_i, для которого выполняется неравенство (14), не является единственным, что противоречит выполнению условия А для множества $\Gamma_{\alpha_1 \ldots \alpha_p}$. Необходимость условия теоремы доказана.

Достаточность. Действительно, пусть при некотором фиксированном управлении $u = -\theta^{\mathrm{т}} x$ и произвольном разбиении (N, D) для любого непустого $\Gamma_{\alpha_1 \ldots \alpha_p} \in \Gamma(N, D)$ такого, что $\alpha_1 < \ldots < \alpha_p$, существует единственный номер $\alpha_i \in \{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\}$ такой, что все соответствующие системы (13) являются несовместными. Тогда для любого $x \in \Gamma_{\alpha_1 \ldots \alpha_p}$ справедливо неравенство (14), из чего и следует выполнение условия A для рассматриваемого разбиения (N, D). В силу произвольности рассматриваемого разбиения получаем, что управление $u = -\theta^{\mathrm{T}} x$ является допустимым. Теорема доказана.

Заметим, что проверка на совместность систем (12), (13) может быть осуществлена на основе известного рангового критерия совместности систем линейных неравенств (см., например, [7, с. 53]).

Теорема 1 фактически предоставляет возможность построения численной процедуры проверки выполнения условия A для любого фиксированного разбиения $(N, D) \in F$. И если множество F содержит конечное число таких пар, то проверку условия A для всего множества можно выполнить, последовательно перебирая все различные разбиения. Однако возникает вопрос, можно ли подобную численную процедуру построить в случае, когда множество F содержит бесконечное число разбиений? Оказывается, это можно сделать, когда оно допускает линейную параметризацию.

Действительно, пусть множество разбиений F можно представить в виде параметрического семейства вида

$$F = \{(N, D(\kappa))\}, \tag{15}$$

где $N = [n_{ijk}]$ — фиксированная матрица размерности $m \times m \times n$, а $D(\kappa)$ – матрица, элементы которой линейно зависят от параметров $\kappa_1, \ \ldots, \ \kappa_r$, а именно

$$d_{ij} = d_{ij}^0 + d_{ij}^1 \kappa_1 + \ldots + d_{ij}^r \kappa_r, \quad d_{ij}^k \in \mathbb{R}, \quad k = \overline{1, r},$$

где вектор $\kappa = (\kappa_1, \ldots, \kappa_r)$ удовлетворяет линейным ограничениям

$$\Phi\kappa \leqslant \varphi, \quad \Phi \in \mathbb{R}^{l \times r}, \quad \varphi \in \mathbb{R}^l,$$

для некоторого натурального l. При этом если $n_{ij} = 0$, то $d_{ij}^0 = 1$ и $d_{ij}^1 = \ldots = d_{ij}^r = 0$. Теперь можно сформулировать критерий о допустимых управлениях для множества $F = \{(N, D(\kappa))\}$, который является прямым следствием теоремы 1.

Следствие. *Линейная обратная связь $u = -\theta^{\mathrm{T}} x$ является допустимым управлением для системы (6) с множеством разбиений (15) тогда и только тогда, когда для каждого набора $(\alpha_1 \ldots \alpha_p)$ такого, что $\alpha_1 < \ldots < \alpha_p$, выполнено одно из следующих условий:*

система линейных неравенств

$$\langle n_{\alpha_s h}, x\rangle < d_{\alpha_s h}^0 + d_{\alpha_s h}^1 \kappa_1 + \ldots + d_{\alpha_s h}^r \kappa_r \quad \textit{при всех} \ \ \alpha_s \in \{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\} \ \ \textit{и} \ \ h \in I \setminus \{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\},$$

$$\langle n_{\alpha_s g}, x\rangle \leqslant d_{\alpha_s g}^0 + d_{\alpha_s g}^1 \kappa_1 + \ldots + d_{\alpha_s g}^r \kappa_r \quad \textit{при всех} \ \ \alpha_s \in \{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\} \ \textit{и} \ g \in \{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\},$$

$$\Phi\kappa \leqslant \varphi$$

не имеет решений;

существует единственный номер $\alpha_i \in \{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\}$ такой, что для каждого $\alpha_k \in L_{\alpha_1, \ldots, \alpha_p}^{\alpha_i}$ соответствующая система линейных неравенств

$$\langle n_{\alpha_s h}, x\rangle < d_{\alpha_s h}^0 + d_{\alpha_s h}^1 \kappa_1 + \ldots + d_{\alpha_s h}^r \kappa_r \quad \textit{при всех} \ \ \alpha_s \in \{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\} \ \ \textit{и} \ \ h \in I \setminus \{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\},$$

$$\langle n_{\alpha_s g}, x\rangle \leqslant d_{\alpha_s g}^0 + d_{\alpha_s g}^1 \kappa_1 + \ldots + d_{\alpha_s g}^r \kappa_r \quad \textit{при всех} \ \ \alpha_s \in \{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\} \ \ \textit{и} \ \ g \in \{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\},$$

$$\Phi\kappa \leqslant \varphi, \quad \langle \overline{A}_{\alpha_i}^{\mathrm{T}} n_{\alpha_i \alpha_k}, x\rangle + \langle n_{\alpha_i \alpha_k}, v_{\alpha_i}\rangle \geqslant 0$$

не имеет решений.

Заметим, что следствие даёт возможность построить численную процедуру проверки выполнения условия A для переключаемой аффинной системы, допускающей линейную параметризацию на основе ранговых критериев совместности систем линейных неравенств.

3. Достаточное условие устойчивости замкнутой переключаемой аффинной системы. Рассмотрим систему (7) при некотором допустимом управлении $u = -\theta^{\mathrm{т}}x$. Прежде чем сформулировать достаточное условие устойчивости нулевого решения полученной замкнутой системы, введём понятие графа дискретных состояний для произвольного переключающего сигнала $\sigma \in S(F)$ этой системы.

Заметим, что рассматриваемая замкнутая система (7) при фиксированном переключающем сигнале $\sigma \in S(F)$ фактически является гибридной системой, для описания которой можно использовать так называемый граф дискретных состояний. В данном случае под дискретными состояними можно понимать номера режимов замкнутой системы (7). Таким образом, каждому переключающему сигналу $\sigma \in S(F)$ системы (7), замкнутой допустимым управлением $u = -\theta^{\mathrm{т}}x$, сопоставим ориентированный граф состояний $G(\sigma)$, вершинами которого являются номера режимов этой системы, а наличие ребра $i \to j$ будет означать существование траектории соответствующей системы, при движении вдоль которой режим i сменяется режимом j. Напомним, что ориентированный граф G является *слабо связным*, если соответствующий ему неориентированный граф связный.

Теорема 2. *Пусть для системы (7), замкнутой допустимым управлением* $u = -\theta^{\mathrm{т}}x$, *все матрицы* $A_i - b_i\theta^{\mathrm{т}}$, $i = \overline{1,m}$, *не имеют собственных значений на мнимой оси и для любого переключающего сигнала* $\sigma \in S(F)$ *соответствующий ориентированный граф* $G(\sigma)$ *слабо связный и не содержит циклов. Пусть подсистема системы (7) с индексом 1 асимптотически устойчива, а для остальных режимов* $(i = \overline{2,m})$ *и для любого* $\sigma \in S(F)$ *выполнены следующие условия:*

1) матрица $A_i - b_i\theta^{\mathrm{т}}$ *устойчива или область функционирования режима* i *(многогранник* M_i*) ограничена;*

2) $x_0^i \notin \Gamma(N,D)$, *где* $x_0^i \equiv (A_i - b_i\theta^m)^{-1}v_i$ *– стационарное решение аффинной системы, являющейся* i*-м режимом переключаемой системы (7);*

3) $\sigma(x_0^i;N,D) \neq i$.

Тогда нулевое решение системы (7) глобально равномерно устойчиво.

Доказательство. Пусть для замкнутой системы (7) выполнены условия теоремы. Зафиксировав некоторый переключающий сигнал $\sigma^* \in S(F)$ и начальное условие $x(0) = x^* \in M_i$, $i \in \{2,\ldots,m\}$ (не ограничивая общности считаем, что начальное значение x^* не лежит на границе разбиения), рассмотрим соответствующее решение $x^*(t)$. Очевидно, что $\sigma(x^*(0);N,D) = i$. Покажем, что найдётся такое t_1, для которого $\sigma^*(x^*(t_1);N,D) \neq i$.

Действительно, если матрица $A_i - b_i\theta^{\mathrm{т}}$ устойчива, то тогда система (4) асимптотически устойчива и $\lim\limits_{t\to\infty} x^*(t) = x_0^i$. В силу условий 2), 3) теоремы $x_0^i \notin \overline{M}_i$. Следовательно, найдётся такое $t_1 > 0$, для которого $x^*(t_1) \notin \overline{M}_i$. А так как по определению переключающий сигнал может принимать значение i только в точках, принадлежащих замкнутому многограннику $\overline{M}_i$, то $\sigma^*(x^*(t_1);N,D) \neq i$.

В случае если матрица $A_i - b_i\theta^{\mathrm{т}}$ неустойчива, то по условию 1) область функционирования режима i ограничена. Пусть $z_1(t), \ \ldots, \ z_n(t)$ – нормальный базис [8, с. 139] системы (4) при $v_i = 0$. Тогда любое решение системы (4) можно представить в виде

$$x(t) = c_1z_1(t) + \ldots + c_nz_n(t) + x_0^i, \quad c_l \in \mathbb{R}.$$

Поскольку матрица $A_i - b_i\theta^{\mathrm{т}}$ не имеет собственных значений на мнимой оси, то показатели Ляпунова вектор-функций из рассматриваемого базиса либо строго положительны, либо строго отрицательны. Пусть функции $z_1(t), \ \ldots, \ z_p(t)$ имеют строго отрицательные показатели Ляпунова, а $z_{p+1}(t), \ \ldots, \ z_n(t)$ – строго положительные. Если для решения $x^*(t)$ с начальным условием $x(0) = x^* \in M_i$ выполняются равенства $c_l = 0$ при всех $l > p$, то это решение стремится к точке $x_0^i \notin \overline{M}_i$, а если $c_l \neq 0$ хотя бы для одного номера $l > p$, то в силу свойства несжимаемости [8, с. 142] нормального базиса линейной однородной системы соответствующее решение $x^*(t)$ неограниченное. Тогда в силу приведённых рассуждений и ограниченности замкнутого многогранника $\overline{M}_i$ найдётся такое $t_1 > 0$, для которого $x^*(t_1) \notin \overline{M}_i$ и, следовательно, $\sigma^*(x^*(t_1);N,D) \neq i$. Из этого следует, что в соответствующем графе $G(\sigma^*)$ из любой вершины с номером $i = \{2,\ldots,m\}$ выходит хотя бы одно ребро. Поскольку известно [9], что в ориентированном графе без циклов есть хотя бы один сток (вершина, из которой не выходит ни одного ребра), то, следовательно, вершина с номером 1 – единственный сток рассматриваемого графа $G(\sigma^*)$.

Из приведённых выше рассуждений следует, что вдоль любой траектории системы (7) при произвольном $\sigma^* \in S(F)$ любой i-й режим $(i = \{2, \ldots, m\})$ может быть активным непрерывно лишь конечное время и не может повторяться бесконечное число раз в силу отсутствия циклов в соответствующем графе $G(\sigma^*)$. И поскольку количество различных режимов у системы (7) конечно, то для любых начальных условий за конечное время траектория попадет в многогранник M_1 и не сможет уже его покинуть при $t \to \infty$, так как вершина с номером 1 является стоком графа $G(\sigma^*)$.

Рассмотрим теперь произвольное решение $x(t)$ системы (7). Пусть $t^* > 0$ – такой момент времени, что $x(t) \in M_1$ при $t \geqslant t^*$. Тогда при $t \geqslant t^*$ эта траектория является решением системы

$$\dot{x} = (A_1 - b_1\theta^{\mathrm{T}})x,$$

для которой по условию теоремы матрица $A_1 - b_1\theta^{\mathrm{T}}$ устойчива. Тогда $\|x(t)\| \to 0$ при $t \to \to \infty$. Таким образом, получаем, что норма любого решения системы (7) стремится к нулю при $t \to \infty$. Отсюда, учитывая, что $0 \in M_1$ и, следовательно, многогранник M_1 содержит некоторую окрестность нуля, можно сделать вывод [6, с. 27] о глобальной асимптотической устойчивости системы (7). Теорема доказана.

В заключение отметим, что практическое применение сформулированного достаточного условия глобальной равномерной устойчивости переключаемой аффинной системы (6) при замыкании её обратной связью $u = -\theta^{\mathrm{T}}x$ состоит из двух основных шагов. Первый шаг заключается в проверке допустимости выбранного управления и может быть реализован численно в соответствии с теоремой 1. Второй шаг состоит в проверке выполнения условия теоремы 2, что, в частности, предполагает построение графов дискретных состояний замкнутой системы (7) для заданных переключающих сигналов. К сожалению, пока для этой задачи не найдено конструктивного решения в общем случае. В связи с этим предметом дальнейших исследований авторов настоящей работы является разработка численно реализуемого метода построения графа дискретных состояний для системы (6), замкнутой допустимым управлением.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 22-21-00162).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Rewienski M., White J.* Model order reduction for nonlinear dynamical systems based on trajectory piecewise-linear approximations // Linear Algebra and its Appl. 2006. V. 415. P. 426–454.
2. *Johansson M.* Piecewise Linear Control System. Berlin; Heidelberg, 2003.
3. *Rodrigues L., How J.* Synthesis of piecewise-affine controllers for stabilization of nonlinear systems // Proc. of the IEEE Conf. on Decision and Control. 2004. V. 3. P. 2071–2076.
4. *Филиппов А.Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М., 1985.
5. *Li C., Chen G., Liao X.* Stability of piecewise affine systems with application to chaos stabilization // Chaos. 2007. V. 17. P. 023123.
6. *Liberzon D.* Switching in Systems and Control. Boston, 2003.
7. *Черников С.Н.* Линейные неравенства. М., 1968.
8. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. М., 1967.
9. *Fraysseix H., Mendez P., Rosenstiehl P.* Bipolar orientations revisited // Discrete Appl. Math. 1995. V. 56. P. 426–454.

Электротехнический университет,
г. Ханчжоу, Китай,
Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова,
Институт проблем передачи информации
имени А.А. Харкевича, г. Москва

Поступила в редакцию 13.02.2023 г.
После доработки 22.03.2023 г.
Принята к публикации 22.03.2023 г.