ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 4, с. 563–566

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.929

АСИМПТОТИКА РЕЛАКСАЦИОННЫХ ЦИКЛОВ В ОБОБЩЁННОМ ЛОГИСТИЧЕСКОМ УРАВНЕНИИ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

© 2023 г. С. А. Кащенко

Асимптотическими методами исследованы решения модифицированного логистического уравнения с запаздыванием, содержащего большой параметр. Приведён результат о существовании и устойчивости релаксационного цикла.

DOI: 10.31857/S037406412304012X, EDN: AOJNDZ

Введение. Исследованию логистического уравнения с запаздыванием

$$\dot{u} = \lambda[1 - u(t-1)]u \tag{1}$$

посвящено множество литературы (см., например, [1–7]). Принято считать, что функция $u(t)$ описывает динамику изменения плотности популяции, поэтому $u(t) \geqslant 0$. Параметр λ называют *мальтузианским коэффициентом*. При значениях λ близких к $\pi/2$ наблюдается бифуркация Андронова–Хопфа. Асимптотика соответствующего цикла приведена в [7, 8]. При $\lambda \gg 1$ в (1) имеется устойчивый релаксационный цикл $u^0(t,\lambda)$ с периодом $T^0(\lambda)$. Его асимптотика рассмотрена в статье [9]. Отметим, что все неотрицательные решения (1) при всех достаточно больших t удовлетворяют оценке $u(t) \leqslant \exp\lambda$.

В настоящей работе предложены результаты исследования более общего уравнения

$$\dot{u} = \lambda[1 - F(u(t-1))]u. \tag{2}$$

Ограничимся рассмотрением двух наиболее значимых случаев, иллюстрирующих отличия в динамике уравнения (2) от (1). В одном из них предполагаем, что $\lim\limits_{u\to\infty} F(u) = \infty$, а в другом $\lim\limits_{u\to\infty} F(u) = A < \infty$ $(A > 1)$; функцию $F(u)$ считаем монотонно возрастающей.

1. Первый случай. Пусть $F(u) = u^\alpha$, $\alpha > 0$. В (2) произведём замену $u^\alpha = v$ и получим классическое логистическое уравнение с запаздыванием

$$\dot{v} = \alpha\lambda[1 - v(t-1)]v. \tag{3}$$

При выборе подходящим способом параметра λ решениями уравнения (3) могут быть как устойчивые гармонические колебания $(\alpha \sim \lambda^{-1}\pi/2)$, так и релаксационные колебания (при $\alpha \gg 1$). При $\alpha\lambda < \pi/2$ состояние равновесия $u_0 \equiv 1$ асимптотически устойчиво. Отметим ещё (см. [4, 5, 10]), что при $\alpha\lambda \leqslant 37/24$ все положительные решения уравнения (3) стремятся к единице при $t \to \infty$.

Интересно рассмотреть случай, когда $F(u) = \gamma \ln u$, где $\gamma > 0$. После замены $u = \exp v$ приходим к линейному уравнению

$$\dot{v} = \lambda[1 - \gamma v(t-1)]. \tag{4}$$

При $0 < \lambda\gamma < \pi/2$ все решения (4) стремятся к состоянию равновесия $u_0 \equiv \gamma^{-1}$, а значит, все решения (3) при $t \to \infty$ стремятся к состоянию равновесия $\exp(\gamma^{-1})$. При $\lambda\gamma > \pi/2$ решения (4) (и (3)) неограничены при $t \to \infty$. Если же $\lambda\gamma = \pi/2$, то для (4) и (3) имеется устойчивое однопараметрическое семейство периодических решений $v = \gamma^{-1} + c\cos(t\pi/2 + \varphi)$,

$u = \exp(\gamma^{-1} + c\cos(t\pi/2 + \varphi))$. Обратим внимание, что в случае когда $F(u) = \gamma \ln(1 + u)$ все решения уравнения (2) ограничены при $t \to \infty$.

2. Второй случай. В качестве примера для иллюстрации динамических особенностей (2) фиксируем функцию

$$F(u) = u(1 + \alpha u)^{-1}, \quad \alpha = A^{-1} < 1. \tag{5}$$

Основное предположение состоит в том, что параметр λ является достаточно бóльшим ($\lambda \gg \gg 1$). Ниже *медленно осциллирующим* называется такое решение уравнения (2), у которого расстояние между соседними корнями функции $u(t) - 1 = 0$ больше, чем время запаздывания, равное единице. Отметим, что (также как и для (1)) для (2) и (5) имеются и быстро осциллирующие решения. Их асимптотику при $\lambda \gg 1$ здесь не приводим, поскольку все они неустойчивы.

Решение $u(t, \tau)$ уравнения (3) с начальным условием, заданным в момент $t = \tau$, имеет вид

$$u(t, \tau) = u(\tau, \tau) \exp\left[\lambda \int\limits_{\tau}^{t} (1 - F(u(s - 1, \tau)))\, ds\right]. \tag{6}$$

Для того чтобы сформулировать основной результат, введём обозначение $t_0 = 1 + (A - 1)^{-1}$.

Теорема. *Пусть выполнено равенство (5). Тогда при всех достаточно бóльших λ уравнение (2) имеет асимптотически орбитально устойчивое медленно осциллирующее периодическое решение $u_0(t, \lambda)$ с периодом $T_0(\lambda)$, для которого справедливы оценки*

$$u_0(t, \lambda) = \begin{cases} \exp(\lambda t(1 + o(1))), & t \in [0, 1], \\ \exp[\lambda(1 + (1 - A)(t - 1))(1 + o(1))], & t \in [1, t_0 + 1], \\ \exp[\lambda(t - A - t_1^0)(1 + o(1))], & t \in [t_0 + 1, T_0(\lambda)], \end{cases} \qquad T_0(\lambda) = A^2(A - 1)^{-1} + o(1).$$

Доказательство. Фиксируем произвольно значение $\delta \in (0, 1/2)$. Обозначим через S множество таких функций $\varphi(s) \in C_{[-1,0]}$, для которых выполнены условия

$$\varphi(0) = 1, \quad 0 \leqslant \varphi(s) \leqslant \exp(\lambda \delta s) \ \text{ для } \ s \in [-1, 0]. \tag{7}$$

Исследуем асимптотику всех решений $u(t, \varphi)$ с начальными условиями $\varphi(s) \in S$, заданными при $t = 0$. Отметим, что все фигурирующие выражения вида $o(1)$ выполняются равномерно по всем $\varphi(s) \in S$. Положим в формуле (6) $\tau = 0$ и используем соотношение (7). Тогда на отрезке $t \in [0, 1]$ имеем асимптотическое равенство

$$u(t, \varphi) = \exp(\lambda(1 + o(1))t).$$

Затем положим в (6) $\tau = 1$, тогда при $t \in [1, t_0 + 1]$ приходим к формуле

$$u(t, \varphi) = \exp[\lambda(1 + (1 - A)(t - 1))(1 + o(1))]. \tag{8}$$

Ниже через $t_1(\varphi)$ и $t_2(\varphi)$ будем обозначать первый и второй положительные корни уравнения $u(t, \varphi) = 1$. Отметим, что для $t_1(\varphi)$ выполнено соотношение $t_1(\varphi) = t_0 + o(1)$. При $t \in [t_1(\varphi) + 1, t_2(\varphi)]$ положим в (6) $\tau = t_1(\varphi) + 1$ и из (8) приходим к равенству

$$u(t, \varphi) = \exp[\lambda(1 + o(1))(1 - A + t - (t_1(\varphi) + 1))].$$

Отсюда получаем, что $t_2(\varphi) = A^2(A - 1)^{-1} + o(1)$.

Оператор последования Π введём по правилу

$$\Pi(\varphi(s)) = u(s + t_2(\varphi), \varphi).$$

В итоге

$$\Pi(\varphi(s)) \in S \ \text{ и } \ \Pi S \in S, \tag{9}$$

где S – множество функций, удовлетворяющих условиям (7).

Воспользуемся общими утверждениями (см., например, [11, с. 227–236]) о существовании неподвижной точки отображения множества в себя. Тогда из (9) следует существование в S неподвижной точки $\varphi_0(s)$ оператора П. Тем самым функция $u_0(t,\lambda) = u(t,\varphi_0)$ является периодической с периодом $T_0(\lambda) = t_2(\varphi_0)$. Простое, но громоздкое обоснование устойчивости решения $u_0(t,\lambda)$ здесь не приводим. Детально необходимые для этого построения изложены в монографии [10, с. 128–136]. Теорема доказана.

Заметим, что явная формула (5) приведена лишь для примера. Утверждение теоремы и её доказательство сохраняют силу и для произвольной положительной функции $F(u)$, удовлетворяющей предельному равенству $F(u) \to A$ при $u \to \infty$.

Отметим наиболее важные отличия при $\lambda \gg 1$ цикла $u_0(t,\lambda)$ уравнения (2) при условии (5) и релаксационного цикла $u^0(t,\lambda)$ уравнения (1). Значения их максимумов примерно одни и те же, а значения их минимумов и периодов $T_0(\lambda)$ и $T^0(\lambda)$ отличаются существенно:

$$\min_t u_0(t,\lambda) = \exp(\lambda(1 - A + o(1))), \quad \min_t u^0(t,\lambda) = \exp(-\exp(\lambda(1 + o(1)))),$$

$$T_0(\lambda) = A^2(A-1)^{-1} + o(1), \quad T^0(\lambda) = \lambda^{-1}(1 + o(1))\exp\lambda.$$

На рисунке приведены графики функций $u_0(t,\lambda)$ и $u^0(t,\lambda)$ при $\lambda = 3$, $\alpha = 0.4$.

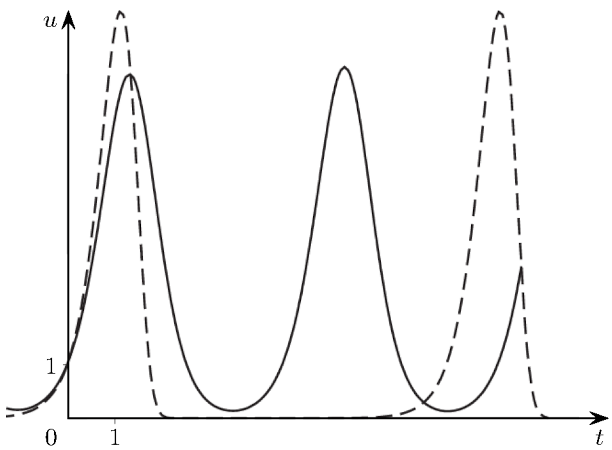

Рисунок. Графики функций $u_0(t,\lambda)$ (сплошная кривая) и $u^0(t,\lambda)$ (штриховая).

Заключение. В математической экологии функция $F(u(t-1))$ в уравнении (2) характеризует сопротивление внешней среды. Нами показано, что ограничение на эту функцию $F(u) \leqslant A$ в экстремальной ситуации при $\lambda \gg 1$ способствует стабилизации колебаний. Имеется в виду, что колебания становятся “безопаснее”: наименьшее значение для $u_0(t,\lambda)$ существенно больше, чем $u^0(t,\lambda)$, период $T_0(\lambda)$ для $u_0(t,\lambda)$ существенно меньше, чем период $T^0(\lambda)$ для $u^0(t,\lambda)$. Отметим ещё, что в статье [12] приведены результаты динамики решений для некоторых уравнений с запаздыванием, обобщающих уравнение (1).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 21-71-30011).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Murray J.D.* Mathematical Biology II. Spatial Models and Biomedical Applications. Interdisciplinary Applied Mathematics. V. 18. New York, 2003.
2. *Wu J.* Theory and Applications of Partial Functional Differential Equations. Applied Mathematical Sciences. V. 119. New York, 1996.
3. *Kuang Y.* Delay Differential Equations with Applications in Population Dynamics. Mathematics in Science and Engineering. V. 191. Boston, 1993.

4. *Wright E.M.* A non-linear difference-differential equation // J. für die reine und angewandte Mathematik. 1955. Bd. 194. S. 66–87.
5. *Кащенко С.А., Логинов Д.О.* Оценка области глобальной устойчивости состояния равновесия логистического уравнения с запаздыванием // Изв. вузов. Математика. 2020. № 9. С. 39–55.
6. *May R.M.* Stability and Complexity in Model Ecosystems. Princeton, 1974.
7. *Кащенко С.А.* Бифуркации в логистическом уравнении с запаздыванием и малыми возмущениями // Изв. вузов. Математика. 2020. № 10. С. 47–64.
8. *Oster G., Guckenheimer J.* Bifurcation phenomena in population models // The Hopf Bifurcation and Its Applications. Appl. Math. Sci. New York, 1976. V. 19. P. 327–353.
9. *Kashchenko S.A.* Asymptotics of the solutions of the generalized hutchinson equation // Automatic Control and Computer Sciences. 2013. V. 47. P. 470–494.
10. *Кащенко С.А.* Динамика моделей на основе логистического уравнения с запаздыванием. М., 2020.
11. *Edwards R.E.* Functional Analysis. Theory and Applications. New York, 1965.
12. *Кащенко С.А.* Периодические решения нелинейных уравнений, обобщающих логистические уравнения с запаздыванием // Мат. заметки. 2017. Т. 102. С. 216–230.

Региональный научно-образовательный
математический центр
“Центр интегрируемых систем”, г. Ярославль,
Ярославский государственный университет
имени П.Г. Демидова

Поступила в редакцию 21.01.2022 г.
После доработки 17.03.2023 г.
Принята к публикации 22.03.2023 г.