ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 5, с. 569–581

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.929+517.926

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ОДНОГО КЛАССА СИСТЕМ С ЛИНЕЙНЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

 Б. Г. Гребенщиков, А. Б. Ложников

Получены достаточные условия асимптотической устойчивости линейных систем дифференциальных уравнений, содержащих линейное запаздывание. На основании этих условий исследованы некоторые системы линейных дифференциальных уравнений, при этом для одной из них проведена стабилизация на бесконечном промежутке времени.

DOI: 10.31857/S0374064123050011, EDN: CWEAQT

Введение. Будем изучать асимптотические свойства некоторых линейных систем дифференциальных уравнений с постоянным запаздыванием, к которым приводятся заменой аргумента системы с линейным запаздыванием вида

$$dx(t)/dt = A(t)x(t) + B(t)x(\mu t), \quad \mu = \mathrm{const}, \quad 0 < \mu < 1, \quad t \geqslant t_0 > 0. \tag{1}$$

Здесь $A(t)$, $B(t)$ – непрерывно дифференцируемые $m\times m$-матрицы, $x(t)$ – m-мерная вектор-функция времени (аргумента) t, запаздывание имеет вид $(1-\mu)t$. Решение определено в начальный момент времени t_0 вектор-функцией $\phi(\eta)$, $\eta \in [\mu t_0, t_0]$.

Системы с линейным запаздыванием встречаются в задачах механики, физики [1, с. 96] и биологии. Например, при исследовании процесса колебаний токоприёмника движущегося локомотива при взаимодействии с контактным проводом (при учёте воздействия эластичной опоры) в работе [2] задача сводится к исследованию поведения решения линейного неоднородного дифференциального уравнения первого порядка с линейным запаздыванием. Более сложная модель, приводящая к исследованию системы четвёртого порядка, предложена в работе [3]. Задача прохождения токоприёмником эластичной опоры имеет практическое применение в случае изучения устойчивости колебаний движущегося токоприёмника и определения износа контактного провода при различных скоростях движения локомотива, а также в условиях изменяющейся величины силы нажатия полоза токоприёмника на контактный провод. Учёт эффекта последействия важен для правильного качественного и количественного описания данных процессов.

Линейные системы дифференциальных уравнений данного типа, исследуемые в этих работах, как правило, имеют постоянные коэффициенты в правой части. При неустойчивости таких систем возникает проблема их стабилизации на бесконечном промежутке времени. Стабилизации подобных систем посвящены работы [4–6]. Следующим этапом является получение достаточных условий асимптотической устойчивости и построение на этом основании алгоритма стабилизации для некоторых систем с переменными коэффициентами.

Будем рассматривать линейное нормированное пространство $\mathbb{R}^m$, в котором норму вектора $w = \{w_j\}^{\mathrm{т}}$ (здесь w_j, $j=\overline{1,m}$, – компоненты вектора w, а $^{\mathrm{т}}$ – знак транспонирования) определим, например, равенством $\|w\| = \sum_{j=1}^m |w_j|$. (Норму матрицы $D=\{d_{ij}\}$, $i,j=\overline{1,m}$, определим в соответствии с нормой вектора [7, с. 12]: $\|D\| = \max\limits_j \sum_i |d_{ij}|$.) Решение системы (1) с начальной функцией $\phi(\eta)$ обозначим через $x(t,\phi(\eta),t_0)$.

Приведём несколько определений, которые будут необходимы в дальнейшем (см. [1, с. 369; 8, с. 114]).

Определение 1. Решение $x(t)$ системы (1), определённое кусочно-непрерывной начальной вектор-функцией $\phi(\eta)$, называется *устойчивым*, если для любого $\hat{C} > 0$ существуют постоянные $\tilde{C} = \tilde{C}(\hat{C}) > 0$ и $t_0^* = t_0^*(\hat{C}) > 0$ такие, что из условия $\sup\limits_{\eta} \|\phi(\eta)\| < \tilde{C}$ следует неравенство $\sup\limits_{t} \|x(t, \phi(\eta), t_0)\| < \hat{C}$ для всех $t_0 \geqslant t_0^*$.

Определение 2. Если решение $x(t, \phi(\eta))$, наряду с устойчивостью, обладает свойством $\lim\limits_{t\to\infty} x(t, \phi(\eta)) = 0$, то решение *асимптотически устойчиво.*

1. Получение достаточных условий асимптотической устойчивости для некоторых систем вида (1). Рассмотрим линейную систему (1). Сделаем в ней замену $\tau = \ln(t/t_0)$ и получим систему с постоянным запаздыванием σ [1, с. 100]:

$$dz(\tau)/d\tau = t_0 \exp(\tau)[\bar{A}(\tau)z(\tau) + \bar{B}(\tau)z(\tau - \sigma)], \quad \sigma = -\ln(\mu), \quad \sigma > 0, \quad \tau \geqslant 0,$$

$$z(\eta) = \phi(t_0 \exp(\eta)), \quad \eta \in [\mu t_0, t_0], \quad \bar{A}(\tau) = A(t_0 \exp(\tau)), \quad \bar{B}(\tau) = B(t_0 \exp(\tau)). \tag{2}$$

Начальная вектор-функция $\bar{\phi}(\xi)$, $\xi \in [-\sigma, 0]$, определяет решение системы (2) в момент времени $\tau = 0$.

Полагаем, что матрицы $\bar{A}(\tau)$, $\bar{B}(\tau)$ достаточное число раз дифференцируемые и периодические (периода σ). При этом для корней $\lambda_j(\tau)$ характеристического уравнения

$$\det(\bar{A}(\tau) - \lambda E) = 0$$

(здесь и далее E – единичная $m \times m$-матрица) справедливы неравенства

$$\mathrm{Re}\,(\lambda) < -2d, \quad d = \mathrm{const}, \quad d > 0, \tag{3}$$

и, наряду с этим, для корней $\rho_k(\tau)$ характеристического уравнения

$$\det(\bar{A}^{-1}(\tau)\bar{B}(\tau) - \rho E) = 0$$

выполнены неравенства

$$|\rho_k(\tau)| < \gamma, \quad \gamma = \mathrm{const}, \quad 0 < \gamma < 1. \tag{4}$$

Чтобы эффективно использовать аппарат теории разностных систем и методов малого параметра при производной, перейдём от системы (2) к счётной системе обыкновенных дифференциальных уравнений, заданных на конечном промежутке времени $\tau \in [0, \sigma]$, полагая [1, с. 102]

$$z_{n+1}(\tau) = z(\tau + n\sigma), \quad n \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}.$$

Данная счётная система имеет вид

$$\varepsilon_n dz_{n+1}(\tau)/d\tau = \exp(\tau)[\bar{A}(\tau)z_{n+1}(\tau) + \bar{B}(\tau)z_n(\tau)], \quad \varepsilon_n = \mu^n/t_0, \quad n \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}, \tag{5}$$

при граничных условиях

$$z_{n+1}(0) = z_n(\sigma), \quad z_0 = \bar{\phi}(\tau - \sigma). \tag{6}$$

Введём теперь норму вектор-функции $w(\tau)$ на отрезке $[0, \sigma]$, полагая

$$\|w\|_\sigma = \sup_{\tau \in [0,\sigma]} \|w(\tau)\|.$$

Далее зададим оператор сдвига $T_{\tau,n}$ следующим образом:

$$T_{\tau,n}(\bar{y}) = Y_{n+1}^0(\tau, 0, \varepsilon_n)\bar{y}(\sigma) + \int\limits_0^\tau \frac{\exp(s)}{\varepsilon_n} Y_{n+1}^0(\tau, s, \varepsilon_n)\bar{B}(s)\bar{y}(s)\, ds, \tag{7}$$

где $Y_{n+1}^0(\tau, s, \varepsilon_n)$ – матрица Коши системы без запаздывающих членов

$$\varepsilon_n dy_{n+1}^0(\tau)/d\tau = \exp(\tau)\bar{A}(\tau)y_{n+1}^0(\tau), \quad 0 \leqslant \tau \leqslant \sigma.$$

Если определить норму оператора сдвига в соответствии с правилом [9, с. 504]

$$\|T_{\tau,n}\| = \sup \frac{\|T_{\tau,n}(\bar{y}(s))\|}{\|\bar{y}(s)\|},$$

то при такой нормировке пространство вектор-функций становится пространством Банаха [9, с. 510], обозначим его $\mathbb{C}_m$.

Известно [10] (ввиду неравенства (3)), что при достаточно малых ε_n имеет место оценка

$$\|Y^0_{n+1}(\tau, s, \varepsilon_n)\| \leqslant C_0 \exp\left(-\frac{d}{\varepsilon_n}(\exp(\tau) - \exp(s))\right), \quad C_0 = \mathrm{const}, \quad C_0 > 1. \tag{8}$$

Норма оператора $T_{\tau,n}$ равномерно ограничена числом

$$M = C_0(1 + b/d), \quad b = \max_\tau \|\bar{B}(\tau)\|. \tag{9}$$

В банаховом пространстве определено произведение операторов, следовательно, решение системы (5) можно представить в операторном виде

$$z_{n+1}(\tau) = T_{\tau,n} z_n(s).$$

Поскольку оценка (9) является достаточно грубой и не позволяет судить об асимптотическом поведении решения системы (5), для того чтобы установить асимптотические свойства данной системы (используя малый параметр ε_n), докажем сначала две леммы.

Лемма 1 (оценки на рост производных решения системы (5)). *Производные* $z_n^{(j)}(\tau)$, $j = \overline{1, 2k}$, *при выполнении неравенства (3) и достаточной "гладкости" матриц* $\bar{A}(\tau)$, $\bar{B}(\tau)$ *удовлетворяют следующим (весьма грубым) оценкам роста:*

$$\|z_n^{(j)}(\tau)\| \leqslant \bar{C}_j (t_0)^j \hat{q}^n \sup_\tau \|z_0(\tau)\|, \quad j = \overline{1, 2k}, \quad \bar{C}_j = \mathrm{const}, \quad \bar{C}_j > 1, \quad \hat{q} = \mathrm{const}, \quad \hat{q} > 1. \tag{10}$$

Доказательство. Оценку для $\|z_{n+k}(\tau)\|$ (считая начальной вектор-функцией величину $\|z_n(\tau)\|$) получаем из соотношения (9) (здесь $q_0 = M$). Рассмотрим теперь поведение величины $\|z_n'(\tau)\|$. Продифференцировав обе части системы (5), получим равенство

$$\varepsilon_n d^2 z_{n+1}(\tau)/d\tau^2 = \exp(\tau)[\bar{A}(\tau) z'_{n+1}(\tau) + \bar{B}(\tau) z'_n(\tau)] +$$

$$+ \exp(\tau)[\bar{A}(\tau) z_{n+1}(\tau) + \bar{B}(\tau) z_n(\tau)] + \exp(\tau)[\bar{A}'(\tau) z_{n+1}(\tau) + \bar{B}'(\tau) z_n(\tau)]$$

или, с учётом (5),

$$\varepsilon_n d^2 z_{n+1}(\tau)/d\tau^2 = \exp(\tau)[(\bar{A}(\tau) + O(\varepsilon_n)) z'_{n+1}(\tau) + \bar{B}(\tau) z'_n(\tau) +$$

$$+ (\bar{B}'(\tau) - \bar{A}'(\tau)\bar{A}^{-1}(\tau)\bar{B}(\tau)) z_n(\tau)], \tag{11}$$

при этом ряд $\sum_n \|O(\varepsilon_n)\|$ сходится. Запишем решение неоднородной системы (11) в интегральной форме [1, с. 328], считая неоднородностями члены, содержащие величины $O(\varepsilon_n) z'_{n+1}(\tau)$, $\bar{B}(\tau) z'_n(\tau)$, $(\bar{B}'(\tau) - \bar{A}'(\tau)\bar{A}^{-1}(\tau)\bar{B}(\tau)) z_n(\tau)$. Учитывая (7), имеем соотношение

$$z'_{n+1}(\tau) = T_{n,\tau} z'_n(\tau) + \int\limits_0^\tau \frac{\exp(s)}{\varepsilon_n} Y_0^{n+1}(\tau, s, \varepsilon_n) O(\varepsilon_n) z'_{n+1}(s)\, ds +$$

$$+ \int\limits_0^\tau \frac{\exp(s)}{\varepsilon_n} Y_0^{n+1}(\tau, s, \varepsilon_n)(\bar{B}'(s) - \bar{A}'(s)\bar{A}^{-1}(s)\bar{B}(s)) z_n(s)\, ds. \tag{12}$$

Рассмотрим интегралы в правой части (12). Очевидно, что первый интеграл допускает представление $O(\varepsilon_n)\|z'_{n+1}(\tau)\|_\sigma$. Второй же интеграл в силу оценок (9) и (10) не превосходит величины $\alpha\|z_n(\tau)\|_\sigma$, где $\alpha = C_0 d^{-1}\|\bar{B}'(\tau) - \bar{A}'(\tau)\bar{A}^{-1}(\tau)\bar{B}(\tau)\|_\sigma$. С учётом этих оценок из (12) получаем

$$\|z'_{n+1}(\tau)\|_\sigma - O(\varepsilon_n)\|z'_{n+1}(\tau)\|_\sigma \leqslant M\|z'_n(\tau)\|_\sigma + \alpha\|z_n(\tau)\|_\sigma. \tag{13}$$

Очевидно, что в данном выражении величины $O(\varepsilon_n)\|z'_{n+1}(\tau)\|_\sigma$ можно рассматривать как "возмущения" по отношению к соответствующей однородной системе первого приближения. Тогда (ввиду сходимости соответствующего ряда) фундаментальная матрица однородной системы $Z'_{n+k,n}$ допускает оценку [11, с. 71]

$$\|Z'_{n+k,n}\| = \left\|\prod_{j=n}^{n+k}(M + O(\varepsilon_j))\right\| \leqslant \bar{L}_1 M^k, \quad \hat{L}_1 = \mathrm{const}, \quad \hat{L}_1 > 1. \tag{14}$$

Из (13), (14), используя формулу вариации постоянных [11, с. 23] (учитывая оценку роста для $\|z_n(\tau)\|_\sigma$), имеем неравенство

$$\|z'_{n+k}(\tau)\|_\sigma \leqslant \bar{L}_1 M^k\|z'_n(\tau)\|_\sigma + \alpha\bar{L}_1 M^k\|z_n(\tau)\|_\sigma, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{15}$$

Чтобы оценить рост величин $\|z'_n(\tau)\|_\sigma$, $\|z_n(\tau)\|_\sigma$ (поскольку система (5) является системой с ограниченной правой частью), применим формулу Гронуола–Беллмана [1, с. 73] и получим оценку

$$\|z(\tau)\| \leqslant \bar{\beta}\sup_\xi\|\bar{\phi}(\xi)\|\exp(\bar{\beta}\tau), \quad \bar{\beta} = t_0\exp(n\sigma(a+b)), \quad a = \max_\tau\|\bar{A}(\tau)\|. \tag{16}$$

Оценка (16) будет эффективной при не очень больших величинах t_0 (т.е. при $t_0 \leqslant \bar{T}$). Далее, как следует из работы [10], при больших $t_0 > \bar{T}$ справедливо соотношение (9), следовательно, в этом случае при всех $0 \leqslant \tau \leqslant n\sigma$ имеет место экспоненциальная оценка

$$\|z(\tau)\| \leqslant M\exp(\bar{\beta}_1\tau)\sup_s\|\phi(s)\|, \quad \bar{\beta}_1 = \frac{\ln(M)}{\sigma}. \tag{17}$$

И в том, и в другом случае получаем итоговую оценку (10) на рост решения $\|z_k(\tau)\|$ при $1 \leqslant k \leqslant n$. Без ограничения общности считаем величину $t_0 > 1$. Далее рассмотрим поведение величины $\|z'_k(\tau)\|$ при $1 \leqslant k \leqslant n$. Из уравнения (5) имеем

$$\|z'_k(\tau)\|_\sigma \leqslant \frac{t_0}{\mu^{k+1}}(a\|z_k(\tau)\|_\sigma + b\|z_{k-1}(\tau)\|_\sigma), \quad a = \max_\tau\|\bar{A}(\tau)\|.$$

Используя последнее неравенство, получаем из (17) итоговую оценку для величины $\|z'_k(\tau)\|_\sigma$ $(k > 1)$. Оценки для величин $\|z_n^{(j)}(\tau)\|_\sigma$ получаются аналогично. Лемма доказана.

Лемма 2 (представление решения через его производные). *Величины $\|z_n^{(j)}(\tau)\|$ для достаточно малых ε_n удовлетворяют разностным системам*

$$\begin{gathered}
z_{n+1}^{(j)}(\tau) = (-\bar{A}^{-1}(\tau)\bar{B}(\tau) + O(\varepsilon_n))z_n^{(j)}(\tau) + Y_{n+1}^j(\tau, 0, \varepsilon_n)z_n^{(j)}(\sigma) + \Pi_{j,n}^j(\tau,\varepsilon_n)z_n^{(j)}(0) + \\
+ F_{j,n}^0(\tau)z_n(\tau) + \Pi_{j,n}^0(\tau,\varepsilon_n)z_n(0) + F_{j,n}^1(\tau)z'_n(\tau) + \Pi_{j,n}^1(\tau,\varepsilon_n)z'_n(0) + \ldots \\
\ldots + F_{j,n}^{j-1}(\tau)z_n^{(j-1)}(\tau) + \Pi_{j,n}^{j-1}(\tau,\varepsilon_n)z_n^{(j-1)}(0) + O(\varepsilon_n)z_n^{(j+1)}(\tau) + O(\varepsilon_n)\Pi_{j,n}^{j+1}(\tau,\varepsilon_n)z_n^{(j+1)}(0) + \\
+ \varepsilon_n O(\varepsilon_n)z_n^{(j+2)}(\tau) + \varepsilon_n O(\varepsilon_n)\Pi_{j,n}^{j+2}(\tau,\varepsilon_n)z_n^{(j+2)}(0) + \ldots \\
\ldots + (\varepsilon_n)^{k-2}O(\varepsilon_n)z_n^{(j+k-1)}(\tau) + (\varepsilon_n)^{k-2}O(\varepsilon_n)\Pi_{j,n}^{j+k-1}(\tau,\varepsilon_n)z_n^{(j+k-1)}(0) + \\
+ (t_0)^j O((\mu^k\hat{q})^n)\|z_0(\tau)\|_\sigma, \quad j = \overline{0,k}.
\end{gathered} \tag{18}$$

Здесь $F_l^j(\tau,n)$ – *равномерно ограниченные* $m\times m$-*матрицы,* $\mu^k\hat q\leqslant p$, $p=\mathrm{const}$, $0<p<1$, $l=\overline{0,j-1}$; *матрицы* $Y^j_{n+1}(\tau,0,\varepsilon_n)$, $\Pi^r_{j,n}(\tau,\varepsilon_n)$, $r=\overline{0,j+k-1}$, *допускают оценку, аналогичную (8).*

Отметим, что натуральное число k (которое мы выбираем из приведённого условия) означает существование и непрерывность производных до $2k$-го порядка включительно.

Докажем вначале асимптотическое представление для функций $z_n(\tau)$. Как следует из (7), решение исследуемой системы представимо в интегральной форме

$$z_{n+1}(\tau)=Y^0_{n+1}(\tau,0,\varepsilon_n)z_n(\sigma)+\int\limits_0^\tau Y^0_{n+1}(\tau,s,\varepsilon_n)\bar B(s)z_n(s)\,ds. \tag{19}$$

Интегрируя по частям интеграл в правой части данного равенства, получаем

$$I_n=-\bar A^{-1}(\tau)\bar B(\tau)z_n(\tau)+\bar A^{-1}(0)Y^0_{n+1}(\tau,0,\varepsilon_n)\bar B(0)z_n(0)+\int\limits_0^\tau(\bar A^{-1}(s))'Y^0_{n+1}(\tau,s,\varepsilon_n)\bar B(s)z_n(s)\,ds+$$
$$+\int\limits_0^\tau \bar A^{-1}(s)Y^0_{n+1}(\tau,s,\varepsilon_n)\bar B'(s)z_n(s)\,ds+\int\limits_0^\tau \bar A^{-1}(s)Y^0_{n+1}(\tau,s,\varepsilon_n)\bar B(s)z_n'(s)\,ds. \tag{20}$$

Рассмотрим последний интеграл I_n' в правой части равенства (20), содержащий величину $z_n'(s)$. Интегрируя его по частям аналогично интегралу I_n, получаем соотношение

$$I_n'=O(\varepsilon_n)z_n'(\tau)+Y^0_{n+1}(\tau,0,\varepsilon_n)O(\varepsilon_n)z_n'(0)+$$
$$+\int\limits_0^\tau O(\varepsilon_n)Y^0_{n+1}(\tau,s,\varepsilon_n)z_n'(s)\,ds+\int\limits_0^\tau O(\varepsilon_n)Y^0_{n+1}(\tau,s,\varepsilon_n)z_n^{(2)}(s)\,ds. \tag{21}$$

Отметим следующее: интегралы в правой части (21) имеют асимптотическое представление, соответственно, $\varepsilon_nO(\varepsilon_n)\|z_n'(\tau)\|_\sigma$ и $\varepsilon_nO(\varepsilon_n)\|z_n^{(2)}(\tau)\|_\sigma$, при этом для оставшихся интегралов в правой части равенства (19) интегрированием по частям можно получить соотношения, подобные (20). Продолжив подобную процедуру, получим в итоге интеграл вида

$$I_n^k=(\varepsilon_n)^{k-1}\int\limits_0^\tau O(\varepsilon_n)Y^0_{n+1}(\tau,s,\varepsilon_n)z_n^{(k)}(s)\,ds.$$

Учитывая теперь оценку (10) для $\|z_n^{(k)}(\tau)\|$, ввиду того, что для достаточно большого k величина $\mu^k\hat q\leqslant p<1$, для I_n^k имеем асимптотическое представление

$$I_n^k=O(p^n)\|z_n(\tau)\|_\sigma, \tag{22}$$

т.е. данный интеграл – “исчезающая” вектор-функция. При этом отметим, что в процессе исследования асимптотических свойств данного интеграла получаем в правой части (19) выражения вида

$$O(\varepsilon_n)z_n'(\tau),\quad O(\varepsilon_n)\Pi^0_{1,n}(\tau,\varepsilon_n)z_n'(0),\quad \varepsilon_nO(\varepsilon_n)z_n^{(2)}(\tau),\quad \varepsilon_nO(\varepsilon_n)\Pi^0_{2,n}(\tau,\varepsilon_n)z_n^{(2)}(0),\quad\ldots$$
$$\ldots,\quad(\varepsilon_n)^{k-2}O(\varepsilon_n)z_n^{(k-1)}(\tau),\quad(\varepsilon_n)^{k-2}O(\varepsilon_n)\Pi^0_{k-1,n}(\tau,\varepsilon_n)z_n^{(k-1)}(0). \tag{23}$$

Асимптотическое представление для величины $z_n(\tau)$ доказано.

Для того чтобы исследовать асимптотические свойства величины $z_n'(\tau)$, рассмотрим неоднородное дифференциально-разностное уравнение (11). Как следует из работ [9, 11], фундаментальная матрица $Y_{n+1}^1(\tau, s, \varepsilon_n)$ соответствующей однородной системы для достаточно больших n допускает оценку

$$\|Y_{n+1}^1(\tau, s, \varepsilon_n)\| \leqslant C_0 \exp\left(\frac{\beta_n}{\varepsilon_n}(\exp(\tau) - \exp(s))\right), \qquad \beta_n = -d + C_0 m\varepsilon_n, \quad \beta_n < 0. \tag{24}$$

Соответствующая вырожденной системе матрица $(\bar{A}(\tau) + O(\varepsilon_n))^{-1}\bar{B}(\tau) = (\bar{A}^{-1}(\tau) + O(\varepsilon_n) + O(\varepsilon_n)^2)\bar{B}(\tau)$. Следовательно, при достаточно больших n асимптотические свойства соответствующей вырожденной "возмущённой" системы аналогичны свойствам вырожденной ("невозмущённой") системы. Ввиду оценки (24) решение соответствующей разностной системы представляет собой выражение, аналогичное доказанному выше для величины $z_n(\tau)$ (получающаяся в результате исчезающая вектор-функция, аналогичная I_n^k, будет иметь оценку, подобную (22), содержащую множителем величину t_0 ввиду соотношения (10)); при этом в правой части добавляются члены, найденные в результате интегрирования по частям величины

$$\int_0^\tau \frac{\exp(s)}{\varepsilon_n} Y_1^{n+1}(\tau, s, \varepsilon_n)(\bar{B}'(s) - \bar{A}'(s)\bar{A}^{-1}(s)\bar{B}(s))z_n(s)\, ds.$$

Они имеют вид $F_{1,n}^1(\tau, n)z_n(\tau)$, $\Pi_{1,n}^1(\tau, \varepsilon_n)z_n(0)$, остальные члены подобны выражениям вида (23). В итоге для величины $z_n'(\tau)$ также можем записать разностное уравнение вида (18). Далее подобными методами получим соответствующее разностное уравнение для величины $z_n^{(2)}(\tau)$ и т.д. Лемма доказана.

Теперь, применяя леммы 1 и 2, докажем теорему о достаточных условиях асимптотической устойчивости решения исходной системы (2).

Теорема 1. *При выполнении условий (3), (4) система (2) экспоненциально устойчива, при этом для решения исходной системы (1) справедлива оценка*

$$\|x(t)\| \leqslant M_0 \left(\frac{t}{t_0}\right)^{-\beta} \sup \|\phi(\eta)\|, \quad M_0 = \mathrm{const}, \quad M_0 > 1, \quad \beta = \mathrm{const}, \quad \beta > 0.$$

Здесь константы M_0, β *одни и те же при всех* $t_0 \geqslant t_0^* > 0$, *величина* t_0^* *фиксированная.*

Доказательство. Учитывая лемму 2, рассмотрим вначале асимптотическое поведение вырожденной системы

$$\bar{y}_{n+1}(\tau) = -\bar{A}^{-1}(\tau)\bar{B}(\tau)\bar{y}_n(\tau). \tag{25}$$

Покажем, что существуют такие постоянные $\bar{L}_0 > 1$, $0 < \bar{q} < 1$, что для решения разностной системы (25) будет справедлива оценка [7, с. 40]

$$\sup_\tau \|\bar{y}_n(\tau)\| \leqslant \bar{L}_0(\bar{q})^n \sup_\tau \|y_0(\tau)\|, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ввиду равномерной непрерывности (по τ) матриц $\bar{A}^{-1}(\tau)\bar{B}(\tau)$ можно разбить интервал $[0, \sigma]$ на конечное число l равных промежутков длины меньше δ_1 таких, что будет выполняться неравенство

$$\|\bar{A}^{-1}(\tau)\bar{B}(\tau) - \bar{A}^{-1}(\tau_j)\bar{B}(\tau_j)\| < \varepsilon, \quad |\tau - \tau_j| < \delta_1, \quad j = \overline{1, l}, \quad 0 < \tau_1 < \ldots < \tau_l = \sigma. \tag{26}$$

Но тогда (вследствие (26)) при достаточно малом ε для каждого промежутка $[\tau_j, \tau_{j+1}]$ найдутся такие постоянные $L_j > 1$, что будет справедлива оценка соответствующей результирующей системы, получаемая из (25):

$$\|\bar{Y}_{n,1}^0(\tau)\| = \left\| \prod_{i=1}^n \bar{A}^{-1}(\tau + j\sigma)\bar{B}(\tau + j\sigma) \right\| < L_j \bar{\gamma}^n, \quad \bar{\gamma} = \mathrm{const}, \quad 0 < \gamma < \bar{\gamma} < 1, \quad j = \overline{1, l}. \tag{27}$$

Отсюда следует, что для любых $\tau \in [0,\sigma]$ подобное неравенство справедливо при константах $\bar{L}_0 = \max\limits_j L_j$ и $\bar{q} = \bar{\gamma}$, т.е. вырожденная система (25) экспоненциально устойчива.

Пусть в (18) $j = k-1$ и n достаточно велико. Рассмотрим вначале поведение системы (18) в точке $\tau = \sigma$. Очевидно, что при данном τ, ввиду оценок (8), (14) и аналогичных им, члены в (22), содержащие $(t_0)^i \Pi_{k,n}^{k+i-1}(\sigma,\varepsilon_n)$, будут иметь вид $(t_0)^j o(\varepsilon_n)$. Тогда, записав $z_{n+i}^{(k-1)}(\sigma)$ в равенстве (18) с помощью формулы вариации постоянных, получим выражение

$$z_{n+i}^{(k-1)}(\sigma) = \bar{Y}_{n+i,n}^{k-1}(\sigma) y_n^{(k-1)}(\sigma) + \sum_{j=1}^{i} \bar{Y}_{n+i,n+j}^{k-1}(\sigma)[F_{k-2,n+j-1}^{k-1}(\sigma) z_{n+j-1}^{(k-2)}(\sigma) +$$

$$+ F_{k-3,n+j-1}^{k-1}(\sigma) z_{n+j-1}^{(k-3)}(\sigma) + \ldots + F_{0,n+j-1}^{k-1}(\sigma) z_{n+j-1}(\sigma) + O(\varepsilon_{n+j}) z_{n+j-1}^{(k)}(\sigma) +$$

$$+ O(\varepsilon_{n+j})\varepsilon_{n+j} z_{n+j-1}^{(k+1)}(\sigma) + \ldots + O(\varepsilon_{n+j})(\varepsilon_{n+j})^{k-2} z_{n+j-1}^{(2k-2)}(\sigma)] + (t_0)^{k-1} O(p^{n+j}) \|z_0(\tau)\|_\sigma, \quad (28)$$

при этом ряд $\sum_{j=0}^{\infty} \|O(\varepsilon_j)\|$ сходится. Ввиду сходимости ряда для величины $\|\bar{Y}_{n+i,n}^{k-1}(\tau)\|$ справедлива оценка, аналогичная (14).

Если теперь записать подобное равенство уже для величины $z_{n+i}^{(k-2)}(\sigma)$, учитывая (27), то получим следующее соотношение:

$$z_{n+i}^{(k-2)}(\sigma) = \bar{Y}_{n+i,n}^{k-2}(\sigma) z_n^{(k-2)}(\sigma) + \sum_{j=1}^{i} \bar{Y}_{n+i,n+j}^{k-2}(\sigma) \Bigg\{ F_{k-3,n+j-1}^{k-2}(\sigma) z_{n+j-1}^{(k-3)}(\sigma) +$$

$$+ F_{k-4,n+j-1}^{k-2}(\sigma) z_{n+j-1}^{(k-4)}(\sigma) + \ldots + F_{0,n+j-1}^{k-2}(\sigma) z_{n+j-1}(\sigma) + O(\varepsilon_{n+j}) \Bigg[\bar{Y}_{n+i,n}^{k-1}(\sigma) z_n^{(k-1)}(\sigma) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{i} \bar{Y}_{n+i,n+j}^{k-1}(\sigma)[F_{k-2,n+j-1}^{k-1}(\sigma) z_{n+j-1}^{(k-2)}(\sigma) + F_{k-3,n+j-1}^{k-1}(\sigma) z_{n+j-1}^{(k-3)}(\sigma) + \ldots$$

$$\ldots + F_{0,n+j-1}^{k-1}(\sigma) z_{n+j-1}(\sigma) + O(\varepsilon_{n+j}) z_{n+j-1}^{(k)}(\sigma) + O(\varepsilon_{n+j})\varepsilon_{n+j} z_{n+j-1}^{(k+1)}(\sigma) + \ldots$$

$$\ldots + O(\varepsilon_{n+j})(\varepsilon_{n+j})^{k-2} z_{n+j-1}^{(2k-2)}(\sigma) + (t_0)^{k-1} O(p^{n+j}) \|z_0(\tau)\|_\sigma] \Bigg] +$$

$$+ O(\varepsilon_{n+j})\varepsilon_{n+j} z_{n+j-1}^{(k)}(\sigma) + O(\varepsilon_{n+j})(\varepsilon_{n+j})^2 z_{n+j-1}^{(k+1)}(\sigma) + \ldots$$

$$\ldots + O(\varepsilon_{n+j})(\varepsilon_{n+j})^{k-2} z_{n+j-1}^{(2k-3)}(\sigma) + (t_0)^{(k-2)} O(p^{n+j}) \|z_0(\tau)\|_\sigma \Bigg\}, \quad (29)$$

где есть члены, содержащие $z_{n+j}^{(2k-2)}(\sigma)$. Нетрудно видеть, что они имеют порядок $(t_0)^{(k-1)} \times \times O(p^{n+j}) \|z_0(\tau)\|_\sigma$. С другой стороны, члены, содержащие $z_{n+j}^{(k-1)}(\sigma)$, отсутствуют, так как вместо них входят выражения, содержащие величины $z_n^{(r)}(\sigma)$, $r = k-1, k-2$. Далее, в соотношении (28) имеются члены, содержащие множители $z_{n+j}^{(k-2)}(\sigma)$. Коэффициенты при них имеют порядок $O(\varepsilon_{n+j})$. Члены же, содержащие величины $z_n^{(r)}(\sigma)$, $r = k-1, k-2, \ldots$, стремятся к нулю как экспоненты. Учитывая теперь асимптотическую устойчивость соответствующей однородной разностной системы и вид её неоднородности, обусловленной “возмущениями” (ввиду наличия величин $z_{n+j}(\sigma)$, $z'_{n+j}(\sigma)$, $\ldots$, $z_{n+j}^{(k-3)}(\sigma)$), а также переменные $z_{n+j}^{(k)}(\sigma)$, $z_{n+j}^{(k+1)}(\sigma), \ldots$, $z_{n+j}^{(2k-3)}(\sigma)$, получаем, что величина $z_{n+i}^{(k-2)}(\sigma)$ (общее решение неоднородной системы) состоит из экспоненциально устойчивого решения (имеющего оценку $O(\bar{\gamma}^{n+i}(\|z^{(k-1)}(\sigma)\| + \|z^{(k-2)}(\sigma)\|))$, и решения, обусловленного “возмущениями”, и решения, обусловленного “исчезающей” вектор-функцией $(t_0)^{(k-1)}O(p^{n+j})\|z_0(\tau)\|_\sigma$. Покажем, что решение, обусловленное “исчезающей” вектор-функцией, также экспоненциально устойчиво.

Без ограничения общности полагаем, что $\bar{q} < p$, т.е. справедливо равенство $\bar{q} = \delta p$, $\quad \delta = \mathrm{const}$, $\quad 0 < \delta < 1$. Тогда из соотношения (29), учитывая последнее равенство, получаем оценку

$$\Bigl\| \sum_{j=1}^{i} \bar{Y}^{k-2}_{n+i,n+j}(\sigma)(t_0)^{(k-1)}O(p^{n+j})\Bigr\| \|z_0(\tau)\|_\sigma \leqslant \bar{L}(t_0)^{(k-1)}p^n \sum_{j=1}^{i} \hat{\delta}^{i-1}p^{i-j}p^j\|z_0(\tau)\|_\sigma <$$

$$< \frac{\bar{L}p^{n+j}}{1-\delta}\|z_0(\tau)\|_\sigma, \quad \bar{L} = \mathrm{const}, \quad \bar{L} > 1, \tag{30}$$

откуда и следует экспоненциальная оценка для составляющей, обусловленной “исчезающей” вектор-функцией.

Далее исследуя свойства вектор-функции $z^{(k-3)}_{n+i}(\sigma)$ методами, аналогичными применённым при исследовании величины $z^{(k-2)}_{n+i}(\sigma)$, получим, что её “возмущения” зависят лишь от величин $z_{n+j}(\sigma)$, $z'_{n+j}(\sigma)$, $\ldots$, $z^{(k-2)}_{n+j}(\sigma)$; $z^{(k)}_{n+j}(\sigma)$, $z^{(k+1)}_{n+j}(\sigma)$, $\ldots$, $z^{(2k-4)}_{n+j}(\sigma)$.

Продолжив процесс изучения поведения величин $z^{(r)}(\sigma)$, $r = \overline{1, k-4}$, получим в результате неоднородную разностную систему

$$z_{n+i}(\sigma) = [-\bar{A}^{-1}(\sigma)\bar{B}(\sigma) + O(\varepsilon_n)]z_n(\sigma) + O(p^n)\|z_0(\tau)\|_\sigma, \tag{31}$$

обладающую следующим свойством: соответствующая однородная “возмущённая” система экспоненциально устойчива, при этом неоднородность является “исчезающей” вектор-функцией, для которой справедлива оценка, подобная $O(p^{n+j})\|y_0(\tau)\|_\sigma$.

Решение системы (31) стремится к нулю при $n \to \infty$ как экспонента (это доказывается точно так же, как и при получении оценки (30)).

Рассмотрим теперь поведение решения разностной системы (18) на всём интервале $[0, \sigma]$: $j = 0$. Ввиду условий (6) её решение экспоненциально устойчиво и при $\tau = 0$. Следовательно, члены, содержащие $z_n(0)$, являются “исчезающей” вектор-функцией. Но тогда исследование асимптотических свойств при любых $\tau \in (0, \sigma)$ ничем не отличается от приведённого выше, и решение системы (5) экспоненциально устойчиво. Теорема доказана.

2. Получение достаточных условий экспоненциальной устойчивости системы, содержащей постоянное запаздывание. Рассмотрим теперь систему вида

$$dx(\tau)/d\tau = A_1(\tau)x(\tau) + B_1(\tau)x(\tau-\sigma) + A_2(\tau)y(\tau) + B_2(\tau)y(\tau-\sigma),$$

$$dy(\tau)/d\tau = t_0\exp(\tau)(A_3(\tau)x(\tau) + B_3(\tau)x(\tau-\sigma) + A_4(\tau)y(\tau) + B_4(\tau)y(\tau-\sigma)), \quad \tau \geqslant 0. \tag{32}$$

Полагаем, что $m \times m$-матрицы $A_j(\tau)$, $B_j(\tau)$, $j = \overline{1, 4}$, периодические (периода σ) и достаточное число раз дифференцируемые.

Вновь перейдём к счётной дифференциально-разностной системе на конечном промежутке времени $[0, \sigma]$. Имеем соотношения

$$dx_{n+1}(\tau)/d\tau = A_1(\tau)x_{n+1}(\tau) + B_1(\tau)x_n(\tau) + A_2(\tau)y_{n+1}(\tau) + B_2(\tau)y_n(\tau),$$

$$\varepsilon_n dy_{n+1}(\tau)/d\tau = \exp(\tau)(A_3(\tau)x_{n+1}(\tau) + B_3(\tau)x_n(\tau) + A_4(\tau)y_{n+1}(\tau) + B_4(\tau)y_n(\tau)),$$

$$\varepsilon_n = \mu^n/t_0, \quad \tau \in [0, \sigma], \tag{33}$$

при краевых условиях

$$x_{n+1}(0) = x_n(\sigma), \quad y_{n+1}(0) = y_n(\sigma).$$

Начальная вектор-функция есть выражение $\{x_0(\tau), y_0(\tau)\}^{\mathrm{т}}$.

В работе [12] показано, что системой первого приближения для (33) является дифференциально-разностная система

$$dx^0_{n+1}(\tau)/d\tau = 0.5[(A^0_1 + B^0_1)x^0_{n+1}(\tau) + A^0_2 y^0_{n+1}(\tau) + B^0_2 y^0_n(\tau)],$$

$$\varepsilon_n dy^0_{n+1}(\tau)/d\tau = \exp(\tau)[(A_3(\tau) + B_3(\tau))x^0_{n+1}(\tau) + A_4(\tau)y^0_{n+1}(\tau) + B_4(\tau)y^0_n(\tau)],$$

$$A^0_j = \frac{2}{\sigma}\int\limits_0^{2\sigma} A_j(\xi)\,d\xi, \quad B^0_j = \frac{2}{\sigma}\int\limits_0^{2\sigma} B_j(\xi)\,d\xi, \quad j = 1,2, \quad \varepsilon_n = \frac{\mu^n}{t_0}, \quad \tau \in [0,\sigma]. \tag{34}$$

Рассмотрим асимптотическое поведение системы (34) при достаточно больших n. Сделаем в ней замену $\tau = \theta_n\varepsilon_n$ [13, с. 204] и получим систему

$$dx^0_{n+1}(\theta_n)/d\theta_n = 0.5\varepsilon_n[(A^0_1 + B^0_1)x^0_{n+1}(\theta_n) + A^0_2 y^0_{n+1}(\theta_n) + B^0_2 y^0_n(\theta_n)],$$

$$dy^0_{n+1}(\theta_n)/d\theta_n = \exp(\theta_n\varepsilon_n)[A^{\varepsilon_n}_3(\theta_n) + B^{\varepsilon_n}_3(\theta_n)x^0_{n+1}(\theta_n) + A^{\varepsilon_n}_4(\theta_n)y^0_{n+1}(\theta_n) + B^{\varepsilon_n}_4(\theta_n)y^0_n(\theta_n)],$$

$$A^{\varepsilon_n}_j(\theta_n) = A_j(\theta_n\varepsilon_n), \quad B^{\varepsilon_n}_j(\theta_n) = B_j(\theta_n\varepsilon_n), \quad j = 3,4. \tag{35}$$

Из того, что в первой подсистеме (35) правая часть имеет множитель ε_n, следует (из первой подсистемы в (34)), что величина $x_{n+1}(\tau)$ удовлетворяет асимптотическому равенству

$$x_{n+1}(\tau) = -2(A^0_1 + B^0_1)^{-1}(A^0_2 y^0_{n+1}(\tau) + B^0_2 y^0_n(\tau)) +$$
$$+ O(\|x_{n+1}(\tau)\|_\sigma + \|y_{n+1}(\tau)\|_\sigma + \|y_n(\tau)\|_\sigma). \tag{36}$$

Рассматривая теперь систему первого приближения, полагаем, что собственные значения λ^0_i матрицы $A^0_1 + B^0_1$ удовлетворяют неравенству

$$\mathrm{Re}\,(\lambda^0_i) < -2\beta_1, \quad \beta_1 = \mathrm{const}, \quad \beta_1 > 0. \tag{37}$$

Наряду с этим считаем, что для собственных чисел $\bar\lambda(\tau)$ матрицы $A_4(\tau)$ справедливо неравенство, аналогичное (3), т.е.

$$\mathrm{Re}\,(\bar\lambda(\tau)) < -2\beta_2, \quad \beta_2 = \mathrm{const}, \quad \beta_2 > 0. \tag{38}$$

В силу соотношения (36) имеем приближённое равенство

$$x_{n+1}(\tau) \approx -2(A^0_1 + B^0_1)^{-1}(A^0_2 y^0_{n+1}(\tau) + B^0_2 y^0_n(\tau)).$$

Подставив данное выражение во вторую подсистему в (35), получим систему m-го порядка

$$\varepsilon_n dy^0_{n+1}(\tau)/d\tau = \exp(\tau)\{[A_4(\tau) - 2(A_3(\tau) + B_3(\tau))(A^0_1 + B^0_1)^{-1}A^0_2]y^0_{n+1}(\tau) +$$
$$+ [B_4(\tau) - 2(A_3(\tau) + B_3(\tau))(A^0_1 + B^0_1)^{-1}B^0_2]y^0_n(\tau)\}. \tag{39}$$

Полагаем, что собственные числа ν матрицы

$$H_1 = A_4(\tau) - 2(A_3(\tau) + B_3(\tau))(A^0_1 + B^0_1)^{-1}A^0_2$$

удовлетворяют неравенству

$$\mathrm{Re}\,(\nu) < -2d_1, \tag{40}$$

и, наряду с этим, собственные числа ρ_h матрицы

$$H_2 = (H_1)^{-1}[B_4(\tau) - 2(A_3(\tau) + B_3(\tau))(A^0_1 + B^0_1)^{-1}B^0_2]$$

удовлетворяют условию

$$|\rho_h| < \gamma_h, \quad \gamma_h = \mathrm{const}, \quad 0 < \gamma_h < 1. \tag{41}$$

Теорема 2. *Пусть справедливы неравенства (37), (38), (40), (41). Тогда дифференциально-разностная система (33) (а следовательно, и исходная система (32)) экспоненциально устойчива.*

Доказательство. Очевидно (в силу теоремы 1), что система (39) экспоненциально устойчива, т.е. справедлива оценка

$$\|y^0(\tau)\| \leqslant \hat{K}\exp(-\bar{\delta}(\tau - T)) \sup_{0\leqslant\eta\leqslant T} \|y(\eta)\|, \quad \hat{K} = \mathrm{const}, \quad \bar{\delta} = \mathrm{const}, \quad \bar{\delta} > 0.$$

Рассмотрим теперь поведение первой подсистемы в (34) на бесконечном промежутке времени при достаточно больших τ. Она имеет вид

$$dx^0(\tau)/dt = 0.5[(A_1^0 + B_1^0)x_\tau^0 + A_2^0 y^0(\tau) + B_2^0 y^0(\tau - \sigma)], \quad \tau \geqslant \bar{\tau},$$

$\bar{\tau}$ – достаточно большое положительное число. Записывая решение данной системы в интегральной форме

$$x^0(\tau) = \exp\left(\frac{(A_1^0 + B_1^0)(\tau - \bar{\tau})}{2}\right) x^0(\bar{\tau}) +$$

$$+ \int\limits_{\bar{\tau}}^{\tau} \exp\left(\frac{(A_1^0 + B_1^0)(\tau - s)}{2}\right)[A_2^0 y^0(s) + B_2^0 y^0(s - \sigma)]\, ds, \tag{42}$$

учитывая, что ввиду неравенства (37) справедлива оценка

$$\|\exp(0.5(A_1^0 + B_1^0)(\tau - s))\| \leqslant \bar{M}_1 \exp(-\beta_1(\tau - s)), \quad \bar{M}_1 = \mathrm{const}, \quad \bar{M}_1 > 1,$$

получаем, что первый член в правой части в (42) стремится к нулю при $\tau \to \infty$.

Рассмотрим теперь поведение интегрального члена. Без ограничения общности считаем, что $\bar{\delta} < \beta_1$. Тогда имеем оценку

$$\left\| \int\limits_{\bar{\tau}}^{\tau} \exp(0.5(A_1^0 + B_1^0)(\tau - s))[A_2^0 y^0(s) + B_2^0 y^0(s - \sigma)]\, ds \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\bar{M}_1 \hat{K}(\|A_2^0\| + \exp(\bar{\delta}\sigma)\|B_2^0\|)}{\beta_1 - \bar{\delta}} \exp(-\beta_1(\tau - \bar{\tau})) \sup_{0\leqslant\eta\leqslant T} \|y^0(\eta)\|,$$

откуда следует экспоненциальная устойчивость величины $x^0(\tau)$, а значит, система первого приближения экспоненциально устойчива.

Рассмотрим теперь исходную (“возмущённую”) систему при достаточно большом n. Если в первой из подсистем ввести “медленную” переменную θ_n, то при достаточно малом ε_n, как следует из [13, с. 67], матрица Коши $K_{\varepsilon_n}(\theta_n, s)$ однородной системы имеет вид

$$K_{\varepsilon_n}(\theta_n, s) \approx \exp\{0.5\varepsilon_n(A_1^0 + B_1^0)(\theta_n - s)\}.$$

Данное соотношение тем точнее, чем меньше ε_n. Более того, если рассматривать неоднородную усреднённую систему

$$d\bar{x}_n^0(\theta_n)/d\theta_n = \varepsilon_n[0.5\varepsilon_n(A_1^0 + B_1^0)\bar{x}_n^0(\theta_n) + A_2^0 \bar{y}_{n+1}(\theta_n + B_2^0 \bar{y}_n(\theta_n))],$$

то она является первым приближением для исходной первой подсистемы.

Если теперь рассмотреть вторую из подсистем в (33), то ввиду соотношения (36) и оценки, аналогичной (26), имеем, что вторая из подсистем в (34) является первым приближением для исходной подсистемы. Как следует из [9, с. 258] (учитывая экспоненциальную устойчивость системы (34)), “возмущённая” система (33) экспоненциально устойчива. Теорема доказана.

3. Примеры. Мы исследовали асимптотические свойства некоторых систем, решение которых экспоненциально устойчиво. Приведём конкретные примеры, которые иллюстрируют достаточную точность методов исследования устойчивости, предложенных нами. Вначале рассмотрим пример экспоненциально устойчивой системы второго порядка:

$$dx_1(\tau)/d\tau = \exp(\tau)\{-(1+2\cos(2\pi\tau))x_1(\tau) - 2(1-\sin(2\pi\tau))x_2(\tau) +$$
$$+ 0.5(1+2\cos(2\pi\tau))x_1(\tau-1) + 0.5(1-\sin(2\pi\tau))x_2(\tau-1)\},$$
$$dx_2(\tau)/d\tau = \exp(\tau)\{2(1+\sin(2\pi\tau))x_1(\tau) - (1-2\cos(2\pi\tau))x_2(\tau) -$$
$$- (1+\sin(2\pi\tau))x_1(\tau-1) + 0.25(1-2\cos(2\pi\tau))x_2(\tau-1)\}, \quad \tau \geqslant 0. \tag{43}$$

Здесь матрица $A(\tau)$ периодическая (период равен единице), имеет собственные значения $\lambda_1(\tau) = \lambda_2(\tau) = -1$, следовательно, система без запаздывающих членов асимптотически устойчива; матрица $B(\tau)$ также периодическая (период равен единице), при этом матрица $-A^{-1}(\tau)B(\tau)$ имеет вид

$$-A(\tau)^{-1}B(\tau) = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.25 \end{pmatrix},$$

её собственные значения $\rho_1 = 0.5$, $\rho_2 = 0.25$. Система (43) экспоненциально устойчива, что иллюстрируется графиком решения на рис. 1 при начальной вектор-функции $\phi(\xi) = (1,1)^{\text{т}}$, заданной на отрезке $[0,1]$.

Рассмотрим теперь управляемую систему

$$dx(\tau)/d\tau = \exp(\tau)[A(\tau)x(\tau) + \bar{B}(\tau)x(\tau-1) + C(\tau)u(\tau)], \tag{44}$$

где управляющее воздействие $u(\tau)$ – скалярная величина, матрица $\bar{B}(\tau)$ и вектор $C(\tau)$ определены следующим образом:

$$\bar{B}(\tau) = \begin{pmatrix} -4(1-\sin(2\pi\tau)) & -4(1+2\cos(2\pi\tau)) \\ -2(1-2\cos(2\pi\tau)) & 8(1+\sin(2\pi\tau)) \end{pmatrix}, \quad C(\tau) = \begin{pmatrix} 1+2\cos(2\pi\tau) \\ -2(1+2\sin(2\pi\tau)) \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$-A(\tau)^{-1}\bar{B}(\tau) = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho_{1,2} = \pm 2\sqrt{2}. \tag{45}$$

Собственными значениями этой "вырожденной" матрицы являются величины, бо́льшие по модулю единицы, следовательно, "вырожденная" система неустойчива, но неустойчива и исходная система (44) (при $u(\tau) \equiv 0$), что видно из графика на рис. 2. (Отметим, что достаточные условия неустойчивости могут быть получены с помощью знакопеременных функционалов Ляпунова–Красовского [4].)

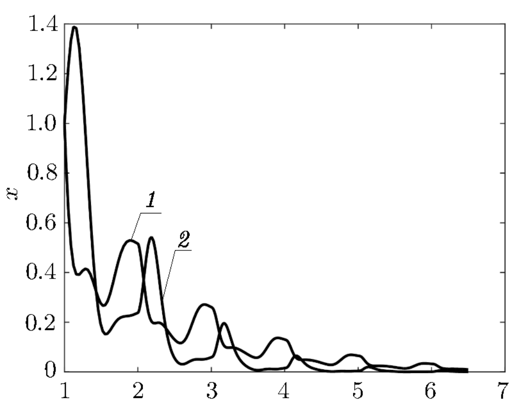

Рис. 1. Решение системы (43): *1* – $x_1(\tau)$, *2* – $x_2(\tau)$.

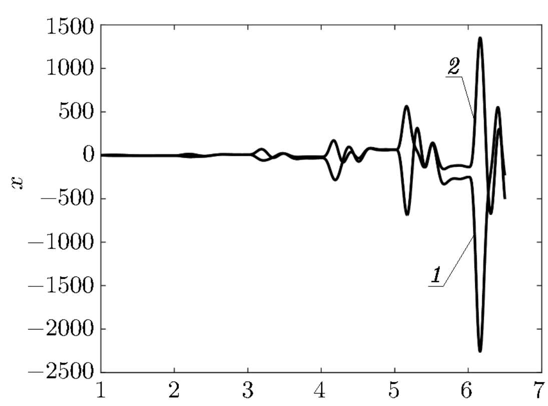

Рис. 2. Решение системы (44) при $u(\tau) \equiv 0$: *1* – $x_1(\tau)$, *2* – $x_2(\tau)$.

Возникает проблема стабилизации. Осуществить её традиционными методами весьма непросто ввиду того, что правая часть системы содержит экспоненциальный множитель. Поэтому поступаем следующим образом: будем стабилизировать вырожденную (разностную) систему второго порядка

$$\bar{z}(\tau) = -A^{-1}(\tau)\bar{B}(\tau)\bar{z}(\tau-1) + \bar{C}v(\tau), \quad \bar{C} = (1,0)^{\text{т}}. \tag{46}$$

Ввиду того, что матрица $-A^{-1}(\tau)\bar{B}(\tau) = A_1$ имеет обратную, стабилизацию разностной системы (45) можно осуществить следующим образом [14, с. 107]:

$$u(\tau) = (1 + \bar{C}^{\text{т}}R\bar{C})^{-1}\bar{C}A_1\bar{z}(\tau-1). \tag{47}$$

Здесь R – положительная 2×2-матрица, при этом матрица R^{-1} является решением линейного матричного уравнения

$$R^{-1} + \bar{C}\bar{C}^{\text{т}} = (1/0.64)A_1R^{-1}(A_1)^{\text{т}}, \quad R^{-1} = \begin{pmatrix} 0.0064 & 0 \\ 0 & 0.048 \end{pmatrix}. \tag{48}$$

Из (47) и (48) получаем стабилизированную матрицу

$$A_s = A_1 + (1 + \bar{C}^{\text{т}}R\bar{C})^{-1}\bar{C}A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -0.25 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho_{1,2} = \pm 0.707.$$

Если теперь в исходной управляемой системе (44) положить управление $u(\tau) = \bar{R}x(\tau-1)$, то полученная (стабилизированная) система будет иметь вид

$$dx(\tau)/d\tau = \exp(\tau)[A(\tau)x(\tau) + (\bar{B}(\tau) + C(\tau)R(\tau))x(\tau-1)],$$

$$\bar{B}(\tau) + C(\tau)R(\tau) = \begin{pmatrix} -4 + 4\sin(2\pi\tau) & -0.25 - 0.5\cos(2\pi\tau) \\ -2 + 4\cos(2\pi\tau) & 0.5 + 0.5\sin(2\pi\tau) \end{pmatrix}, \tag{49}$$

откуда, учитывая соотношения (44) и (46), получаем, что решение стабилизированной системы (49) экспоненциально устойчиво, что иллюстрирует график, приведённый на рис. 3.

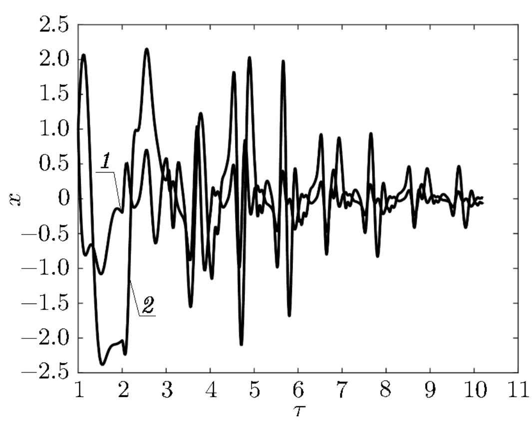

Рис. 3. Решение стабилизированной системы (49): *1* – $x_1(\tau)$, *2* – $x_2(\tau)$.

Последний пример показывает, что условие экспоненциальной устойчивости “вырожденной” системы существенно.

Заключение. Достаточные условия асимптотической устойчивости, сформулированные в теореме 1, в случае постоянных матриц A и B аналогичны условиям, полученным ранее (см. [15]) с помощью преобразования Лапласа [1, с. 11]. В статье [16] показано, что в случае существования у матрицы $-A^{-1}B$ собственных чисел $\bar{\rho}$, $|\bar{\rho}| > 1$, решение соответствующей системы неустойчиво. Преобразование Лапласа неприменимо для исследования асимптотической устойчивости систем вида (2), следовательно, метод, предложенный авторами, является более общим и позволяет решать задачи стабилизации традиционными методами некоторых нестационарных систем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Беллман Р., Кук К.* Дифференциально-разностные уравнения. М., 1967.
2. *Fox L., Mayers D.F., Ockendon J.R., Tayler A.B.* On functional differential equation // Inst. Math. Appl. 1972. V. 8. P. 271–307.
3. *Ockendon J.R., Tayler A.B.* The dynamics of a current collection system for an electric locomotive // Proc. Soc. London. Ser. A. 1971. V. 322. P. 447–468.
4. *Гребенщиков Б.Г., Ложников А.Б.* Устойчивость и стабилизация одного класса линейных нестационарных систем с постоянным запаздыванием // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2017. № 2. С. 3–15.
5. *Sesekin A.N., Shlyakov A.S.* On the stability of discontinuous solutions of bilinear systems with impulse action, constant and linear delays // Proc. of the 45th Intern. Conf. on Application of Mathematics in Engineering and Economics. 2019. P. 2172(1):030009.
6. *Жабко А.П., Тихомиров О.Г., Чижова О.Н.* О стабилизации одного класса систем с пропорциональным запаздыванием // Вестн. Санкт-Петербургского ун-та. Сер. А. Прикл. математика. Информатика. Процессы управления. 2018. Т. 14. Вып. 2. С. 165–172.
7. *Барбашин Е.А.* Введение в теорию устойчивости. М., 1967.
8. *Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М., 1971.
9. *Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В.* Теория показателей Ляпунова и ее приложение к вопросам устойчивости. М., 1966.
10. *Гребенщиков Б.Г.* Об устойчивости нестационарных систем с большим запаздыванием // Устойчивость и нелинейные колебания. Свердловск, 1984. С. 18–29.
11. *Халанай А., Векслер Д.* Качественная теория импульсных систем. М., 1971.
12. *Гребенщиков Б.Г.* Об устойчивости по первому приближению одной нестационарной системы с запаздыванием // Изв. вузов. Математика. 2012. № 2. С. 34–42.
13. *Митропольский Ю.А.* Метод усреднения в нелинейной механике. Киев, 1971.
14. *Фурасов В.Д.* Устойчивость и стабилизация дискретных систем. М., 1982.
15. *Гребенщиков Б.Г.* Устойчивость систем с переменным запаздыванием, линейно зависящим от времени // Устойчивость и нелинейные колебания. Свердловск, 1983. С. 25–34.
16. *Гребенщиков Б.Г., Новиков С.И.* О неустойчивости некоторой системы с линейным запаздыванием // Изв. вузов. Математика. 2010. № 2. С. 3–13.

Южно-Уральский государственный университет,
г. Челябинск,
Институт математики и механики
имени Н.Н. Красовского УрО РАН, г. Екатеринбург,
Уральский федеральный университет,
г. Екатеринбург

Поступила в редакцию 27.05.2021 г.
После доработки 01.03.2023 г.
Принята к публикации 16.03.2023 г.