ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 5, с. 608–618

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.4

ОБ ОДНОЗНАЧНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ В ОГРАНИЧЕННЫХ ПЛОСКИХ ОБЛАСТЯХ С НЕГЛАДКИМИ БОКОВЫМИ ГРАНИЦАМИ

© 2023 г. Е. А. Бадерко, С. И. Сахаров

Рассмотрены первая и вторая начально-краевые задачи для неоднородных параболических систем второго порядка с Дини-непрерывными коэффициентами при ненулевых начальных условиях в ограниченных областях на плоскости с негладкими боковыми границами, допускающими, в частности, "клювы". Доказаны теоремы об однозначной классической разрешимости этих задач в пространстве функций, непрерывных вместе со своими пространственными производными первого порядка в замыкании указанных областей.

DOI: 10.31857/S0374064123050059, EDN: CXQJPT

К 95-летию Владимира Александровича Ильина

Введение. Теория однозначной разрешимости начально-краевых задач для параболических систем общего вида с гёльдеровскими коэффициентами в пространствах $H^{k+\alpha,(k+\alpha)/2}(\overline{\Omega})$, $k \geqslant 2$, $0 < \alpha < 1$, в областях с гладкими боковыми границами построена в работе [1] (см. также [2, с. 706]). Особый интерес указанные задачи представляют в случае областей с негладкими боковыми границами.

В настоящей работе рассматриваются первая и вторая начально-краевые задачи для параболических по Петровскому (см. [3]) систем второго порядка с Дини-непрерывными коэффициентами в ограниченных областях на плоскости с негладкими, вообще говоря, боковыми границами из класса Дини–Гёльдера $H^{1/2+\omega}$. Здесь ω обозначает некоторый модуль непрерывности, удовлетворяющий условию Дини (см. ниже).

Для случая одного параболического уравнения в статьях [4, 5] установлена однозначная разрешимость таких задач в пространстве $H^{1,\hat{\omega}}(\overline{\Omega})$, где $\hat{\omega}$ – некоторый модуль непрерывности, при более сильных, по сравнению с предложенными в настоящей работе, требованиях на характер непрерывности коэффициентов этого уравнения и боковые границы области. При этом единственность решения первой начально-краевой задачи следует из принципа максимума, а единственность решения второй начально-краевой задачи получена в [5] с помощью теоремы о знаке косой производной. Отметим, что для систем принцип максимума, вообще говоря, не имеет места (см. [6]).

В случае параболических систем начально-краевые задачи в ограниченных плоских областях с негладкими боковыми границами рассматривались в работах [7–9]. В [7] и [8] доказаны теоремы о существовании и единственности решения из пространства $\underset{0}{C}^{1,0}(\overline{\Omega})$ первой начально-краевой задачи для однородной параболической системы с гёльдеровскими коэффициентами при нулевом начальном условии в ограниченной области с негладкими боковыми границами из класса Жевре $H^{(1+\alpha)/2}$. Кроме того, при тех же условиях на коэффициенты системы и боковые границы области в [8] доказана единственность решения из пространства $\underset{0}{C}^{1,0}(\overline{\Omega})$ второй начально-краевой задачи. В статье [9] приводится теорема об однозначной разрешимости в пространстве $C^0(\overline{\Omega})$ первой начально-краевой задачи для параболической системы с гёльдеровскими коэффициентами, зависящими лишь от пространственной переменной, в области с боковыми границами из класса $H^{(1+\alpha)/2}$.

Естественно возникает вопрос об исследовании начально-краевых задач для параболических систем с Дини-непрерывными коэффициентами в ограниченных областях с негладкими боковыми границами из класса $H^{1/2+\omega}$. При таких условиях в [10] доказана теорема о существовании классического решения из пространства $\underset{0}{C}{}^{1,0}(\overline{\Omega})$ смешанной начально-краевой задачи для однородной параболической системы с нулевыми начальными условиями. Вопрос о единственности решения поставленной задачи в этой работе не рассматривался.

Основным результатом настоящего исследования являются теоремы об однозначной разрешимости в пространстве $C^{1,0}(\overline{\Omega})$ первой и второй начально-краевых задач для неоднородных параболических систем с Дини-непрерывными коэффициентами при ненулевых начальных условиях в ограниченных плоских областях с границами из класса $H^{1/2+\omega}$. Аналогичные результаты в случае полуограниченных областей получены авторами в [11–13] (см. также библиографию в них).

Работа состоит из четырёх пунктов: в п. 1 приводятся необходимые определения и формулируются полученные результаты; п. 2 носит вспомогательный характер, в нём описываются необходимые нам свойства потенциала Пуассона и объёмного потенциала; в пп. 3 и 4 доказываются основные теоремы об однозначной разрешимости поставленных задач.

Основной результат работы анонсирован в статье [11].

1. Необходимые сведения и формулировка основного результата. Пусть $m \in \mathbb{N}$. Обозначим через $C^1(\mathbb{R})$ пространство вектор-функций $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$, непрерывных и ограниченных вместе со своей первой производной h', с нормой $\|h;\mathbb{R}\|^1 = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |h(x)| + \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |h'(x)|$. Пусть $T > 0$ – фиксированое число. Через $C[0,\tau]$, $0 < \tau \leqslant T$, обозначим пространство непрерывных вектор-функций $\psi : [0,\tau] \to \mathbb{R}^m$ с нормой $\|\psi;[0,\tau]\|^0 = \max\limits_{t\in[0,\tau]} |\psi(t)|$. Положим

$$\underset{0}{C}[0,\tau] = \{\psi \in C[0,\tau] : \psi(0) = 0\}.$$

Здесь и далее для числового вектора a (числовой матрицы A) под $|a|$ (соответственно $|A|$) понимаем максимум из модулей его компонент (её элементов).

Следуя [14, с. 147], *модулем непрерывности* называем непрерывную, неубывающую, полуаддитивную функцию $\omega : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$, для которой $\omega(0) = 0$. Говорят, что модуль непрерывности ω удовлетворяет *условию Дини*, если для него выполняется соотношение

$$\widetilde{\omega}(z) = \int\limits_0^z \omega(\xi)\xi^{-1}\, d\xi < +\infty, \quad z > 0. \tag{1}$$

Через $\mathcal{D}$ обозначим линейное пространство, состоящее из модулей непрерывности, которые удовлетворяют условию Дини (1).

Пусть $D = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R},\ t \in (0,T)\}$ и $\Omega \subset D$ – некоторая область. Через $C^0(\overline{\Omega})$ обозначим пространство непрерывных и ограниченных вектор-функций $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^m$ с нормой $\|u;\Omega\|^0 = \sup\limits_{(x,t)\in\Omega} |u(x,t)|$. Положим $C^{1,0}(\overline{\Omega}) = \{u \in C^0(\overline{\Omega}) : \partial_x u \in C^0(\overline{\Omega})\}$, $\|u;\Omega\|^{1,0} = \sum_{l=0}^1 \|\partial_x^l u;\Omega\|^0$, $\underset{0}{C}{}^{1,0}(\overline{\Omega}) = \{u \in C^{1,0}(\overline{\Omega}) : \partial_x^l u(x,0) = 0,\ l = 0,1\}$.

Под значениями функций и их производных на границе произвольной области Ω понимаем их предельные значения “изнутри” Ω.

Пусть ω – некоторый модуль непрерывности. Введём пространства

$$H^{1/2+\omega}[0,T] = \Big\{\psi \in C[0,T] : \|\psi;[0,T]\|^{1/2+\omega} = \|\psi;[0,T]\|^0 + \sup_{\substack{t,t+\Delta t\in(0,T)\\ \Delta t\neq 0}} \frac{|\Delta_t\psi(t)|}{|\Delta t|^{1/2}\omega(|\Delta t|^{1/2})} < \infty\Big\},$$

$$\underset{0}{H}{}^{1/2+\omega}[0,T] = \{\psi \in H^{1/2+\omega}[0,T] : \psi(0) = 0\},$$

$$H^{\omega}(\overline{\Omega}) = \Big\{u \in C^0(\overline{\Omega}) : \|u;\Omega\|^{\omega} = \|u;\Omega\|^0 + \sup_{\substack{(x,t),(x+\Delta x,t+\Delta t)\in\Omega\\ (\Delta x)^2+|\Delta t|\neq 0}} \frac{|\Delta_{x,t}u(x,t)|}{\omega(|\Delta x| + |\Delta t|^{1/2})} < \infty\Big\},$$

где $\Delta_t\psi(t) = \psi(t+\Delta t) - \psi(t)$, $\Delta_{x,t}u(x,t) = u(x+\Delta x, t+\Delta t) - u(x,t)$.

Пусть

$$\partial^{1/2}\psi(t) \equiv (\partial_t^{1/2}\psi)(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{d}{dt}\int\limits_0^t (t-\tau)^{-1/2}\psi(\tau)\,d\tau, \quad t\in[0,T],$$

– оператор дробного дифференцирования порядка $1/2$. Следуя [7], введём пространство

$$\underset{0}{C}^{1/2}[0,T] = \{\psi \in \underset{0}{C}[0,T] : \partial^{1/2}\psi \in \underset{0}{C}[0,T], \quad \|\psi;[0,T]\|^{1/2} = \|\psi;[0,T]\|^0 + \|\partial^{1/2}\psi;[0,T]\|^0 < \infty\}.$$

Замечание 1. Если $\psi \in \underset{0}{H}^{1/2+\omega}[0,T]$, $\omega\in\mathcal{D}$, то $\psi \in \underset{0}{C}^{1/2}[0,T]$ (см. [15]). Обратное, вообще говоря, неверно (см. [7]).

В полосе D выделим область $\Omega = \{(x,t)\in D : g_1(t) < x < g_2(t)\}$ с боковыми границами $\Sigma_s = \{(x,t)\in\overline{\Omega} : x = g_s(t)\}$, где функции g_s, $s=1,2$, удовлетворяют условиям

$$g_s \in H^{1/2+\omega_1}[0,T], \quad \omega_1\in\mathcal{D}, \tag{2}$$

и для некоторой постоянной $d>0$

$$g_2(t) - g_1(t) \geqslant d, \quad t\in[0,T]. \tag{3}$$

Рассмотрим в D равномерно параболический оператор

$$Lu \equiv \partial_t u - \sum_{l=0}^{2} A_l(x,t)\partial_x^l u, \quad u = (u_1, u_2, \ldots, u_m)^{\mathrm{т}}, \quad m\in\mathbb{N},$$

где $A_l = \|a_{ijl}\|_{i,j=1}^m$, $l=0,1,2$, – $m\times m$-матрицы, элементами которых являются вещественные функции, определённые в $\overline{D}$ и удовлетворяющие условиям:

(a) собственные числа μ_r, $r=\overline{1,m}$, матрицы A_2 подчиняются неравенствам $\operatorname{Re}\mu_r(x,t) \geqslant \delta$ для некоторого $\delta>0$ и всех $(x,t)\in\overline{D}$;

(b) $a_{ijl}\in H^{\omega_0}(\overline{D})$, где ω_0 – модуль непрерывности такой, что

$$\widetilde{\widetilde{\omega}}_0(z) = \int\limits_0^z y^{-1}\,dy\int\limits_0^y \omega_0(\xi)\xi^{-1}\,d\xi < +\infty, \quad z>0.$$

Известно (см. [16]), что при выполнении условий (a) и (b) у системы $Lu=0$ существует фундаментальная матрица решений $\Gamma(x,t;\xi,\tau)$, $(x,t;\xi,\tau)\in\overline{D}\times\overline{D}$, $t>\tau$.

Рассмотрим задачу о нахождении вектор-функции $u\in C^{1,0}(\overline{\Omega})$, являющейся классическим решением системы

$$Lu(x,t) = f(x,t), \quad (x,t)\in\Omega, \tag{4}$$

удовлетворяющей начальному условию

$$u(x,0) = h(x), \quad g_1(0)\leqslant x\leqslant g_2(0), \tag{5}$$

и одной из двух пар граничных условий:

$$\partial_x u(g_s(t),t) = \theta_s(t), \quad t\in[0,T], \quad s=1,2, \tag{6}$$

или

$$u(g_s(t),t) = \psi_s(t), \quad t\in[0,T], \quad s=1,2. \tag{7}$$

Основным результатом настоящей работы являются следующие две теоремы.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия (a), (b), (2) и (3). Тогда для любых функций* $f \in C^0(\overline{D})$, $h \in C^1(\mathbb{R})$ *и* $\theta_s \in C[0,T]$, $s = 1, 2$, *с условиями*

$$\sup_{\substack{(x+\Delta x,t),(x,t)\in D\\ \Delta x\neq 0}} \frac{|\Delta_x f(x,t)|}{\omega(|\Delta x|)} < \infty,$$

где $\omega \in \mathcal{D}$ *– некоторый модуль непрерывности, и*

$$\theta_s(0) = h'(g_s(0)), \quad s = 1, 2, \tag{8}$$

существует единственное решение $u \in C^{1,0}(\overline{\Omega})$ *задачи (4)–(6). Это решение имеет вид суммы векторных параболических потенциалов*

$$u(x,t) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(x,t;\xi,\tau) f(\xi,\tau)\, d\xi + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(x,t;\xi,0) h(\xi)\, d\xi + \sum_{s=1}^{2} \int\limits_0^t \Gamma(x,t;g_s(\tau),\tau)\varphi_s(\tau)\, d\tau \equiv$$

$$\equiv Vf(x,t) + Ph(x,t) + \sum_{s=1}^{2} (U\varphi)_s(x,t), \quad (x,t) \in \overline{\Omega}, \tag{9}$$

где $(\varphi_1,\varphi_2) \in \underset{0}{C}[0,T] \times \underset{0}{C}[0,T]$ *– единственное в* $C[0,T]\times C[0,T]$ *решение системы граничных интегральных уравнений Вольтерры II рода*

$$(-1)^k (2A_2)^{-1}(g_k(t),t) + \sum_{s=1}^{2} \int\limits_0^t \partial_x \Gamma(g_k(t),t;g_s(\tau),\tau)\varphi_s(\tau)\, d\tau =$$

$$= \theta_k(t) - \partial_x V f(g_k(t),t) - \partial_x Ph(g_k(t),t), \quad t \in [0,T], \quad k = 1, 2;$$

и справедлива оценка

$$\|u;\Omega\|^{1,0} \leqslant C\{\|f;D\|^0 + \|h;\mathbb{R}\|^1 + \sum_{s=1}^{2} \|\theta_s;[0,T]\|^0\}. \tag{10}$$

Здесь и далее через C обозначаем положительные постоянные, зависящие от чисел T, m, d, коэффициентов оператора L и модуля непрерывности ω_1, конкретный вид которых для нас не важен.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия (a), (b), (2) и (3). Тогда для любой* f, *удовлетворяющей условиям теоремы 1, и любых* $h \in C^1(\mathbb{R})$ *и* ψ_s, $s = 1, 2$, *с условиями*

$$\psi_s - h(g_s(0)) \in \underset{0}{C}^{1/2}[0,T], \quad s = 1, 2, \tag{11}$$

существует единственное решение $u \in C^{1,0}(\overline{\Omega})$ *задачи (4), (5), (7). Это решение имеет вид (9), где* $(\varphi_1,\varphi_2) \in \underset{0}{C}[0,T] \times \underset{0}{C}[0,T]$ *– единственное в* $C[0,T]\times C[0,T]$ *решение системы граничных интегральных уравнений Вольтерры I рода*

$$\sum_{s=1}^{2} \int\limits_0^t \Gamma(g_k(t),t;g_s(\tau),\tau)\varphi_s(\tau)\, d\tau = \psi_k(t) - Vf(g_k(t),t) - Ph(g_k(t),t), \quad t \in [0,T], \quad k = 1, 2; \tag{12}$$

и справедлива оценка

$$\|u;\Omega\|^{1,0} \leqslant C\Big\{\|f;D\|^0 + \|h;\mathbb{R}\|^1 + \sum_{s=1}^{2} \|\psi_s - h(g_s(0));[0,T]\|^{1/2}\Big\}. \tag{13}$$

Замечание 2. Если $h \in C^1(\mathbb{R})$, $\psi_s \in H^{1/2+\omega}[0,T]$, $\omega \in \mathcal{D}$, $s=1,2$, и $\psi_s(0) = h(g_s(0))$, то условия теоремы 2 для вектор-функций h и ψ_s выполнены, причём

$$\|\psi_s - h(g_s(0)); [0,T]\|^{1/2} \leqslant C\|\psi_s; [0,T]\|^{1/2+\omega} + |h(g_s(0))|.$$

Замечание 3 (см. [12, 17]). Если $g_s \in H^{1/2+\omega_1}[0,T]$, $s=1,2$, причём модуль непрерывности ω_1 не удовлетворяет условию (1), то решения задачи (4), (5), (7) из пространства $C^{1,0}(\overline{\Omega})$ может не существовать.

Замечание 4 (см. [18]). Если условия (11) не выполнены, то решения задачи (4), (5), (7) из пространства $C^{1,0}(\overline{\Omega})$ может не существовать.

2. Свойства потенциала Пуассона и объёмного потенциала. Приведём необходимые для дальнейшего изложения известные (см. [12, 19]) свойства объёмного потенциала Vf и потенциала Пуассона Ph (см. (9)).

Для любой функции f, удовлетворяющей условиям теоремы 1, и любой функции $h \in C^1(\mathbb{R})$ сумма потенциалов

$$u(x,t) = Vf(x,t) + Ph(x,t), \quad (x,t) \in \overline{D},$$

является единственным в $C^{1,0}(\overline{D})$ классическим решением задачи Коши

$$Lu = f \ \text{ в } \ D, \quad u(x,0) = h(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

и имеет место оценка

$$\|u; D\|^{1,0} \leqslant C\{\|f; D\|^0 + \|h; \mathbb{R}\|^1\}. \tag{14}$$

Кроме того, для любой $f \in C^0(\overline{D})$ потенциал Vf удовлетворяет неравенствам

$$|\partial_x^l Vf(x,t)| \leqslant C\|f; D\|^0 t^{1-l/2}, \quad l = 0,1,$$

$$|\Delta_t Vf(x,t)| \leqslant C\|f; D\|^0 |\Delta t|(1 + |\ln|\Delta t||), \quad |\Delta_t \partial_x Vf(x,t)| \leqslant C\|f; D\|^0 |\Delta t|^{1/2},$$

$$|\Delta_x \partial_x Vf(x,t)| \leqslant C\|f; D\|^0 |\Delta x|(1 + |\ln|\Delta x||), \quad (x,t), (x+\Delta x, t), (x, t+\Delta t) \in \overline{D}. \tag{15}$$

Отсюда, в частности, следует, что для вектор-функций $f_s(t) = Vf(g_s(t), t)$, $t \in [0,T]$, $s=1,2$, справедливы включения $f_s \in \underset{0}{C}^{1/2}[0,T]$ и оценки $\|f_s; [0,T]\|^{1/2} \leqslant C\|f; D\|^0$.

Наконец, отметим, что, как показано в [12], для произвольной $h \in C^1(\mathbb{R})$ вектор-функции $Ph(g_s(t), t)$, $t \in [0,T]$, $s=1,2$, могут быть представлены в виде

$$Ph(g_s(t), t) = h(g_s(0)) + \hat{h}_s(t), \quad t \in [0,T],$$

где $\hat{h}_s \in \underset{0}{C}^{1/2}[0,T]$, и имеют место оценки $\|\hat{h}_s; [0,T]\|^{1/2} \leqslant C\|h; \mathbb{R}\|^1$.

3. Доказательство теоремы 1. Сначала докажем существование решения задачи (4)–(6). С помощью замены

$$u(x,t) = v(x,t) + Vf(x,t) + Ph(x,t), \quad (x,t) \in \overline{\Omega}, \tag{16}$$

задача (4)–(6) сводится к отысканию решения следующей второй начально-краевой задачи:

$$Lv = 0 \ \text{ в } \ \Omega, \tag{17}$$

$$v(x,0) = 0, \quad g_1(0) \leqslant x \leqslant g_2(0), \tag{18}$$

$$\partial_x v(g_s(t), t) = \hat{\theta}_s(t), \quad t \in [0,T], \quad s = 1,2, \tag{19}$$

где

$$\hat{\theta}_s(t) = \theta_s(t) - \partial_x Vf(g_s(t), t) - \partial_x Ph(g_s(t), t), \quad t \in [0,T], \quad s = 1,2.$$

В силу условий (8), оценок (14), (15) и равенств (см. [12])

$$\partial_x Ph(g_s(0),0) = h'(g_s(0)), \quad s=1,2,$$

справедливы включения $\hat{\theta}_s \in \underset{0}{C}[0,T]$ и оценки

$$\|\hat{\theta}_s;[0,T]\|^0 \leqslant C\{\|f;D\|^0 + \|h;\mathbb{R}\|^1 + \|\theta_s;[0,T]\|^0\}, \quad s=1,2. \tag{20}$$

Разрешимость вспомогательной задачи (17)–(19) в пространстве $\underset{0}{C}^{1,0}(\overline{\Omega})$ доказываем, используя метод из работы [20], где рассматривался случай полуограниченной области $\Omega,$ а именно, решение задачи (17)–(19) ищем в виде суммы потенциалов простого слоя

$$v(x,t) = \sum_{s=1}^{2}\int\limits_0^t \Gamma(x,t;g_s(\tau),\tau)\varphi_s(\tau)\,d\tau, \quad (x,t)\in\overline{\Omega}, \tag{21}$$

где вектор-плотности $\varphi_s \in \underset{0}{C}[0,T],$ $s=1,2,$ подлежат определению. Для отыскания неизвестных плотностей $\varphi_s,$ $s=1,2,$ подставляем (21) в граничные условия (19), откуда получаем систему граничных интегральных уравнений Вольтерры II рода

$$(-1)^k(2A_2)^{-1}(g_k(t),t) + \sum_{s=1}^{2}\int\limits_0^t \partial_x\Gamma(g_k(t),t;g_s(\tau),\tau)\varphi_s(\tau)\,d\tau = \hat{\theta}_k(t), \quad t\in[0,T], \quad k=1,2. \tag{22}$$

Методом из [20] доказывается, что эта система имеет единственное в $C[0,T]\times C[0,T]$ решение $(\varphi_1,\varphi_2)\in \underset{0}{C}[0,T]\times\underset{0}{C}[0,T],$ и в силу (20) справедливы оценки

$$\|\varphi_s;[0,T]\|^0 \leqslant C\biggl\{\|f;D\|^0 + \|h;\mathbb{R}\|^1 + \sum_{s=1}^{2}\|\theta_s;[0,T]\|^0\biggr\}, \quad s=1,2. \tag{23}$$

Подставив найденное решение (φ_1,φ_2) системы (22) в (21), получим решение задачи (17)–(19). Как следует из результатов статьи [16], это решение принадлежит пространству $\underset{0}{C}^{1,0}(\overline{\Omega})$ и в силу (23) удовлетворяет оценке

$$\|v;\Omega\|^{1,0} \leqslant C\biggl\{\|f;D\|^0 + \|h;\mathbb{R}\|^1 + \sum_{s=1}^{2}\|\theta_s;[0,T]\|^0\biggr\}.$$

Возвращаясь к вектор-функции u по формуле (16), отсюда, в силу свойств объёмного потенциала и потенциала Пуассона (см. п. 2), получаем решение задачи (4)–(6) из пространства $C^{1,0}(\overline{\Omega}),$ для которого справедливы представление (9) и оценка (10).

Теперь докажем единственность решения задачи (4)–(6). Пусть $u\in\underset{0}{C}^{1,0}(\overline{\Omega})$ – решение этой задачи при

$$f(x,t)=0, \quad (x,t)\in\overline{D}, \quad h(x)=0, \quad x\in\mathbb{R}, \quad \theta_s(t)=0, \quad t\in[0,T], \quad s=1,2.$$

Для произвольного $\tau\in(0,T]$ обозначим

$$D_\tau = \{(x,t)\in D: t\in(0,\tau)\}, \quad \Omega_\tau = \{(x,t)\in\Omega: t\in(0,\tau)\}.$$

Достаточно показать, что $u\equiv 0$ в $\Omega_{t_0},$ где $t_0\in(0,T]$ – некоторое достаточно малое число, которое будет выбрано ниже.

Пользуясь условием (2), фиксируем достаточно малое число $\tau_0 \in (0, T]$ такое, что справедливы неравенства

$$|g_s(t) - g_s(0)| \leqslant {\tau_0}^{1/2}\omega_1(\tau_0^{1/2}) \leqslant d/9, \quad t \in [0, \tau_0], \quad s = 1, 2,$$

где $d > 0$ – постоянная из условия (3), из которых следует оценка

$$|g_2(t_2) - g_1(t_1)| \geqslant 8d/9, \quad t_i \in [0, \tau_0], \quad i = 1, 2.$$

Затем фиксируем произвольное $\tau \in (0, \tau_0]$ и определяем продолжение u_τ вектор-функции u на всю полосу $\overline{D}_\tau$ по формулам

$$u_\tau(x, t) = u(x, t), \quad (x, t) \in \overline{\Omega}_\tau, \quad u_\tau(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \overline{D}_\tau \setminus \overline{\Omega}_\tau.$$

Рассмотрим функции $\zeta_i \in C^\infty(\mathbb{R})$, удовлетворяющие условиям

$$0 \leqslant \zeta_i(x) \leqslant 1, \quad \left|\frac{d^l\zeta_i}{dx^l}(x)\right| \leqslant Cd^{-l}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, 3, \quad l = 1, 2, 3, \tag{24}$$

и, кроме того,

$$\zeta_i(x) = 1, \quad x \in [g_i(0) - d/9, g_i(0) + d/9], \quad \zeta_i(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R} \setminus (g_i(0) - d/3, g_i(0) + d/3),$$

$$\zeta_i(x) > 0, \quad x \in (g_i(0) - d/3, g_i(0) + d/3),$$

если $i = 1, 2$, и

$$\zeta_3(x) = 1, \quad x \in [g_1(0) + d/3, g_2(0) - d/3], \quad \zeta_3(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R} \setminus (g_1(0) + d/9, g_2(0) - d/9),$$

$$\zeta_3(x) > 0, \quad x \in (g_1(0) + d/9, g_2(0) - d/9).$$

Построим “разложение единицы”:

$$\hat{\zeta}_i(x) = \zeta_i(x)\bigg(\sum_{j=1}^{3} \zeta_j(x)\bigg)^{-1}, \quad x \in (g_1(0) - d/3, g_2(0) + d/3), \quad i = 1, 2, 3,$$

$$\hat{\zeta}_1(x) = 1, \quad x \leqslant g_1(0) - d/3, \quad \hat{\zeta}_1(x) = 0, \quad x \geqslant g_2(0) + d/3,$$

$$\hat{\zeta}_2(x) = 1, \quad x \geqslant g_2(0) + d/3, \quad \hat{\zeta}_2(x) = 0, \quad x \leqslant g_1(0) - d/3,$$

$$\hat{\zeta}_3(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R} \setminus (g_1(0) - d/3, g_2(0) + d/3).$$

Следуя методу из [2, с. 342], положим

$$u_{\tau,i}(x, t) = u_\tau(x, t)\hat{\zeta}_i(x, t), \quad (x, t) \in \overline{D}_\tau, \quad i = 1, 2, 3.$$

Заметим, что $\overline{\Omega}_\tau \subset (g_1(0) - d/9, g_2(0) + d/9) \times (0, \tau)$, справедливы равенство

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^{3} u_{i,\tau}(x, t), \quad (x, t) \in \overline{\Omega}_\tau, \tag{25}$$

и включения

$$u_{\tau,i} \in \underset{0}{C}^{1,0}(\overline{\Omega}_\tau^{(i)}), \quad i = 1, 2, \quad u_{\tau,3} \in \underset{0}{C}^{1,0}(\overline{D}_\tau), \quad \tau \in (0, \tau_0],$$

где $\Omega_\tau^{(1)} = \{(x, t) \in D_\tau : x > g_1(t)\}$, $\Omega_\tau^{(2)} = \{(x, t) \in D_\tau : x < g_2(t)\}$.

Сначала рассмотрим функцию $u_{\tau,3}$, являющуюся решением задачи Коши

$$Lu = f_{\tau,3} \text{ в } D_\tau, \quad u(x,0)=0, \quad x\in\mathbb{R},$$

где

$$f_{\tau,3}(x,t) = -A_2(x,t)\left[2\partial_x u(x,t)\frac{d\hat{\zeta}_3}{dx}(x) + u(x,t)\frac{d^2\hat{\zeta}_3}{dx^2}(x)\right] - A_1(x,t)u(x,t)\frac{d\hat{\zeta}_3}{dx}(x), \quad (x,t)\in\overline{\Omega}_\tau,$$

$$f_{\tau,3}(x,t)=0, \quad (x,t)\in\overline{D}_\tau\setminus\overline{\Omega}_\tau.$$

Отметим также, что

$$f_{\tau,3}(x,t)=0, \quad x\in\mathbb{R}\setminus[g_1(0)+d/9, g_2(0)-d/9], \quad t\in[0,\tau]. \tag{26}$$

Обозначим

$$\Pi_\tau = [g_1(0)+d/9, g_2(0)-d/9]\times[0,\tau].$$

Так как $\Pi_\tau\subset\Omega_\tau$, то $\max\limits_{(x,t)\in\Pi_\tau}|\partial_x^2 u(x,t)|<\infty$. Из равенства (26) в силу (24) следует, что

$$f_{\tau,3}\in C^0(\overline{D}_\tau), \quad \|f_{\tau,3};D_\tau\|^0 \leqslant C\|u;\Omega_\tau\|^{1,0}. \tag{27}$$

Заметим, что $f_{\tau,3}$ удовлетворяет условию Дини, а именно

$$|\Delta_x f_{\tau,3}(x,t)| \leqslant C\{[\max_{(x,t)\in\Pi_\tau}|\partial_x^2 u(x,t)| + \|u;\Omega\|^{1,0}]|\Delta x| + \|u;\Omega\|^{1,0}\omega_0(|\Delta x|)\}, \quad (x,t),(x+\Delta x,t)\in\overline{D}_\tau.$$

Поэтому в силу единственности решения задачи Коши (см. [19]) функция $u_{\tau,3}$ может быть представлена в виде объёмного потенциала

$$u_{\tau,3}(x,t) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(x,t;\xi,\tau) f_{\tau,3}(\xi,\tau)\,d\xi, \quad (x,t)\in\overline{D}_\tau.$$

Отсюда, используя (15) и (27), получаем оценку

$$\|u_{\tau,3};D_\tau\|^{1,0} \leqslant C\|u;\Omega_\tau\|^{1,0}\tau^{1/2}, \quad (x,t)\in\overline{D}_\tau,$$

в силу которой для достаточно малого числа $\tau_3\in(0,\tau_0]$ справедливо неравенство

$$\|u_{\tau,3};D_\tau\|^{1,0} \leqslant \frac{1}{6}\|u;\Omega_\tau\|^{1,0}, \quad \text{если} \quad \tau\in(0,\tau_3]. \tag{28}$$

Далее для произвольно фиксированного $\tau\in(0,\tau_3]$ рассмотрим вектор-функцию $u_{\tau,1}$. Она является решением второй начально-краевой задачи в полуограниченной области $\Omega_\tau^{(1)}$ из пространства $\underset{0}{C}^{1,0}(\overline{\Omega}_\tau^{(1)})$:

$$Lu = f_{\tau,1} \text{ в } \Omega_\tau^{(1)}, \quad u(x,0)=0, \quad x\geqslant g_1(0), \tag{29}$$

$$\partial_x u(g_1(t),t)=0, \quad t\in[0,\tau]. \tag{30}$$

В силу единственности решения задачи (29), (30) (см. [13]), результатов [20] о построении решения второй начально-краевой задачи в полуограниченной области в виде потенциала простого слоя и сведений об объёмном потенциале из п. 2 делаем вывод, что $u_{\tau,1}$ может быть представлена в виде суммы потенциалов

$$u_{\tau,1}(x,t)=\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Gamma(x,t;\xi,\tau)f_{\tau,1}(\xi,\tau)\,d\xi+\int\limits_0^t\Gamma(x,t;g_1(\tau),\tau)\varphi_{\tau,1}(\tau)\,d\tau\equiv$$

$$\equiv Vf_{\tau,1}(x,t)+U\varphi_{\tau,1}(x,t),\quad (x,t)\in\overline{\Omega}_\tau^{(1)}. \tag{31}$$

Здесь вектор-плотность $\varphi_{\tau,1}\in\underset{0}{C}[0,\tau]$ является единственным в $C[0,\tau]$ решением граничного интегрального уравнения Вольтерры II рода (см. [20])

$$-(2A_2(g_1(t),t))^{-1}\varphi_{\tau,1}(t)+\int\limits_0^t\partial_x\Gamma(g_1(t),t;g_1(\tau),\tau)\varphi_{\tau,1}(\tau)\,d\tau=\theta_{\tau,1}(t),$$

где

$$\theta_{\tau,1}(t)=-\partial_xVf_{\tau,1}(g_1(t),t),\quad t\in[0,\tau]. \tag{32}$$

Оценим потенциалы из представления (31). Используя (15) и равенство (32), получаем

$$\|Vf_{\tau,1};D_\tau\|^{1,0}\leqslant C\|u;\Omega_\tau\|^{1,0}\tau^{1/2},\quad \|\theta_{\tau,1};[0,\tau]\|^0\leqslant C\|u;\Omega_\tau\|^{1,0}\tau^{1/2} \tag{33}$$

и, следовательно,

$$\|U\varphi_{\tau,1};\Omega_\tau^{(1)}\|^{1,0}\leqslant C\|u;\Omega_\tau\|^{1,0}\tau^{1/2}. \tag{34}$$

Фиксируя достаточно малое $\tau_1\in(0,\tau_3]$, из представления (31) и оценок (33), (34) заключаем, что

$$\|u_{\tau,1};\Omega_\tau^{(1)}\|^{1,0}\leqslant\frac{1}{6}\|u;\Omega_\tau\|^{1,0},\quad \text{если}\quad \tau\in(0,\tau_1]. \tag{35}$$

Аналогично доказывается, что при достаточно малом $\tau_2\in(0,\tau_1]$ имеет место неравенство

$$\|u_{\tau,2};\Omega_\tau^{(2)}\|^{1,0}\leqslant\frac{1}{6}\|u;\Omega_\tau\|^{1,0},\quad \text{если}\quad \tau\in(0,\tau_2]. \tag{36}$$

Положив $t_0=\tau_2$, из равенства (25) и оценок (28), (35), (36) получим окончательное неравенство

$$\|u;\Omega_\tau\|^{1,0}\leqslant\frac{1}{2}\|u;\Omega_\tau\|^{1,0},\quad \tau\in(0,t_0],$$

из которого следует, что $u\equiv0$ в $\overline{\Omega}_{t_0}$. Теорема 1 доказана.

4. Доказательство теоремы 2. Сначала докажем существование решения задачи (4), (5), (7). С помощью замены (16) задача (4), (5), (7) сводится к первой начально-краевой задаче для однородной системы с нулевым начальным условием. Разрешимость последней и представление её решения в виде

$$v(x,t)=\sum_{s=1}^2\int\limits_0^t\Gamma(x,t;g_s(\tau),\tau)\varphi_s(\tau)\,d\tau,\quad (x,t)\in\overline{\Omega},$$

проводится методами из работ [7] и [21]. Здесь $(\varphi_1,\varphi_2)\in\underset{0}{C}[0,T]\times\underset{0}{C}[0,T]$ является единственным в пространстве $C[0,T]\times C[0,T]$ решением системы граничных интегральных уравнений Вольтерры I рода (12). Затем, возвращаясь к вектор-функции u по формуле (16), учитывая свойства объёмного потенциала и потенциала Пуассона из п. 2, получаем решение задачи (4), (5), (7) из пространства $C^{1,0}(\overline{\Omega})$, для которого справедливы представление (9) и оценка (13).

Докажем единственность решения задачи (4), (5), (7). Пусть $u \in \underset{0}{C}^{1,0}(\overline{\Omega})$ – решение этой задачи при

$$f(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \overline{D}, \quad h(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \psi_s(t) = 0, \quad t \in [0,T], \quad s = 1,2.$$

Тогда u является решением второй начально-краевой задачи

$$Lv = 0 \ \text{ в } \ \Omega, \quad v(x,0) = 0, \quad x \geqslant g(0), \quad \partial_x v(g_s(t),t) = \hat{\theta}_s(t), \quad t \in [0,T], \quad s = 1,2,$$

где $\hat{\theta}_s(t) = \partial_x u(g_s(t),t)$, $\hat{\theta}_s \in \underset{0}{C}[0,T]$. Из теоремы 1 следует, что вектор-функция u может быть представлена в виде суммы потенциалов простого слоя (21), где $(\varphi_1,\varphi_2) \in \underset{0}{C}[0,T] \times \underset{0}{C}[0,T]$ – единственное в $C[0,T]\times C[0,T]$ решение системы граничных интегральных уравнений Вольтерры II рода

$$(-1)^k (2A_2)^{-1}(g_k(t),t) + \sum_{s=1}^{2} \int_0^t \partial_x \Gamma(g_k(t),t;g_s(\tau),\tau)\varphi_s(\tau)\,d\tau = \hat{\theta}_k(t), \quad t \in [0,T], \quad k = 1,2.$$

Подставив вектор-функцию (21) в нулевые граничные условия (7), получим, что (φ_1,φ_2) также является решением системы граничных интегральных уравнений Вольтерры I рода (12) с нулевыми правыми частями. В силу единственности в $C[0,T]\times C[0,T]$ решения системы (12) имеем, что

$$\varphi_s(t) = 0, \quad t \in [0,T], \quad s = 1,2.$$

Подставляя найденное решение (φ_1,φ_2) в представление (21), приходим к выводу, что $u \equiv 0$ в $\overline{\Omega}$. Теорема 2 доказана.

Замечание 5. Аналогично устанавливается теорема единственности решения смешанной задачи (см. [11]), когда на одной из боковых границ области задаётся граничное условие I рода, а на другой – II рода. Существование решения смешанной задачи для однородной системы с нулевым начальным условием доказано в статье [10], с использованием сведений п. 2 настоящей работы получаем разрешимость этой задачи и в случае неоднородной системы с ненулевым начальным условием.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Солонников В.А.* О краевых задачах для линейных параболических систем дифференциальных уравнений общего вида // Тр. Мат. ин-та В.А. Стеклова АН СССР. 1965. Т. 83. С. 3–163.
2. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М., 1967.
3. *Петровский И.Г.* О проблеме Коши для систем линейных уравнений с частными производными в области неаналитических функций // Бюлл. Моск. гос. ун-та. Секц. А. 1938. Т. 1. № 7. С. 1–72.
4. *Камынин Л.И.* О решении методом потенциалов основных краевых задач для одномерного параболического уравнения второго порядка // Сиб. мат. журн. 1974. Т. 15. № 4. С. 806–834.
5. *Камынин Л.И., Химченко Б.Н.* Об аналогах теоремы Жиро для параболического уравнения 2-го порядка // Сиб. мат. журн. 1973. Т. 14. № 1. С. 86–110.
6. *Мазья В.Г., Кресин Г.И.* О принципе максимума для сильно эллиптических и параболических систем второго порядка с постоянными коэффициентами // Мат. сб. 1984. Т. 125 (167). № 4 (12). С. 458–480.
7. *Бадерко Е.А., Черепова М.Ф.* Потенциал простого слоя и первая краевая задача для параболической системы на плоскости // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52. № 2. С. 198–208.
8. *Бадерко Е.А., Черепова М.Ф.* О единственности решений первой и второй начально-краевых задач для параболических систем в ограниченных областях на плоскости // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 8. С. 1039–1048.
9. *Коненков А.Н.* Классические решения первой начально-краевой задачи для параболических систем на плоскости // Докл. РАН. Математика, информатика, процессы управления. 2022. Т. 503. С. 67–69.

10. *Baderko E.A., Cherepova M.F.* Mixed problems for plane parabolic systems and boundary integral equations // J. of Math. Sci. 2022. V. 260. № 4. P. 418–433.
11. *Бадерко Е.А., Сахаров С.И.* Единственность решений начально-краевых задач для параболических систем с Дини-непрерывными коэффициентами в плоских областях // Докл. РАН. Математика, информатика, процессы управления. 2022. Т. 503. С. 26–29.
12. *Бадерко Е.А., Сахаров С.И.* Потенциал Пуассона в первой начально-краевой задаче для параболической системы в полуограниченной области на плоскости // Дифференц. уравнения. 2022. Т. 58. № 10. С. 1333–1343.
13. *Бадерко Е.А., Сахаров С.И.* О единственности решений начально-краевых задач для параболических систем с Дини-непрерывными коэффициентами в полуограниченной области на плоскости // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2023. Т. 63. № 4. С. 584–595.
14. *Дзядык В.К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. М., 1977.
15. *Камынин Л.И.* Гладкость тепловых потенциалов в пространстве Дини–Гёльдера // Сиб. мат. журн. 1970. Т. 11. № 5. С. 1017–1045.
16. *Зейнеддин М.* Гладкость потенциала простого слоя для параболической системы второго порядка в классах Дини // Деп. ВИНИТИ РАН. 16.04.92. № 1294-В92.
17. *Камынин Л.И., Химченко Б.Н.* Принцип максимума и локальные оценки Липшица вблизи боковой границы для решений параболического уравнения 2-го порядка // Сиб. мат. журн. 1975. Т. 16. № 6. С. 1172–1187.
18. *Сахаров С.И.* Контактная задача для параболических систем второго порядка в полосе с негладкой кривой раздела сред // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 4. С. 496–506.
19. *Бадерко Е.А., Черепова М.Ф.* О единственности решения задачи Коши для параболических систем // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 6. С. 822–830.
20. *Зейнеддин М.* О потенциале простого слоя для параболической системы в классах Дини: дис. ... канд. физ.-мат. наук. М., 1992.
21. *Baderko E.A., Cherepova M.F.* Dirichlet problem for parabolic systems with Dini continuous coefficients // Appl. Anal. 2021. V. 100. № 13. P. 2900–2910.

Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова,
Московский центр фундаментальной
и прикладной математики

Поступила в редакцию 16.03.2023 г.
После доработки 16.03.2023 г.
Принята к публикации 18.04.2023 г.