

## УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.32

К ЗАДАЧЕ ДАРБУ  
ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ

© 2023 г. А. Н. Миронов, Л. Б. Миронова

Для гиперболической системы с некротными характеристиками в  $n$ -мерном пространстве независимых переменных доказаны существование и единственность решения задачи Дарбу. Определена матрица Римана–Адамара и построено решение задачи Дарбу в терминах указанной матрицы. В качестве примера применения полученных результатов подробно построено решение задачи Дарбу для системы в случае четырёх независимых переменных.

DOI: 10.31857/S0374064123050084, EDN: CXHVYD

**Введение.** В теории гиперболических уравнений и систем существенную роль играют задачи Дарбу. В частности, задача Дарбу для гиперболического уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными рассматривалась в работах [1, гл. 3, § 1; 2, с. 7–15, 90–122; 3; 4], для уравнений Бианки – в статьях [5, 6], при этом решения задач строились в терминах функции Римана–Адамара.

Гиперболические системы вида

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^n a_{ij}(x_1, \dots, x_n) u_j + f_i(x_1, \dots, x_n), \quad i = \overline{1, n}, \quad (1)$$

исследовались многими авторами (см., например, статьи [7–10] и библиографии к ним). Отметим, что в [9, 10] решения задач Дарбу для системы (1) с двумя и тремя независимыми переменными построены в терминах матриц Римана–Адамара.

В настоящей работе для системы (1) с  $n$  независимыми переменными предложен метод решения задачи Дарбу, являющийся развитием метода Римана, который естественно назвать *методом Римана–Адамара*.

**1. Основной результат.** Линейное преобразование искомых функций приводит систему (1) к случаю, когда  $a_{ii} \equiv 0$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Далее считаем эти условия выполненными.

Пусть  $D$  – область, ограниченная плоскостями  $X_i: x_i = 0$ ,  $X_{i0}: x_i = x_{i0} > 0$ ,  $i = \overline{1, n-1}$ ;  $T: x_n = x_1$ . Считаем, что коэффициенты системы (1) удовлетворяют условиям гладкости  $a_{ij} \in C(\overline{D})$ ,  $f_i \in C(\overline{D})$ ,  $i, j = \overline{1, n}$ .

Определим класс функций  $C^{(k_1, k_2, \dots, k_n)}$  следующим образом: функция  $f \in C^{(k_1, k_2, \dots, k_n)}$ , если существуют непрерывные производные  $\partial^{r_1+r_2+\dots+r_n} f / (\partial x_1^{r_1} \partial x_2^{r_2} \dots \partial x_n^{r_n})$ ,  $r_i = \overline{0, k_i}$ .

Решение  $u_1 \in C^{(1,0,\dots,0)}(D)$ ,  $u_2 \in C^{(0,1,0,\dots,0)}(D)$ ,  $\dots$ ,  $u_n \in C^{(0,\dots,0,1)}(D)$  назовём *регулярным* в области  $D$ .

**Задача Дарбу.** В области  $D$  найти регулярное решение системы (1), удовлетворяющее граничным условиям

$$u_i|_{\overline{X_i}} = \varphi_i, \quad u_n|_{\overline{T}} = \psi, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad (2)$$

где  $\varphi_i \in C(\overline{X_i})$ ,  $\psi \in C(\overline{T})$  – заданные функции, причём  $\varphi_i$  зависят от всех независимых переменных, кроме  $x_i$ , а функция  $\psi = \psi(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ .

Сведём систему (1) с учётом условий (2) к системе интегральных уравнений Вольтерры

$$u_i(x_1, \dots, x_n) = \varphi_i + \int_0^{x_i} \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} u_j + f_i \right) dx_i, \quad i = \overline{1, n-1},$$

$$u_n(x_1, \dots, x_n) = \psi + \int_{x_1}^{x_n} \left( \sum_{j=1}^n a_{nj} u_j + f_n \right) dx_n, \quad (3)$$

решение которой существует и единственно в классе непрерывных функций. Задача Дарбу (1), (2) и система (3) эквивалентны. Действительно, система (3) – следствие (1) и (2). Обратное, дифференцируя уравнения системы (3) по переменным  $x_1, \dots, x_n$ , получаем систему (1) с условиями (2).

Таким образом, справедлива

**Теорема.** Если выполняются условия  $a_{ij} \in C(\overline{D})$ ,  $f_i \in C(\overline{D})$ ,  $i, j = \overline{1, n}$ , то решение задачи Дарбу (1), (2) существует и единственно.

Перейдём к построению решения задачи Дарбу в терминах матрицы Римана–Адамара.

Запишем систему (1) в векторно-матричной форме

$$L(\mathbf{U}) = \mathbf{F}, \quad L(\mathbf{U}) \equiv \sum_{i=1}^n \mathbf{A}_i \mathbf{U}_{x_i} - \mathbf{B} \mathbf{U}, \quad \mathbf{U} = \text{colon}(u_1, u_2, \dots, u_n), \quad (4)$$

где

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \mathbf{A}_n = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \text{colon}(f_1, f_2, \dots, f_n).$$

Введём матрицу Римана [11]

$$\mathbf{R} = \text{colon}(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \dots, \mathbf{R}_n),$$

где  $\mathbf{R}_i(x_1, x_2, \dots, x_n, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = (r_{i1}, r_{i2}, \dots, r_{in})$ ,  $i = \overline{1, n}$ , являются решениями систем

$$r_{i1}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \delta_{i1} - \int_{\xi_1}^{x_1} (a_{21} r_{i2} + a_{31} r_{i3} + \dots + a_{n1} r_{in})(\alpha_1, x_2, \dots, x_n) d\alpha_1,$$

$$r_{i2}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \delta_{i2} - \int_{\xi_2}^{x_2} (a_{12} r_{i1} + a_{32} r_{i3} + \dots + a_{n2} r_{in})(x_1, \alpha_2, x_3, \dots, x_n) d\alpha_2,$$

$$r_{i3}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \delta_{i3} - \int_{\xi_3}^{x_3} (a_{13} r_{i1} + a_{23} r_{i2} + \dots + a_{n3} r_{in})(x_1, x_2, \alpha_3, x_4, \dots, x_n) d\alpha_3, \quad \dots$$

$$\dots, \quad r_{in}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \delta_{in} - \int_{\xi_n}^{x_n} (a_{14} r_{i1} + a_{24} r_{i2} + \dots + a_{n-1n} r_{in-1})(x_1, x_2, \dots, \alpha_n) d\alpha_n, \quad (5)$$

а  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера. Решения систем (5) при каждом  $i$  существуют и единственны в классе непрерывных функций. По первым  $n$  аргументам  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  матрица  $\mathbf{R}$  удовлетворяет сопряжённой к (4) системе

$$L^*(\mathbf{V}) = 0, \quad L^*(\mathbf{V}) \equiv - \sum_{i=1}^n (\mathbf{A}_i \mathbf{V})_{x_i} - \mathbf{B}\mathbf{U}.$$

Из систем (5), в частности, следует, что выполняются тождества

$$r_{ij}(x_1, x_2, \dots, x_n, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)|_{x_j=\xi_j} \equiv \begin{cases} 1, & j = i, \\ 0, & j \neq i. \end{cases} \tag{6}$$

Справедливо равенство

$$\mathbf{R}\mathbf{L}(\mathbf{U}) = \sum_{i=1}^n (\mathbf{R}\mathbf{A}_i \mathbf{U})_{x_i}, \tag{7}$$

которое может быть проверено непосредственно.

Возьмём внутри области  $D$  произвольную точку  $P(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$  и проведём через неё плоскости, параллельные осям координат. Получим область  $D_P$ , ограниченную плоскостями  $X_i, i = \overline{1, n-1}, x_i = \xi_i, i = \overline{1, n}$ , а также плоскостью  $T: x_n = x_1$ . Плоскость  $x_n = \xi_1$ , разбивает область  $D_P$  на две части:  $D^1$  (отвечает условию  $x_n > \xi_1$  и определяется неравенствами  $0 < x_1 < \xi_1, 0 < x_2 < \xi_2, \dots, 0 < x_{n-1} < \xi_{n-1}, \xi_1 < x_n < \xi_n$ ) и  $D^2$  (соответствует условию  $x_n < \xi_1$  и может быть задана двумя системами неравенств:

- 1)  $0 < x_1 < \xi_1, 0 < x_2 < \xi_2, \dots, 0 < x_{n-1} < \xi_{n-1}, x_1 < x_n < \xi_1;$
- 2)  $0 < x_1 < x_n, 0 < x_2 < \xi_2, 0 < x_3 < \xi_3, \dots, 0 < x_n < \xi_1.$

Обозначим пересечение замыкания области  $D^1$  с плоскостями  $X_i, i = \overline{1, n-1}$ , через  $X_i^1$ , с плоскостью  $x_n = \xi_1$  – через  $E^1$ , с плоскостями  $x_i = \xi_i$  – через  $D_i^1, i = \overline{1, n}$ . Аналогично обозначим пересечение замыкания области  $D^2$  с плоскостями  $X_i, i = \overline{1, n-1}$ , через  $X_i^2$ , с плоскостью  $x_n = \xi_1$  – через  $E^2$ , с плоскостью  $T$  – через  $S$ , с плоскостями  $x_i = \xi_i$  – через  $D_i^2, i = \overline{2, n-1}$ .

Определим матрицу Римана–Адамара  $\mathbf{H}(x_1, x_2, \dots, x_n, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = (h_{ij}), i, j = \overline{1, n}$ , задачи Дарбу:

$$\mathbf{H}(x_1, x_2, \dots, x_n, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = \begin{cases} \mathbf{R}(x_1, x_2, \dots, x_n, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n), & (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D^1, \\ \mathbf{Q}(x_1, x_2, \dots, x_n, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n), & (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D^2. \end{cases}$$

Здесь  $\mathbf{Q} = \text{colon}(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, \dots, \mathbf{Q}_n)$ , где вектор-функции  $\mathbf{Q}_i = (q_{i1}, q_{i2}, \dots, q_{in})$  являются решениями задачи Дарбу в области  $D^2$  для сопряжённой системы

$$\begin{aligned} q_{i1x_1} &= -a_{21}q_{i2} - a_{31}q_{i3} - \dots - a_{n1}q_{in}, & q_{i2x_2} &= -a_{12}q_{i1} - a_{32}q_{i3} - \dots - a_{n2}q_{in}, & \dots \\ \dots, & & q_{inx_n} &= -a_{1n}q_{i1} - a_{2n}q_{i2} - \dots - a_{n-1n}q_{in-1} \end{aligned}$$

с условиями

$$q_{i1}|_{x_n=x_1} = 0, \quad q_{i2}|_{x_2=\xi_2} = 0, \quad \dots, \quad q_{in-1}|_{x_{n-1}=\xi_{n-1}} = 0, \quad q_{in}|_{x_n=\xi_1} = r_{in}|_{x_n=\xi_1}. \tag{8}$$

Последнее условие в (8) можно записать в виде  $[h_{in}]|_{x_n=\xi_1} = 0$ , где  $[h_{in}]|_{x_n=\xi_1}$  – скачок функции  $h_{in}$  на плоскости  $x_n = \xi_1$ .

Строка с номером  $i$  в тождестве (7) имеет вид

$$\sum_{j=1}^n (r_{ij}u_j)_{x_j} = \sum_{j=1}^n r_{ij}f_j. \tag{9}$$

Проинтегрируем равенство (9) по области  $D^1$ :

$$\begin{aligned}
 & \iint_{D_1^1} r_{i1} u_1(\xi_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) d\alpha_n \dots d\alpha_2 - \iint_{X_1^1} r_{i1} u_1(0, \alpha_2, \dots, \alpha_n) d\alpha_n \dots d\alpha_2 + \\
 & \quad + \iint_{D_2^1} r_{i2} u_2(\alpha_1, \xi_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n) d\alpha_n \dots d\alpha_3 d\alpha_1 - \\
 & \quad - \iint_{X_2^1} r_{i2} u_2(\alpha_1, 0, \alpha_3, \dots, \alpha_n) d\alpha_n \dots d\alpha_3 d\alpha_1 + \dots \\
 & \dots + \iint_{D_{n-1}^1} r_{in-1} u_{n-1}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-2}, \xi_{n-1}, \alpha_n) d\alpha_n d\alpha_{n-2} \dots d\alpha_2 d\alpha_1 - \\
 & \quad - \iint_{X_{n-1}^1} r_{in-1} u_{n-1}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-2}, 0, \alpha_n) d\alpha_n d\alpha_{n-2} \dots d\alpha_2 d\alpha_1 + \\
 & \quad + \iint_{D_n^1} r_{in} u_n(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, \xi_n) d\alpha_{n-1} \dots d\alpha_2 d\alpha_1 - \\
 & \quad - \iint_{E^1} r_{in} u_n(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, \xi_1) d\alpha_{n-1} \dots d\alpha_2 d\alpha_1 = \\
 & \quad = \iint_{D^1} \sum_{j=1}^n (r_{ij} f_j)(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) d\alpha_n \dots d\alpha_2 d\alpha_1. \tag{10}
 \end{aligned}$$

Здесь у  $r_{ij}$  указаны только первые  $n$  аргументов, остальные везде  $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ .

В (10) интегралы по многообразиям  $D_j^1$ , согласно (6), обращаются в тождественный нуль, если  $i \neq j$ ; кроме того, в интеграле по  $D_i^1$   $r_{ii} \equiv 1$ ,  $i = \overline{1, n}$ .

Теперь проинтегрируем (9) по области  $D^2$ :

$$\begin{aligned}
 & \iint_S q_{i1} u_1(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_1) d\alpha_1 d\alpha_2 \dots d\alpha_{n-1} - \iint_{X_1^2} q_{i1} u_1(0, \alpha_2, \dots, \alpha_n) d\alpha_n \dots d\alpha_3 d\alpha_2 + \\
 & \quad + \iint_{D_2^2} q_{i2} u_2(\alpha_1, \xi_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n) d\alpha_n \dots d\alpha_3 d\alpha_1 - \\
 & \quad - \iint_{X_2^2} q_{i2} u_2(\alpha_1, 0, \alpha_3, \dots, \alpha_n) d\alpha_n \dots d\alpha_3 d\alpha_1 + \dots \\
 & \dots + \iint_{D_{n-1}^2} q_{in-1} u_{n-1}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-2}, \xi_{n-1}, \alpha_n) d\alpha_n d\alpha_{n-2} \dots d\alpha_2 d\alpha_1 - \\
 & \quad - \iint_{X_{n-1}^2} q_{in-1} u_{n-1}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-2}, 0, \alpha_n) d\alpha_n d\alpha_{n-2} \dots d\alpha_2 d\alpha_1 +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \iint_{E^2} q_{in} u_n(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, \xi_1) d\alpha_{n-1} \dots d\alpha_2 d\alpha_1 - \\
 & - \iint_S q_{in} u_n(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_1) d\alpha_{n-1} \dots d\alpha_2 d\alpha_1 = \\
 & = \iint_{D^2} \sum_{j=1}^n (r_{ij} f_j)(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) d\alpha_n \dots d\alpha_2 d\alpha_1. \tag{11}
 \end{aligned}$$

В (11) тоже у  $q_{ij}$  указаны только первые  $n$  аргументов, остальные  $n$  аргументов везде  $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ , и, согласно (8), интегралы по многообразиям  $D_j^1, j = \overline{2, n-1}$ , обращаются в тождественный ноль.

Складывая равенства (10) и (11) при  $i = \overline{1, n}$ , будем иметь

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{\xi_1} \int_0^{\xi_2} \dots \int_0^{\xi_{i-1}} \int_0^{\xi_{i+1}} \dots \int_0^{\xi_{n-1}} \int_{\xi_1}^{\xi_n} u_i(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{i-1}, \xi_i, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n) d\alpha_n d\alpha_{n-1} \dots \\
 & \dots d\alpha_{i+1} d\alpha_{i-1} \dots d\alpha_2 d\alpha_1 = \iint_{X_1^1 + X_1^2} h_{i1} u_1 d\alpha_n d\alpha_{n-1} \dots d\alpha_2 + \iint_{X_2^1 + X_2^2} h_{i2} u_2 d\alpha_n \dots d\alpha_3 d\alpha_1 + \dots \\
 & \dots + \iint_{X_{i-1}^1 + X_{i-1}^2} h_{i, i-1} u_{i-1} d\alpha_n \dots d\alpha_i d\alpha_{i-2} \dots d\alpha_1 + \\
 & + \iint_{X_{i+1}^1 + X_{i+1}^2} h_{i, i+1} u_{i+1} d\alpha_n \dots d\alpha_{i+2} d\alpha_i \dots d\alpha_1 + \\
 & + \iint_{X_{n-1}^1 + X_{n-1}^2} h_{i, n-1} u_{n-1} d\alpha_n d\alpha_{n-2} \dots d\alpha_2 d\alpha_1 + \iint_S h_{in} u_n d\alpha_{n-1} d\alpha_{n-2} \dots d\alpha_2 d\alpha_1 + \\
 & + \iint_{D^1 + D^2} \sum_{j=1}^n h_{ij} f_j d\alpha_n d\alpha_{n-1} \dots d\alpha_2 d\alpha_1, \quad i = \overline{1, n-1}, \tag{12}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{\xi_1} \int_0^{\xi_2} \dots \int_0^{\xi_{n-1}} u_n(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, \xi_n) d\alpha_{n-1} \dots d\alpha_2 d\alpha_1 = \\
 & = \iint_{X_1^1 + X_1^2} h_{n1} u_1 d\alpha_n d\alpha_{n-1} \dots d\alpha_2 + \iint_{X_2^1 + X_2^2} h_{n2} u_2 d\alpha_n \dots d\alpha_3 d\alpha_1 + \dots \\
 & \dots + \iint_{X_{n-1}^1 + X_{n-1}^2} h_{n, n-1} u_{n-1} d\alpha_n d\alpha_{n-2} \dots d\alpha_2 d\alpha_1 + \iint_S h_{nn} u_n d\alpha_{n-1} d\alpha_{n-2} \dots d\alpha_2 d\alpha_1 + \\
 & + \iint_{D^1 + D^2} \sum_{j=1}^n h_{nj} f_j d\alpha_n d\alpha_{n-1} \dots d\alpha_2 d\alpha_1. \tag{13}
 \end{aligned}$$

Правые части формул (12), (13) считаем известными функциями, поскольку они выражаются через элементы матрицы Римана–Адамара и данные задачи Дарбу.

Продифференцировав (12) и (13), получим

$$u_i(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = \frac{\partial^{n-1} F_i(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)}{\partial \xi_1 \partial \xi_2 \dots \partial \xi_{i-1} \partial \xi_{i+1} \dots \partial \xi_{n-1} \partial \xi_n}, \quad i = \overline{1, n-1},$$

$$u_n(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = \frac{\partial^{n-1} F_n(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)}{\partial \xi_1 \partial \xi_2 \dots \partial \xi_{n-1}}, \quad (14)$$

где  $F_k$  – соответствующие правые части формул (12), (13). Соотношения (14) представляют собой решение задачи Дарбу (1), (2) в терминах матрицы Римана–Адамара  $\mathbf{H}$ .

**2. Пример.** В качестве примера реализации описанного выше метода построения решения задачи Дарбу рассмотрим гиперболическую систему четвёртого порядка

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^4 a_{ij}(x_1, x_2, x_3, x_4) u_j + f_i(x_1, x_2, x_3, x_4), \quad i = \overline{1, 4}. \quad (15)$$

Как и выше, считаем, что выполняются условия  $a_{ii} \equiv 0, \quad i = \overline{1, 4}$ .

**Задача Дарбу для системы четвёртого порядка.** В области  $D$  найти регулярное решение системы (15), удовлетворяющее граничным условиям

$$u_i|_{\overline{X}_i} = \varphi_i, \quad i = \overline{1, 3}, \quad u_4|_{\overline{T}} = \psi, \quad (16)$$

$$\varphi_i \in C(\overline{X}_i), \quad \psi \in C(\overline{T}),$$

где функции  $\varphi_i$  зависят от всех независимых переменных, кроме  $x_i$ , а  $\psi = \psi(x_1, x_2, x_3)$ .

Считаем, что все условия гладкости, указанные для задачи (1), (2), выполняются. Из сформулированной выше теоремы вытекает, что решение задачи Дарбу для системы четвёртого порядка существует и единственно.

Запишем (15) в векторно-матричной форме:

$$L(\mathbf{U}) = \mathbf{F}, \quad L(\mathbf{U}) \equiv \sum_{i=1}^4 \mathbf{A}_i \mathbf{U}_{x_i} - \mathbf{B} \mathbf{U}, \quad \mathbf{U} = \text{colon}(u_1, u_2, u_3, u_4), \quad (17)$$

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \text{colon}(f_1, f_2, f_3, f_4).$$

Матрица Римана в данном случае имеет вид

$$\mathbf{R} = \text{colon}(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{R}_3, \mathbf{R}_4),$$

где  $\mathbf{R}_i(x_1, x_2, x_3, x_4, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) = (r_{i1}, r_{i2}, r_{i3}, r_{i4}), \quad i = \overline{1, 4}$ , являются решениями систем

$$r_{i1}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \delta_{i1} - \int_{\xi_1}^{x_1} (a_{21} r_{i2} + a_{31} r_{i3} + a_{41} r_{i4})(\alpha_1, x_2, x_3, x_4) d\alpha_1,$$

$$r_{i2}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \delta_{i2} - \int_{\xi_2}^{x_2} (a_{12} r_{i1} + a_{32} r_{i3} + a_{42} r_{i4})(x_1, \alpha_2, x_3, x_4) d\alpha_2,$$

$$\begin{aligned}
 r_{i3}(x_1, x_2, x_3, x_4) &= \delta_{i3} - \int_{\xi_3}^{x_3} (a_{13}r_{i1} + a_{23}r_{i2} + a_{43}r_{i4})(x_1, x_2, \alpha_3, x_4) d\alpha_3, \\
 r_{i4}(x_1, x_2, x_3, x_4) &= \delta_{i4} - \int_{\xi_4}^{x_4} (a_{14}r_{i1} + a_{24}r_{i2} + a_{34}r_{i3})(x_1, x_2, x_3, \alpha_4) d\alpha_4,
 \end{aligned} \tag{18}$$

$\delta_{ij}$  – символ Кронекера. Решения систем (18) при каждом  $i$  существуют и единственны в классе непрерывных функций. По первым четырём аргументам  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$  матрица  $\mathbf{R}$  удовлетворяет сопряжённой к (17) системе

$$L^*(\mathbf{V}) = 0, \quad L^*(\mathbf{V}) \equiv - \sum_{i=1}^4 (\mathbf{A}_i \mathbf{V})_{x_i} - \mathbf{B}\mathbf{U}.$$

Из систем (18) следует выполнение тождеств

$$r_{ij}(x_1, x_2, x_3, x_4, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)|_{x_j=\xi_j} \equiv \begin{cases} 1, & j = i, \\ 0, & j \neq i. \end{cases} \tag{19}$$

Условие (7) принимает вид

$$\mathbf{R}\mathbf{L}(\mathbf{U}) = (\mathbf{R}\mathbf{A}_1\mathbf{U})_{x_1} + (\mathbf{R}\mathbf{A}_2\mathbf{U})_{x_2} + (\mathbf{R}\mathbf{A}_3\mathbf{U})_{x_3} + (\mathbf{R}\mathbf{A}_4\mathbf{U})_{x_4}. \tag{20}$$

Перейдём к построению решения задачи Дарбу для системы четвёртого порядка. Возьмём внутри области  $D$  произвольную точку  $P(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ . Проведём через неё плоскости, параллельные осям координат. Получаем область  $D_P$ , ограниченную плоскостями  $X_i, i = \overline{1, 3}, x_i = \xi_i, i = \overline{1, 4}$ , а также плоскостью  $T$ . Плоскость  $x_4 = \xi_1$  разбивает область  $D_P$  на две части:  $D^1$  (отвечает условию  $x_4 > \xi_1$  и определяется неравенствами  $0 < x_1 < \xi_1, 0 < x_2 < \xi_2, 0 < x_3 < \xi_3, \xi_1 < x_4 < \xi_4$ ) и  $D^2$  (соответствует условию  $x_4 < \xi_1$  и может быть задана двумя системами неравенств:

- 1)  $0 < x_1 < \xi_1, 0 < x_2 < \xi_2, 0 < x_3 < \xi_3, x_1 < x_4 < \xi_1$ ;
- 2)  $0 < x_1 < x_4, 0 < x_2 < \xi_2, 0 < x_3 < \xi_3, 0 < x_4 < \xi_1$ .

Обозначим пересечение замыкания области  $D^1$  с плоскостями  $X_i, i = \overline{1, 3}$ , через  $X_i^1$ , с плоскостью  $x_4 = \xi_1$  – через  $E^1$ , с плоскостями  $x_i = \xi_i$  – через  $D_i^1, i = \overline{1, 4}$ . Аналогично обозначим пересечение замыкания области  $D^2$  с плоскостями  $X_i, i = \overline{1, 3}$ , через  $X_i^2$ , с плоскостью  $x_4 = \xi_1$  – через  $E^2$ , с плоскостью  $T$  – через  $S$ , с плоскостями  $x_i = \xi_i$  – через  $D_i^2, i = 2, 3$ .

Матрица Римана–Адамара задачи Дарбу имеет вид

$$\mathbf{H}(x_1, x_2, x_3, x_4, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) = (h_{ij}), \quad i, j = \overline{1, 4},$$

при этом

$$\mathbf{H}(x_1, x_2, x_3, x_4, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) = \begin{cases} \mathbf{R}(x_1, x_2, x_3, x_4, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4), & (x_1, x_2, x_3, x_4) \in D^1, \\ \mathbf{Q}(x_1, x_2, x_3, x_4, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4), & (x_1, x_2, x_3, x_4) \in D^2. \end{cases} \tag{21}$$

Здесь  $\mathbf{Q} = \text{colon}(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, \mathbf{Q}_3, \mathbf{Q}_4)$ , где вектор-функции  $\mathbf{Q}_i = (q_{i1}, q_{i2}, q_{i3}, q_{i4})$  являются решениями задачи Дарбу в  $D^2$  для сопряжённой системы

$$\begin{aligned}
 q_{i1x_1} &= -a_{21}q_{i2} - a_{31}q_{i3} - a_{41}q_{i4}, & q_{i2x_2} &= -a_{12}q_{i1} - a_{32}q_{i3} - a_{42}q_{i4}, \\
 q_{i3x_3} &= -a_{13}q_{i1} - a_{23}q_{i2} - a_{43}q_{i4}, & q_{i4x_4} &= -a_{14}q_{i1} - a_{24}q_{i2} - a_{34}q_{i3}
 \end{aligned}$$

с условиями

$$q_{i1}|_{x_4=x_1} = 0, \quad q_{i2}|_{x_2=\xi_2} = 0, \quad q_{i3}|_{x_3=\xi_3} = 0, \quad q_{i4}|_{x_4=\xi_1} = r_{i4}|_{x_4=\xi_1}. \quad (22)$$

Последнее условие в (22) можно записать в виде  $[h_{i4}]|_{x_4=\xi_1} = 0$ , где  $[h_{i4}]|_{x_4=\xi_1}$  – скачок функции  $h_{i4}$  на плоскости  $x_4 = \xi_1$ .

Строка с номером  $i$  в (20) имеет вид

$$(r_{i1}u_1)_{x_1} + (r_{i2}u_2)_{x_2} + (r_{i3}u_3)_{x_3} + (r_{i4}u_4)_{x_4} = r_{i1}f_1 + r_{i2}f_2 + r_{i3}f_3 + r_{i4}f_4. \quad (23)$$

Проинтегрируем тождество (23) по области  $D^1$ :

$$\begin{aligned} & \iint_{D_1^1} r_{i1}u_1(\xi_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) d\alpha_4 d\alpha_3 d\alpha_2 - \iint_{X_1^1} r_{i1}u_1(0, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) d\alpha_4 d\alpha_3 d\alpha_2 + \\ & + \iint_{D_2^1} r_{i2}u_2(\alpha_1, \xi_2, \alpha_3, \alpha_4) d\alpha_4 d\alpha_3 d\alpha_1 - \iint_{X_2^1} r_{i2}u_2(\alpha_1, 0, \alpha_3, \alpha_4) d\alpha_4 d\alpha_3 d\alpha_1 + \\ & + \iint_{D_3^1} r_{i3}u_3(\alpha_1, \alpha_2, \xi_3, \alpha_4) d\alpha_4 d\alpha_2 d\alpha_1 - \iint_{X_3^1} r_{i3}u_3(\alpha_1, \alpha_2, 0, \alpha_4) d\alpha_4 d\alpha_2 d\alpha_1 + \\ & + \iint_{D_4^1} r_{i4}u_4(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \xi_4) d\alpha_3 d\alpha_2 d\alpha_1 - \iint_{E^1} r_{i4}u_4(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \xi_1) d\alpha_3 d\alpha_2 d\alpha_1 = \\ & = \iint_{D^1} (r_{i1}f_1 + r_{i2}f_2 + r_{i3}f_3 + r_{i4}f_4)(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) d\alpha_4 d\alpha_3 d\alpha_2 d\alpha_1. \quad (24) \end{aligned}$$

Здесь у  $r_{ij}$  указаны только первые четыре аргумента, остальные четыре аргумента везде  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ . В (24), согласно (19), первые слагаемые в каждой строке обращаются в тождественный нуль, если  $i \neq j$ ; если же  $i = j$ , то  $r_{ij} \equiv 1$ .

Теперь проинтегрируем (23) по области  $D^2$ :

$$\begin{aligned} & \iint_S q_{i1}u_1(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_1) d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3 - \iint_{X_1^2} q_{i1}u_1(0, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) d\alpha_4 d\alpha_3 d\alpha_2 + \\ & + \iint_{D_2^2} q_{i2}u_2(\alpha_1, \xi_2, \alpha_3, \alpha_4) d\alpha_4 d\alpha_3 d\alpha_1 - \iint_{X_2^2} q_{i2}u_2(\alpha_1, 0, \alpha_3, \alpha_4) d\alpha_4 d\alpha_3 d\alpha_1 + \\ & + \iint_{D_3^2} q_{i3}u_3(\alpha_1, \alpha_2, \xi_3, \alpha_4) d\alpha_4 d\alpha_2 d\alpha_1 - \iint_{X_3^2} q_{i3}u_3(\alpha_1, \alpha_2, 0, \alpha_4) d\alpha_4 d\alpha_2 d\alpha_1 + \\ & + \iint_{E^2} q_{i4}u_4(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \xi_1) d\alpha_3 d\alpha_2 d\alpha_1 - \iint_S q_{i4}u_4(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_1) d\alpha_3 d\alpha_2 d\alpha_1 = \\ & = \iint_{D^2} (q_{i1}f_1 + q_{i2}f_2 + q_{i3}f_3 + q_{i4}f_4)(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) d\alpha_4 d\alpha_3 d\alpha_2 d\alpha_1. \quad (25) \end{aligned}$$

Здесь снова у  $q_{ij}$  указаны только первые четыре аргумента, остальные четыре аргумента везде  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ . В (25), согласно (22), первые слагаемые в первых трёх строках обращаются в тождественный нуль.

Складывая (24) и (25) при  $i = \overline{1, 4}$ , получаем

$$\begin{aligned} \int_0^{\xi_2} \int_0^{\xi_3} \int_{\xi_1}^{\xi_4} u_1(\xi_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) d\alpha_4 d\alpha_3 d\alpha_2 &= \iint_{X_1^1 + X_1^2} h_{11} u_1 d\alpha_4 d\alpha_3 d\alpha_2 + \iint_{X_2^1 + X_2^2} h_{12} u_2 d\alpha_4 d\alpha_3 d\alpha_1 + \\ &+ \iint_{X_3^1 + X_3^2} h_{13} u_3 d\alpha_4 d\alpha_2 d\alpha_1 + \iint_S h_{14} u_4 d\alpha_3 d\alpha_2 d\alpha_1 + \iint_{D^1 + D^2} \sum_{i=1}^4 h_{1i} f_i d\alpha_4 d\alpha_3 d\alpha_2 d\alpha_1, \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\xi_1} \int_0^{\xi_3} \int_{\xi_1}^{\xi_4} u_2(\alpha_1, \xi_2, \alpha_3, \alpha_4) d\alpha_4 d\alpha_3 d\alpha_1 &= \iint_{X_1^1 + X_1^2} h_{21} u_1 d\alpha_4 d\alpha_3 d\alpha_2 + \iint_{X_2^1 + X_2^2} h_{22} u_2 d\alpha_4 d\alpha_3 d\alpha_1 + \\ &+ \iint_{X_3^1 + X_3^2} h_{23} u_3 d\alpha_4 d\alpha_2 d\alpha_1 + \iint_S h_{24} u_4 d\alpha_3 d\alpha_2 d\alpha_1 + \iint_{D^1 + D^2} \sum_{i=1}^4 h_{2i} f_i d\alpha_4 d\alpha_3 d\alpha_2 d\alpha_1, \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\xi_1} \int_0^{\xi_2} \int_{\xi_1}^{\xi_4} u_3(\alpha_1, \alpha_2, \xi_3, \alpha_4) d\alpha_4 d\alpha_2 d\alpha_1 &= \iint_{X_1^1 + X_1^2} h_{31} u_1 d\alpha_4 d\alpha_3 d\alpha_2 + \iint_{X_2^1 + X_2^2} h_{32} u_2 d\alpha_4 d\alpha_3 d\alpha_1 + \\ &+ \iint_{X_3^1 + X_3^2} h_{33} u_3 d\alpha_4 d\alpha_2 d\alpha_1 + \iint_S h_{34} u_4 d\alpha_3 d\alpha_2 d\alpha_1 + \iint_{D^1 + D^2} \sum_{i=1}^4 h_{3i} f_i d\alpha_4 d\alpha_3 d\alpha_2 d\alpha_1, \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\xi_1} \int_0^{\xi_2} \int_0^{\xi_3} u_4(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \xi_4) d\alpha_3 d\alpha_2 d\alpha_1 &= \iint_{X_1^1 + X_1^2} h_{41} u_1 d\alpha_4 d\alpha_3 d\alpha_2 + \iint_{X_2^1 + X_2^2} h_{42} u_2 d\alpha_4 d\alpha_3 d\alpha_1 + \\ &+ \iint_{X_3^1 + X_3^2} h_{43} u_3 d\alpha_4 d\alpha_2 d\alpha_1 + \iint_S h_{44} u_4 d\alpha_3 d\alpha_2 d\alpha_1 + \iint_{D^1 + D^2} \sum_{i=1}^4 h_{4i} f_i d\alpha_4 d\alpha_3 d\alpha_2 d\alpha_1. \end{aligned} \quad (29)$$

Правые части равенств (26)–(29), которые обозначим через  $F_k$ ,  $k = \overline{1, 4}$ , известны, поскольку выражаются через элементы матрицы Римана–Адамара и данные задачи Дарбу.

Продифференцировав (26)–(29), получим

$$\begin{aligned} u_1(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) &= \frac{\partial^3 F_1(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)}{\partial \xi_2 \partial \xi_3 \partial \xi_4}, & u_2(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) &= \frac{\partial^3 F_2(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)}{\partial \xi_1 \partial \xi_3 \partial \xi_4}, \\ u_3(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) &= \frac{\partial^3 F_3(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)}{\partial \xi_1 \partial \xi_2 \partial \xi_4}, & u_4(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) &= \frac{\partial^3 F_4(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)}{\partial \xi_1 \partial \xi_2 \partial \xi_3}. \end{aligned} \quad (30)$$

Это решение задачи Дарбу (15), (16) в терминах матрицы Римана–Адамара (21).

Работа выполнена за счёт средств Программы стратегического академического лидерства Казанского (Приволжского) федерального университета.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных. М., 1981.
2. Моисеев Е.И. Уравнения смешанного типа со спектральным параметром. М., 1988.
3. Сабитов К.Б., Шарифутдинова Г.Г. Задачи Коши–Гурса для вырождающегося гиперболического уравнения // Изв. вузов. Математика. 2003. № 5. С. 21–29.
4. Джозадзе О.М., Харибегашвили С.С. Некоторые свойства функций Римана и Римана–Адамара для линейных гиперболических уравнений второго порядка и их приложения // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47. № 4. С. 477–492.
5. Миронов А.Н. Задача Дарбу для уравнения Бианки третьего порядка // Мат. заметки. 2017. Т. 102. Вып. 1. С. 64–71.
6. Миронов А.Н. Задача Дарбу для уравнения Бианки четвёртого порядка // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 3. С. 349–363.
7. Бицадзе А.В. О структурных свойствах решений гиперболических систем уравнений с частными производными // Мат. моделирование. 1994. Т. 6. № 6. С. 22–31.
8. Чекмарев Т.В. Формулы решения задачи Гурса для одной линейной системы уравнений с частными производными // Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18. № 9. С. 1614–1622.
9. Mironova L.V. Boundary-value problems with data on characteristics for hyperbolic systems of equations // Lobachevskii J. of Math. 2020. V. 41. № 3. P. 400–406.
10. Миронов А.Н., Миронова Л.Б. Метод Римана–Адамара для одной системы в трёхмерном пространстве // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 8. С. 1063–1070.
11. Миронова Л.Б. О методе Римана в  $\mathbb{R}^n$  для одной системы с кратными характеристиками // Изв. вузов. Математика. 2006. № 1. С. 34–39.

Самарский государственный  
технический университет,  
Елабужский институт (филиал)  
Казанского (Приволжского)  
федерального университета

Поступила в редакцию 02.02.2023 г.  
После доработки 02.02.2023 г.  
Принята к публикации 16.03.2023 г.