ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 5, с. 658–674

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.958

О СУЩЕСТВОВАНИИ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ ОБОЛОЧЕК ТИПА ТИМОШЕНКО В ИЗОМЕТРИЧЕСКИХ КООРДИНАТАХ

© 2023 г. С. Н. Тимергалиев

Доказывается существование решений краевой задачи для системы пяти нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка при заданных нелинейных граничных условиях, описывающей состояние равновесия упругих пологих неоднородных изотропных оболочек с незакреплёнными краями в рамках сдвиговой модели Тимошенко, отнесённых к изометрическим координатам. Краевая задача сводится к нелинейному операторному уравнению относительно обобщённых перемещений в соболевском пространстве, разрешимость которого устанавливается с использованием принципа сжатых отображений.

DOI: 10.31857/S0374064123050102, EDN: CYVKAG

1. Постановка задачи. В плоской односвязной ограниченной области Ω рассматривается система нелинейных дифференциальных уравнений вида

$$(DT^{j\lambda})_{\alpha^\lambda} + DG^j_{\lambda\mu}T^{\lambda\mu} + DR^j = 0, \quad j = 1, 2,$$

$$(DT^{\lambda\mu}w_{3\alpha^\mu})_{\alpha^\lambda} + (DT^{\lambda 3})_{\alpha^\lambda} + DB_{\lambda\mu}T^{\lambda\mu} + DR^3 = 0,$$

$$(DM^{j\lambda})_{\alpha^\lambda} - DT^{j3} + DG^j_{\lambda\mu}M^{\lambda\mu} + DL^j = 0, \quad j = 1, 2, \tag{1}$$

при выполнении на границе Γ области Ω условий

$$D(T^{j1}\,d\alpha^2/ds - T^{j2}\,d\alpha^1/ds) = P^j(s), \quad j = 1, 2,$$

$$D(T^{13}\,d\alpha^2/ds - T^{23}\,d\alpha^1/ds + T^{1\lambda}w_{3\alpha^\lambda}\,d\alpha^2/ds - T^{2\lambda}w_{3\alpha^\lambda}\,d\alpha^1/ds) = P^3(s),$$

$$D(M^{j1}\,d\alpha^2/ds - M^{j2}\,d\alpha^1/ds) = N^j(s), \quad j = 1, 2. \tag{2}$$

В (1), (2) и ниже используются следующие обозначения:

$$T^{ij} \equiv T^{ij}(\gamma) = D^{ijkn}_{\lambda-1}\gamma^{\lambda-1}_{kn}, \quad M^{ij} \equiv M^{ij}(\gamma) = D^{ijkn}_{\lambda}\gamma^{\lambda-1}_{kn},$$

$$\gamma = (\gamma^0, \gamma^1), \quad \gamma^k = (\gamma^k_{11}, \gamma^k_{12}, \gamma^k_{13}, \gamma^k_{22}, \gamma^k_{23}, \gamma^k_{33}), \quad k = 0, 1;$$

$$D^{ijkn}_m = D^{ijkn}_m(\alpha^1, \alpha^2) = \int\limits_{-h_0/2}^{h_0/2} B^{ijkn}(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3)(\alpha^3)^m\,d\alpha^3, \quad m = \overline{0, 2}, \quad i, j, k, n = 1, 2, 3;$$

$$B^{1111} = B^{2222} = \frac{E}{1-\nu^2}, \quad B^{1122} = \frac{\nu E}{1-\nu^2}, \quad B^{1212} = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad B^{1313} = B^{2323} = \frac{E\kappa^2}{2(1+\nu)};$$

$$\gamma^0_{jj} = w_{j\alpha^j} - G^\lambda_{jj}w_\lambda - B_{jj}w_3 + w^2_{3\alpha^j}/2, \quad j = 1, 2,$$

$$\gamma^0_{12} = w_{1\alpha^2} + w_{2\alpha^1} - 2G^\lambda_{12}w_\lambda - 2B_{12}w_3 + w_{3\alpha^1}w_{3\alpha^2}, \quad \gamma^1_{jj} = \psi_{j\alpha^j} - G^\lambda_{jj}\psi_\lambda, \quad j = 1, 2,$$

$$\gamma^1_{12} = \psi_{1\alpha^2} + \psi_{2\alpha^1} - 2G^\lambda_{12}\psi_\lambda, \quad \gamma^0_{j3} = w_{3\alpha^j} + \psi_j, \quad j = 1, 2, \quad \gamma^0_{33} = \gamma^1_{k3} \equiv 0, \quad k = 1, 2, 3; \tag{3}$$

остальные B^{ijkn} равны нулю, $\alpha^j = \alpha^j(s)$, $j = 1, 2,$ – уравнения кривой Γ, s – длина дуги Γ; нижний индекс α^λ в (1)–(3) и далее означает дифференцирование по α^λ, $\lambda = 1, 2$.

Если выражения T^{ij}, M^{ij} из (3) подставить в систему (1), то относительно функций w_1, w_2, w_3, ψ_1, ψ_2 получим систему пяти дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка, линейных относительно w_1, w_2, ψ_1, ψ_2 и нелинейных относительно w_3. Совместно с граничными условиями (2) система (1) описывает состояние равновесия упругой пологой изотропной неоднородной оболочки с незакреплёнными краями в рамках сдвиговой модели Тимошенко [1, с. 168–170, 269], отнесённой к криволинейной системе координат. При этом T^{ij} – усилия, M^{ij} – моменты; γ_{ij}^k, $i, j = 1, 2, 3$, $k = 0, 1,$ – компоненты деформаций срединной поверхности S_0 оболочки гомеоморфной области Ω; w_j, $j = 1, 2$, и w_3 – соответственно тангенциальные и нормальное перемещения точек S_0; ψ_i, $i = 1, 2,$ – углы поворота нормальных сечений S_0; B_{ij}, $i, j = 1, 2,$ – составляющие тензора кривизны поверхности S_0, G_{ij}^λ – символы Кристоффеля, которые в изометрической системе координат даются формулами [2, с. 18]

$$G_{jj}^1 = (-1)^{j-1}\Lambda_{\alpha^1}/(2\Lambda), \quad G_{jj}^2 = (-1)^j\Lambda_{\alpha^2}/(2\Lambda), \quad G_{12}^j = G_{21}^j = \Lambda_{\alpha^{3-j}}/(2\Lambda), \quad j = 1, 2; \tag{4}$$

R^j, P^j, $j = 1, 2, 3$, L^k, N^k, $k = 1, 2,$ – компоненты внешних сил, действующих на оболочку; ν – коэффициент Пуассона, E – модуль Юнга, κ^2 – коэффициент сдвига, $D = D(\alpha^1, \alpha^2) = \sqrt{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}$ – якобиан (A_{ij} – коэффициенты первой квадратичной формы поверхности S_0; в изометрических координатах $A_{11} = A_{22} = \Lambda(\alpha^1, \alpha^2)$, $A_{12} = 0$ и $D = \Lambda$), $h_0 = \mathrm{const}$ – толщина оболочки; α^1, α^2 – декартовы координаты точек области Ω.

В (1)–(3) и в дальнейшем по повторяющимся латинским индексам ведётся суммирование от 1 до 3, по повторяющимся греческим индексам – от 1 до 2.

Задача (1), (2). Требуется найти решение системы (1), удовлетворяющее граничным условиям (2).

В настоящее время достаточно полно изучена разрешимость краевых задач для дифференциальных уравнений, описывающих состояние равновесия оболочек в рамках простейшей модели Кирхгофа–Лява [2–5]. В то же время актуальной задачей является исследование подобных краевых задач в рамках более сложных моделей теории оболочек, не опирающихся на гипотезы Кирхгофа–Лява [2, с. 349]. Имеется ряд работ [6–13], в которых в рамках сдвиговой модели Тимошенко исследована разрешимость и доказаны теоремы существования обобщённых решений в соболевских пространствах нелинейных задач для пологих оболочек, отнесённых к евклидовой системе координат. В основе исследований в [6–13] лежат интегральные представления для обобщённых перемещений, содержащие произвольные голоморфные функции, которые находятся таким образом, чтобы обобщённые перемещения удовлетворяли заданным граничным условиям.

В данной статье метод работ [6–13] развивается на случай пологих неоднородных изотропных оболочек типа Тимошенко, отнесённых к изометрической системе координат. Переход к изометрическим координатам, с одной стороны, расширяет класс рассматриваемых оболочек, а с другой – существенно усложняет систему дифференциальных уравнений.

Краевую задачу (1), (2) будем изучать в обобщённой постановке. Пусть выполнены следующие условия:

(a) имеют место включения

$$B^{ijkn}(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3) \in (W_p^{(1)}(\Omega) \bigcap C_\beta(\overline{\Omega})) \times L_1[-h_0/2, h_0/2], \quad i, j, k, n = 1, 2, 3,$$

$$B_{\lambda\mu}(\alpha^1, \alpha^2) \in W_p^{(2)}(\Omega), \quad \lambda, \mu, k = 1, 2;$$

(b) якобиан $D = \Lambda(\alpha^1, \alpha^2) > 0$ в $\overline{\Omega}$ и имеет место включение $\Lambda(\alpha^1, \alpha^2) \in W_p^{(4)}(\Omega)$;

(c) компоненты внешних сил R^j, $j = 1, 2, 3$, и L^k, $k = 1, 2$, принадлежат пространству $L_p(\Omega)$, а компоненты P^j, $j = 1, 2, 3$, N^k, $k = 1, 2,$ – пространству $C_\beta(\Gamma)$; внешние силы самоуравновешены;

(d) Ω – произвольная односвязная область с границей $\Gamma \in C_\beta^1$.

Здесь и далее $2 < p < 4/(2 - \beta)$, $0 < \beta < 1$.

Определение. Назовём вектор обобщённых перемещений $a = (w_1, w_2, w_3, \psi_1, \psi_2)$ *обобщённым решением задачи* (1), (2), если a принадлежит пространству $W_p^{(2)}(\Omega)$, почти всюду удовлетворяет системе (1) и поточечно граничным условиям (2).

Обозначим $W_p^{(j)}(\Omega)$ – пространства Соболева. В силу теорем вложения для соболевских пространств $W_p^{(2)}(\Omega)$ с $p > 2$ обобщённое решение a принадлежит пространству $C_\alpha^1(\bar{\Omega})$. Здесь и везде далее $\alpha = (p-2)/p$. Заметим, что при $2 < p < 4/(2-\beta)$ справедливо неравенство $\alpha < \beta/2$.

Соотношения для компонент деформаций в (3) для удобства в дальнейших исследованиях запишем в виде

$$\gamma_{ij}^k = e_{sij}^k + e_{cij}^k + \chi_{ij}^k, \quad i,j = 1,2,3, \quad k = 0,1, \tag{5}$$

где приняты обозначения

$$e_{sjj}^0 = w_{j\alpha^j}, \quad e_{sj3}^0 = \gamma_{j3}^0, \quad e_{sjj}^1 = \psi_{j\alpha^j}, \quad j = 1,2, \quad e_{s12}^0 = w_{1\alpha^2} + w_{2\alpha^1}, \quad e_{s12}^1 = \psi_{1\alpha^2} + \psi_{2\alpha^1},$$

$$e_{cjj}^0 = -G_{jj}^\lambda w_\lambda - B_{jj} w_3, \quad e_{cjj}^1 = -G_{jj}^\lambda \psi_\lambda, \quad j = 1,2, \quad e_{c12}^0 = -2G_{12}^\lambda w_\lambda - 2B_{12} w_3,$$

$$e_{c12}^1 = -2G_{12}^\lambda \psi_\lambda, \quad \chi_{jj}^0 = w_{3\alpha^j}^2/2, \quad j = 1,2, \quad \chi_{12}^0 = w_{3\alpha^1} w_{3\alpha^2},$$

$$\chi_{ij}^1 = \chi_{j3}^0 = e_{s33}^0 = e_{sj3}^1 = e_{cj3}^k \equiv 0, \quad i,j = 1,2,3, \quad k = 0,1. \tag{6}$$

2. Построение интегральных представлений для обобщённых перемещений. Введём в рассмотрение две комплексные функции:

$$\omega_j = \omega_j(z) = D\{D_{j-1}^{1111}(w_{1\alpha^1} + w_{2\alpha^2}) + D_j^{1111}(\psi_{1\alpha^1} + \psi_{2\alpha^2}) +$$
$$+ i[D_{j-1}^{1212}(w_{2\alpha^1} - w_{1\alpha^2}) + D_j^{1212}(\psi_{2\alpha^1} - \psi_{1\alpha^2})]\}, \quad j = 1,2, \quad z = \alpha^1 + i\alpha^2. \tag{7}$$

В системе (1) усилия T^{jk}, моменты M^{jk} и компоненты деформаций γ_{jk}^n заменим их выражениями из (3), (5). Прибавляя после этого к первому уравнению в (1) второе, умноженное на мнимую единицу i, а к четвёртому уравнению – пятое, умноженное также на i, систему (1) при помощи функций $\omega_j(z)$ из (7) представим в удобной для дальнейших исследований форме

$$\omega_{j\bar{z}} + h^j(a) = f_c^j(a) + f_\chi^j(a) - F^j(z), \quad j = 1,2,$$
$$DD_0^{1313}(w_{3\alpha^1\alpha^1} + w_{3\alpha^2\alpha^2}) + h^3(a) = f_c^3(a) + f_\chi^3(a) - F^3(z), \quad z \in \Omega, \tag{8}$$

где приняты следующие обозначения:

$$\omega_{j\bar{z}} = (\omega_{j\alpha^1} + i\omega_{j\alpha^2})/2, \quad j = 1,2,$$

$$h^j(a) = (-1)^{\mu-1}[(DD_{j+\lambda-2}^{1212})_{\alpha^{3-\mu}} \nu_{\lambda 2\alpha^\mu} + i(DD_{j+\lambda-2}^{1212})_{\alpha^\mu} \nu_{\lambda 1\alpha^{3-\mu}}] - (j-1)DD_0^{1313}(\gamma_{13}^0 + i\gamma_{23}^0)/2,$$

$$\nu_{1j} = w_j, \quad \nu_{2j} = \psi_j, \quad j = 1,2; \quad h^3(a) = (DD_0^{1313})_{\alpha^\lambda} w_{3\alpha^\lambda} + (DD_0^{1313}\psi_\lambda)_{\alpha^\lambda};$$

$$f_c^j(a) = (f_{c3j-2} + if_{c3j-1})/2, \quad f_\chi^j(a) = (f_{\chi 3j-2} + if_{\chi 3j-1})/2, \quad j = 1,2,$$

$$f_c^3(a) = f_{c3}(a), \quad f_\chi^3(a) = f_{\chi 3}(a), \quad f_{cj}(a) = -(DT^{j\lambda}(e_c))_{\alpha^\lambda} - DG_{\lambda\mu}^j T^{\lambda\mu}(e),$$

$$f_{c3+j}(a) = -(DM^{j\lambda}(e_c))_{\alpha^\lambda} - DG_{\lambda\mu}^j M^{\lambda\mu}(e), \quad f_{\chi j}(a) = -(DT^{j\lambda}(\chi))_{\alpha^\lambda} - DG_{\lambda\mu}^j T^{\lambda\mu}(\chi),$$

$$f_{\chi 3+j}(a) = -(DM^{j\lambda}(\chi))_{\alpha^\lambda} - DG_{\lambda\mu}^j M^{\lambda\mu}(\chi), \quad j = 1,2,$$

$$f_{c3}(a) = -DB_{\lambda\mu} T^{\lambda\mu}(e), \quad f_{\chi 3}(a) = -(DT^{\lambda\mu} w_{3\alpha^\lambda})_{\alpha^\mu} - DB_{\lambda\mu} T^{\lambda\mu}(\chi),$$

$$F^1 = D(R^1 + iR^2)/2, \quad F^2 = D(L^1 + iL^2)/2, \quad F^3 = DR^3;$$

$$e = e_s + e_c, \quad e_s = (e_s^0, e_s^1), \quad e_c = (e_c^0, e_c^1), \quad e_s^k = (e_{s11}^k, e_{s12}^k, e_{s13}^k, e_{s22}^k, e_{s23}^k, e_{s33}^k),$$
$$e_c^k = (e_{c11}^k, e_{c12}^k, e_{c13}^k, e_{c22}^k, e_{c23}^k, e_{c33}^k), \quad k = 0,1, \quad \chi = (\chi_{11}^0, \chi_{12}^0, \chi_{22}^0); \tag{9}$$

e_{sij}^k, e_{cij}^k, χ_{ij}^k определены в (6).

Отметим, что через e и χ обозначены соответственно линейные и нелинейные части компонент деформации γ, поэтому справедливо представление $\gamma = e + \chi$.

Аналогично граничные условия (2) запишем в виде

$$\operatorname{Re}[(-i)^j t'\omega_k(t)] + 2(-1)^j DD^{1212}_{k+\delta-2}\nu_{\delta 3-j\alpha^\lambda}\,d\alpha^\lambda/ds = \varphi_{c3(k-1)+j}(a)(t) +$$

$$+ \varphi_{\chi 3(k-1)+j}(a)(t) - F^{3k+j}(s), \quad k,j = 1,2,$$

$$DD_0^{1313}[(w_{3\alpha^2} + \psi_2)\,d\alpha^1/ds - (w_{3\alpha^1} + \psi_1)\,d\alpha^2/ds] = \varphi_{\chi 3}(a)(t) - F^6(s), \tag{10}$$

где

$$\varphi_{cj}(a)(t) = D[T^{j2}(e_c)\,d\alpha^1/ds - T^{j1}(e_c)\,d\alpha^2/ds], \quad \varphi_{c3+j}(a)(t) = D[M^{j2}(e_c)\,d\alpha^1/ds -$$

$$- M^{j1}(e_c)\,d\alpha^2/ds], \quad \varphi_{\chi j}(a)(t) = D[T^{j2}(\chi)\,d\alpha^1/ds - T^{j1}(\chi)\,d\alpha^2/ds],$$

$$\varphi_{\chi 3+j}(a)(t) = D[M^{j2}(\chi)\,d\alpha^1/ds - M^{j1}(\chi)\,d\alpha^2/ds], \quad j = 1,2, \quad \varphi_{c3}(a)(t) \equiv 0,$$

$$\varphi_{\chi 3}(a)(t) = D[(T^{11}(\gamma)w_{3\alpha^1} + T^{12}(\gamma)w_{3\alpha^2})\,d\alpha^2/ds - (T^{22}(\gamma)w_{3\alpha^2} + T^{12}(\gamma)w_{3\alpha^1})\,d\alpha^1/ds],$$

$$F^{3+j} = -P^j, \quad j = 1,2, \quad F^6(s) = P^3(s), \quad F^{6+k} = -N^k, \quad k = 1,2, \tag{11}$$

усилия T^{jk}, моменты M^{jk} определены в (3).

В основе исследования системы уравнений (8) при граничных условиях (10) лежат интегральные представления для обобщённых перемещений w_j, $j = 1,2,3$, ψ_k, $k = 1,2$.

Для их вывода рассмотрим уравнения

$$\omega_{j\bar z} = \rho^j, \quad j = 1,2, \quad DD_0^{1313}(w_{3\alpha^1\alpha^1} + w_{3\alpha^2\alpha^2}) = \rho^3, \tag{12}$$

где $\rho^1 = \rho_1 + i\rho_2$, $\rho^2 = \rho_4 + i\rho_5$, $\rho^3 = \rho_3$ – произвольно фиксированные функции, принадлежащие пространству $L_p(\Omega)$.

Первые два уравнения в (12) представляют собой неоднородные уравнения Коши–Римана. Их общие решения даются формулами [14, с. 29]

$$\omega_j(z) = \Phi_j(z) + T\rho^j(z) \equiv \omega_j(\Phi_j;\rho^j)(z),$$

$$T\rho^j(z) = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_\Omega \frac{\rho^j(\zeta)}{\zeta - z}\,d\xi\,d\eta, \quad j = 1,2, \quad \zeta = \xi + i\eta, \tag{13}$$

где $\Phi_j(z)$ – произвольные голоморфные функции, принадлежащие пространству $C_\alpha(\overline{\Omega})$.

Известно [14, с. 39–41, 46], что T – вполне непрерывный оператор в пространствах $L_p(\Omega)$ и $C^k_\alpha(\overline{\Omega})$, отображающий их в пространства $C_\alpha(\overline{\Omega})$ и $C^{k+1}_\alpha(\overline{\Omega})$ соответственно. Кроме того, существуют обобщённые производные

$$\frac{\partial Tf}{\partial \bar z} = f, \quad \frac{\partial Tf}{\partial z} \equiv Sf = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_\Omega \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\,d\xi\,d\eta, \tag{14}$$

где S – линейный ограниченный оператор в пространствах $L_p(\Omega)$, $p > 1$, и $C^k_\alpha(\overline{\Omega})$.

Представления (13) в свою очередь при помощи функций $\omega_1^0 = w_2 + iw_1$, $\omega_2^0 = \psi_2 + i\psi_1$ запишем в виде неоднородных уравнений Коши–Римана

$$\omega^0_{j\bar z} = i(d_{2j-1}[\omega_1] + d_{2j}[\omega_2]) \equiv iT_j\omega, \quad j = 1,2, \quad \omega = (\omega_1, \omega_2), \tag{15}$$

общие решения которых имеют вид

$$\omega^0_j(z) = \Psi_j(z) + iTT_j\omega(z) \equiv \omega^0_j(\Psi_j;\omega)(z), \quad j = 1,2. \tag{16}$$

В (15), (16) приняты обозначения

$$d_{2j+\lambda-2}[\omega_\lambda] = d^1_{2j+\lambda-2}\omega_\lambda + (-1)^{j+\lambda} d^2_{2j+\lambda-2}\overline{\omega_\lambda}, \quad j,\lambda = 1,2,$$

$$d^j_{3k-2} = \frac{1}{4D}\left(\frac{D^{1111}_{4-2k}}{\delta_0} + (-1)^j \frac{D^{1212}_{4-2k}}{\delta_1}\right), \quad d^j_2 = d^j_3 = \frac{1}{4D}\left(\frac{D^{1212}_1}{\delta_1} + (-1)^j \frac{D^{1111}_1}{\delta_0}\right), \quad k,j = 1,2,$$

$$\delta_0 = D^{1111}_0 D^{1111}_2 - (D^{1111}_1)^2, \quad \delta_1 = D^{1212}_0 D^{1212}_2 - (D^{1212}_1)^2; \tag{17}$$

$\Psi_j(z) \in C^1_\alpha(\overline{\Omega})$ – произвольные голоморфные функции.

Третье уравнение в (12) запишем в виде

$$w_{3z\bar z} = \widetilde\rho_3/4, \quad \widetilde\rho_3 = \rho_3/(DD^{1313}_0), \quad w_{3z} = (w_{3\alpha^1} - iw_{3\alpha^2})/2,$$

откуда получим

$$w_3(z) = \operatorname{Re}\Psi_3(z) - \widetilde T\widetilde\rho_3 \equiv w_3(\Psi_3;\rho_3)(z), \quad \widetilde T\widetilde\rho_3 = -\frac{1}{2\pi}\iint\limits_\Omega \widetilde\rho_3(\zeta)\ln\left|1-\frac{z}{\zeta}\right| d\xi\, d\eta, \tag{18}$$

где $\Psi_3(z) \in C^1_\alpha(\overline{\Omega})$ – произвольная голоморфная функция.

Соотношения (16), (18) являются искомыми интегральными представлениями для обобщённых перемещений. Для их частных производных первого и второго порядков при помощи формул (13)–(18) и (8.20) из [14, с. 58] получаем

$$\nu_{jk\alpha^k} = \operatorname{Im}[\omega^0_{j\bar z} - (-1)^k\omega^0_{jz}], \quad \nu_{jk\alpha^n} = \operatorname{Re}[\omega^0_{jz} + (-1)^k\omega^0_{j\bar z}], \quad k\neq n, \quad j,k,n = 1,2,$$

$$\omega^0_{jz} = \Psi'_j(z) + iST_j\omega(z), \quad \omega^0_{j\bar z} = iT_j\omega, \quad w_{3\alpha^j} = 2\operatorname{Re}(i^{j-1}w_{3z}), \quad j = 1,2,$$

$$w_{3z} = \Psi'_3(z)/2 + T\widetilde\rho_3(z)/4, \quad \nu_{kn\alpha^j\alpha^j} = -\operatorname{Re}\{i^n[\omega^0_{kz\bar z} + (-1)^j(\omega^0_{kzz} + \omega^0_{k\bar z\bar z})]\},$$

$$\nu_{kn\alpha^1\alpha^2} = \operatorname{Re}\{i^{n-1}(\omega^0_{kzz} - \omega^0_{k\bar z\bar z})\}, \quad w_{3\alpha^j\alpha^j} = 2[w_{3z\bar z} + (-1)^{j-1}\operatorname{Re} w_{3zz}], \quad k,n,j = 1,2,$$

$$w_{3\alpha^1\alpha^2} = -2\operatorname{Im} w_{3zz}, \quad \omega^0_{kz\bar z} = T_{k1}\omega + S_{k1}(\Phi'_0;\rho_0), \quad \omega^0_{k\bar z\bar z} = T_{k2}\omega + S_{k2}(\Phi'_0;\rho_0),$$

$$\omega^0_{kzz} = \Psi''_k(z) + S\omega^0_{k\zeta\bar\zeta}(z) - \frac{1}{2\pi}\int\limits_\Gamma \frac{T_k\omega(\tau)}{(\tau-z)^2}\,d\overline{\tau}, \quad k = 1,2, \quad \Phi'_0 = (\Phi'_1,\Phi'_2), \quad \rho_0 = (\rho^1,\rho^2),$$

$$w_{3zz} = \Psi''_3(z)/2 + S\widetilde\rho_3/4, \quad w_{3z\bar z} = \widetilde\rho_3/4, \quad T_{jk}\omega = i[d^1_{2j+\mu-2,k}\omega_\mu + (-1)^{j+\mu}d^2_{2j+\mu-2,k}\overline{\omega_\mu}],$$

$$S_{jk}(\Phi'_0;\rho_0) = i[d^1_{2j+\mu-2}\omega_{\mu,k} + (-1)^{j+\mu}d^2_{2j+\mu-2}\overline{\omega_{\mu,3-k}}], \quad \omega_{j,1} \equiv \omega_{jz} = \Phi'_j(z) + S\rho^j(z),$$

$$\omega_{j,2} \equiv \omega_{j\bar z} = \rho^j, \quad d^j_{m,1} \equiv d^j_{mz}, \quad d^j_{m,2} \equiv d^j_{m\bar z}, \quad j,k = 1,2, \quad m = \overline{1,4}. \tag{19}$$

3. Решение задачи (1), (2). Интегральные представления (16), (18) для обобщённых перемещений $a = (w_1,w_2,w_3,\psi_1,\psi_2)$ содержат произвольные голоморфные функции $\Phi_j(z)$, $j = 1,2$, $\Psi_k(z)$, $k = 1,2,3$, и произвольные функции $\rho^j(z)$, $j = 1,2,3$. Их найдём так, чтобы обобщённые перемещения удовлетворяли системе (8) и граничным условиям (10), при этом правые части уравнений (8) и граничных условий (10) временно считаем известными. С этой целью соотношения (16), (18), (19) подставим в левые части системы (8) и граничных условий (10). В результате система уравнений (8) запишется в виде

$$\rho^j(z) + h^j_1(\rho)(z) + h^j_2(\Phi)(z) = f^j_c(a)(z) + f^j_\chi(a)(z) - F^j(z), \quad j = 1,2,3, \quad z\in\Omega, \tag{20}$$

где через $h^j_1(\rho)(z)$ и $h^j_2(\Phi)(z)$ обозначены те части выражения оператора $h^j(a)$ в (9), которые содержат функции $\rho = (\rho^1,\rho^2,\rho^3)$ и $\Phi = (\Phi_1,\Phi_2,\Psi_1,\Psi_2,\Psi_3)$ соответственно.

Граничные условия (10) с учётом представлений

$$S(T_j\Phi_0)^+(t) = -(\overline{t}')^2[d^1_{2j-1}(t)\Phi_1(t) + d^1_{2j}(t)\Phi_2(t)] + K_{0j}(\Phi_0)(t), \quad \Phi_0 = (\Phi_1, \Phi_2),$$

$$K_{0j}(\Phi_0)(t) = -\frac{d^1_{2j+\mu-2}(t)}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{\psi(\tau,t)-\psi(t,t)}{\tau-t}\Phi_\mu(\tau)\,d\tau - (-1)^{j+\mu}\frac{d^2_{2j+\mu-2}(t)}{2\pi i}\times$$

$$\times\int\limits_\Gamma \frac{\psi(\tau,t)-\psi(t,t)}{\overline{\tau}-\overline{t}}\overline{\Phi_\mu(\tau)}\,d\overline{\tau} - \frac{1}{\pi}\iint\limits_\Omega \frac{d^1_{2j+\mu-2}(\zeta)-d^1_{2j+\mu-2}(t)}{(\zeta-t)^2}\Phi_\mu(\zeta)\,d\xi\,d\eta -$$

$$-\frac{(-1)^{j+\mu}}{\pi}\iint\limits_\Omega \frac{d^2_{2j+\mu-2}(\zeta)-d^2_{2j+\mu-2}(t)}{(\zeta-t)^2}\overline{\Phi_\mu(\zeta)}\,d\xi\,d\eta, \quad j=1,2,$$

$$\psi(\tau,t) = (\overline{\tau}-\overline{t})/(\tau-t), \quad \psi(t,t) = (\overline{t}')^2, \tag{21}$$

получаемых при помощи соотношений (13)–(15), формул (4.7), (4.9) из [14, с. 28] и формул Сохоцкого [15, с. 66], преобразуются к виду

$$(-1)^j d_{k\lambda}(t)\mathrm{Re}\,[i^j t'\Phi_\lambda(t)] - 2DD^{1212}_{\lambda+k-2}(t)\mathrm{Re}\,[i^{j-1}t'\Psi'_\lambda(t)] - 2DD^{1212}_{\lambda+k-2}(t)\mathrm{Re}\,[i^j t' K_{0\lambda}(\Phi_0)(t)] +$$

$$+ H_{3(k-1)+j}\rho(t) = \varphi_{c3(k-1)+j}(a)(t) + \varphi_{\chi 3(k-1)+j}(a)(t) - F^{3k+j}(s), \quad k,j=1,2,$$

$$DD^{1313}_0(t)\mathrm{Re}\,[it'\Psi'_3(t)] + K_{03}(\Phi)(t) + H_3\rho(t) = \varphi_{\chi 3}(a)(t) - F^6(s), \tag{22}$$

где приняты следующие обозначения:

$$H_{3(k-1)+j}\rho(t) = \mathrm{Re}\,[(-i)^j t' T\rho^k(t)] - 2DD^{1212}_{k+\lambda-2}(t)\,\mathrm{Re}\,\{i^j t'(I+S)(T_\lambda T\rho_0)^+(t)\}, \quad k,j=1,2,$$

$$H_3\rho(t) = DD^{1313}_0(t)\,\mathrm{Re}\,[it'(T\widetilde{\rho}_3(t)/2 + TT_2T\rho_0(t))],$$

$$K_{03}(\Phi)(t) = DD^{1313}_0(t)\,\mathrm{Re}\,\{t'[\Psi_2(t) + iTT_2\Phi_0(t)]\},$$

$$d_{kj}(t) = (-1)^{j-1}[2(-1)^\lambda DD^{1212}_{\lambda+k-2}(t)d^2_{2\lambda+j-2}(t) + 3 - k - j], \quad k,j=1,2, \tag{23}$$

I – тождественный оператор, операторы T, S, T_λ и функции $d^k_j(t)$ определены в (13), (14), (15) и (17) соответственно; $\Phi_\lambda(t) \equiv \Phi^+_\lambda(t)$, $t \in \Gamma$; символ $\Phi^+_\lambda(t)$ здесь и далее означает предел функции $\Phi_\lambda(z)$ при $z \to t \in \Gamma$ изнутри области Ω.

Таким образом, для определения функций $\rho^j \in L_p(\Omega)$, $j=1,2,3$, $\Phi_k(z) \in C_\alpha(\overline{\Omega})$, $k = 1,2$, $\Psi_j(z) \in C^1_\alpha(\overline{\Omega})$, $j=1,2,3$, получили систему уравнений (20), (22). Голоморфные функции будем искать в виде интегралов типа Коши с действительными плотностями

$$\Phi_k(z) = \Theta(\mu_{2k})(z) \equiv \Phi_k(\mu_{2k})(z), \quad k=1,2,$$

$$\Psi'_j(z) = i^{(j-1)(j-2)/2}\Theta(\mu_{2j-1})(z) \equiv \Psi'_j(\mu_{2j-1})(z), \quad j=1,2,3, \quad \Theta(f)(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{f(\tau)\,d\tau}{\tau'(\tau-z)}, \tag{24}$$

где $\mu_j(t) \in C_\alpha(\Gamma)$, $j = \overline{1,5}$, – произвольные действительные функции, $\tau' = d\tau/d\sigma$, $d\sigma$ – элемент длины дуги кривой Γ.

Для функций $\Psi_j(z)$, $j=1,2,3$, имеем представления

$$\Psi_j(z) = i^{(j-1)(j-2)/2}\Theta^0(\mu_{2j-1})(z) + c_{2j-1} + ic_{2j} \equiv \Psi_j(\mu_{2j-1})(z) + c_{2j-1} + ic_{2j}, \quad j=1,2,3,$$

$$\Theta^0(f)(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{f(\tau)}{\tau'}\ln\left(1 - \frac{z}{\tau}\right)d\tau, \tag{25}$$

где c_j, $j=\overline{1,6}$, – произвольные действительные постоянные, под $\ln(1-z/\tau)$ понимается однозначная ветвь, обращающаяся в нуль при $z=0$.

Используя формулы Сохоцкого [15, с. 66], находим $\Phi_k(t)$, $k=1,2$, $\Psi_j'(t)$, $j=1,2,3$, $t\in\Gamma$. Подставляя их выражения, а также представления (25) в систему (20), (22), после несложных преобразований приходим к следующей системе уравнений относительно функций $\rho\in L_p(\Omega)$ и $\mu=(\mu_1,\mu_2,\mu_3,\mu_4,\mu_5)\in C_\alpha(\Gamma)$:

$$\rho^j(z)+h_1^j(\rho)(z)+h_2^j(\mu)(z)=f_c^j(a)(z)+f_\chi^j(a)(z)+g_c^j(z)-F^j(z),\quad z\in\Omega,\quad j=1,2,3,$$

$$\sum_{n=1}^{5}\left[a_{jn}(t)\mu_n(t)+b_{jn}(t)\int\limits_{\Gamma}\frac{\mu_n(\tau)}{\tau-t}\,d\tau\right]+K_j\mu(t)+H_j\rho(t)=$$

$$=\varphi_{cj}(a)(t)+\varphi_{\chi j}(a)(t)+g_c^{3+j}(t)-F^{3+j}(t),\quad j=\overline{1,5},\quad t\in\Gamma, \tag{26}$$

в которой приняты обозначения

$$K_{3(n-1)+j}\mu(t)=(-1)^j d_{n\lambda}(t)\{\mathrm{Re}\,[i^j t'\Theta(\mu_{2\lambda})(t)]-i\mathrm{Re}\,(i^{j-1})\Theta(\tau'\mu_{2\lambda})(t)\}+$$

$$+2DD_{\lambda+n-2}^{1212}(t)\{\mathrm{Re}\,[i^{j+1}t'\Theta(\mu_{2\lambda-1})(t)]-i\mathrm{Re}\,(i^j)\Theta(\tau'\mu_{2\lambda-1})(t)-\mathrm{Re}\,[i^j t' K_{0\lambda}(\mu_0)(t)]\},\quad n,j=1,2,$$

$$K_3\mu(t)=K_{03}(\mu)(t)-DD_0^{1313}(t)\,\mathrm{Re}\,[t'\Theta(\mu_5)(t)];$$

$$g_c^2(z)=DD_0^{1313}(c_4+ic_3)/2,\quad g_c^3(z)=-c_4(DD_0^{1313})_{\alpha^1}-c_3(DD_0^{1313})_{\alpha^2},$$

$$g_c^6(t)=DD_0^{1313}(t)(c_4\,d\alpha^2/ds-c_3\,d\alpha^1/ds),\quad g_c^1(z)=g_c^{3+j}(t)\equiv 0,\quad j=1,2,4,5;$$

$$a_{3(k-1)+j,2\lambda}(t)=(-1)^j d_{k\lambda}(t)\,\mathrm{Re}\,(i^j)/2,\quad b_{3(k-1)+j,2\lambda}(t)=(-1)^j d_{k\lambda}(t)\,\mathrm{Re}\,(i^{j-1})/(2\pi),$$

$$a_{3(k-1)+j,2\lambda-1}(t)=-DD_{\lambda+k-2}^{1212}(t)\,\mathrm{Re}\,(i^{j-1}),\quad b_{3(k-1)+j,2\lambda-1}(t)=DD_{\lambda+k-2}^{1212}(t)\,\mathrm{Re}\,(i^j)/\pi,$$

$$k,j,\lambda=1,2,\quad a_{35}(t)=-DD_0^{1313}(t)/2, \tag{27}$$

остальные a_{jk}, b_{jk} равны нулю; здесь $h_2^j(\mu)(z)\equiv h_2^j(\Phi(\mu))(z)$, $K_{0j}(\mu_0)(t)\equiv K_{0j}(\Phi_0(\mu_0))(t)$, $j=1,2$; $K_{03}(\mu)(t)\equiv K_{03}(\Phi(\mu))(t)$, $\Phi(\mu)=(\Phi_1(\mu_2),\Phi_2(\mu_4),\Psi_1(\mu_1),\Psi_2(\mu_3),\Psi_3(\mu_5))$, $\mu_0= =(\mu_2,\mu_4)$.

Лемма 1. *Пусть выполнены условия (a), (b), (c), (d). Тогда:*

1) $h_1^j(\rho)$, $j=1,2,3$, – линейные вполне непрерывные операторы в пространстве $L_p(\Omega)$;

2) $h_2^j(\mu)$, $j=1,2,3$, – линейные вполне непрерывные операторы из $C_\nu(\Gamma)$ для любого $\nu\in(0,1)$ в $L_p(\Omega)$;

3) $K_j\mu$, $j=\overline{1,5}$, – линейные вполне непрерывные операторы из $C_\nu(\Gamma)$ для любого $\nu\in \in(0,1)$ в $C_\gamma(\Gamma)$ при всех $\gamma<\beta/2$;

4) $H_j\rho$, $j=\overline{1,5}$, – линейные вполне непрерывные операторы из $L_p(\Omega)$ в $C_{\alpha'}(\Gamma)$ при всех $\alpha'<\alpha$ и ограниченные операторы из $L_p(\Omega)$ в $C_\alpha(\Gamma)$;

5) имеют место включения $f_c^j(a)(z), f_\chi^j(a)(z), F^j(z), g_c^j(z)\in L_p(\Omega)$, $j=1,2,3$, $\varphi_{cj}(a)(t)$, $\varphi_{\chi j}(a)(t)\in C_\alpha(\Gamma)$, $F^{3+j}(t), g_c^6(t), a_{jk}(t), b_{jk}(t)\in C_\beta(\Gamma)$, $j,k=\overline{1,5}$.

Доказательство. Известно [14, с. 26–27], что интеграл типа Коши $\theta(f)$ в (24) представляет собой ограниченный оператор из $C_\alpha(\Gamma)$ в $C_\alpha(\overline{\Omega})$, а его производная $\theta'(f)$ – ограниченный оператор из $C_\alpha(\Gamma)$ в $L_q(\Omega)$, $1<q<2/(1-\alpha)$. Кроме того, нетрудно показать, что $\theta(f)$ – вполне непрерывный оператор из $C_\alpha(\Gamma)$ в $L_p(\Omega)$ при всех $p>1$ и в $C_{\alpha'}(\overline{\Omega})$ для любого $\alpha'<\alpha$. Учитывая это, а также свойства операторов T, S, определённых в (13), (14), используя представления для производных первого порядка обобщённых перемещений в (19) и выражения для операторов $h^j(a)$ в (9), получаем, что первые утверждения 1), 2) леммы справедливы.

Так как $\psi(\tau,t)\in C_\beta(\Gamma)\times C_\beta(\Gamma)$ [15, с. 28–32], $d_{k\lambda}(t)\in C_\beta(\Gamma)$, $d_j^k(z), D_0^{1313}(z), D(z)\in \in C_\beta(\overline{\Omega})$, то, принимая во внимание следствие 4.3 из [16, с. 124], легко убеждаемся в том, что первые два слагаемых в правой части представления для оператора $K_{0j}(\mu_0)$ в (21) суть вполне непрерывные операторы из $C_\nu(\Gamma)$, $\nu \in (0,1)$ в $C_\gamma(\Gamma)$ для любого $\gamma < \beta$. Также нетрудно показать, что третье и четвертое слагаемые этого представления в (21) суть вполне непрерывные операторы из $C_\nu(\Gamma)$, $\nu \in (0,1)$ в $C_\gamma(\Gamma)$, $\gamma < \beta$. Тогда получаем, что $K_{oj}(\mu_0)$, $j = 1,2,$ – линейные вполне непрерывные операторы из $C_\nu(\Gamma)$, $\nu \in (0,1)$ в $C_\gamma(\Gamma)$, $\gamma < \beta$. Аналогично из представления оператора $K_{03}(\mu)$ в (23) следует, что $K_{03}(\mu)$ – линейный вполне непрерывный оператор из $C_\nu(\Gamma)$ в $C_\beta(\Gamma)$ для всех $\nu \in (0,1)$.

Далее два первых слагаемых в правой части формулы для оператора $K_{3(n-1)+j}\mu$ в (27) преобразуем к виду

$$\frac{(-i)^j}{2} d_{n\lambda}(t) \left\{ \frac{(-1)^j - 1}{2\pi i} \int\limits_\Gamma \frac{\mu_{2\lambda}(\tau)}{\tau'} \frac{\tau' - t'}{\tau - t}\, d\tau + \frac{(-1)^j}{\pi} \int\limits_\Gamma \frac{\mu_{2\lambda}(\tau)}{\tau'} \mathrm{Im}\left(\frac{t'}{\tau - t}\right) d\tau \right\}.$$

Следовательно, с учётом включений $\tau', d_{n\lambda} \in C_\beta(\Gamma)$ и равенства

$$\mathrm{Im}\,[\tau'/(\tau - t)] = k_*(\tau,t)/|\tau - t|^{1-\beta/2},$$

где $k_*(\tau,t) \in C_{\beta/2}(\Gamma) \times C_{\beta/2}(\Gamma)$ [15, с. 31–32, 55–56], а также следствий 4.4,4.5 из [16, с. 125] получаем, что эти слагаемые в выражении для оператора $K_{3(n-1)+j}\mu$ в (27) определяют линейный вполне непрерывный оператор из $C_\nu(\Gamma)$ в $C_\gamma(\Gamma)$ для любых $\nu \in (0,1)$ и $\gamma < \beta/2$. Аналогично показываем, что третье и четвертое слагаемые в выражении для оператора $K_{3(n-1)+j}\mu$ в (27) обладают таким же свойством. Тогда из представлений операторов $K_j\mu$, $j = \overline{1,5}$, в (27) вытекает справедливость утверждения 3) леммы. Справедливость утверждения 4) следует из представлений операторов $H_j\rho$, $j = \overline{1,5}$, в (23) с учётом свойств операторов T, S, интеграла типа Коши и соотношений

$$S(T_\lambda T\rho_0)^+(t) = T\left(\frac{\partial}{\partial\zeta} T_\lambda T\rho_0\right)(t) - \frac{1}{2}(\bar{t}')^2 T_\lambda T\rho_0(t) - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\Gamma \frac{T_\lambda T\rho_0(\tau)}{\tau - t}\, d\overline{\tau}, \quad \lambda = 1,2,$$

которые получаются с использованием формул (8.20) из [14, с. 58] и формул Сохоцкого. Справедливость утверждения 5) леммы непосредственно вытекает из формул (9), (11), (27). Лемма доказана.

Исследуем разрешимость системы уравнений (26) в пространстве $L_p(\Omega) \times C_{\alpha'}(\Gamma)$, $\alpha' < \alpha$. Заметим, что любое решение $(\rho,\mu) \in L_p(\Omega) \times C_{\alpha'}(\Gamma)$ системы (26) в силу леммы 1 принадлежит пространству $L_p(\Omega) \times C_\alpha(\Gamma)$. Используя выражения для $a_{jk}(t)$, $b_{jk}(t)$ из (27), вычисляем определитель

$$\det\,[A(t) - \pi i B(t)] = D^3 D_0^{1313} \delta_1/(32\delta_0)(a_1^2 - a_0 a_2), \quad a_n = D_n^{1111} + D_n^{1122}, \quad n = 0,1,2,$$

где δ_0, δ_1 определены в (17), а $A = (a_{jk})$, $B = (b_{jk})$ – квадратные матрицы пятого порядка. Итак, $\det\,[A(t) - \pi i B(t)] \neq 0$ на границе Γ и для индекса системы (26) получаем

$$\chi = \frac{1}{2\pi} \left[\arg \frac{\det\,(A - \pi i B)}{\det\,(A + \pi i B)}\right]_\Gamma = 0$$

(здесь символ $[\arg\varphi]_\Gamma$ означает приращение аргумента функции φ при обходе кривой Γ один раз в положительном направлении). Следовательно, к системе (26) применима альтернатива Фредгольма. Пусть $(\rho,\mu) \in L_p(\Omega) \times C_{\alpha'}(\Gamma)$ – решение системы (26) при нулевой правой части. Этому решению по формулам (24), (25) с постоянными $c_j = 0$, $j = \overline{1,6}$, соответствуют голоморфные функции $\Phi_k(z)$, $\Psi_j(z)$, которые в свою очередь по формулам (16), (18) определяют функции w_j, $j = 1,2,3$, ψ_k, $k = 1,2$. Эти функции, как нетрудно видеть, удовлетворяют однородной системе линейных уравнений (8) $(f_c^j + f_\chi^j - F^j \equiv 0,\ j = 1,2,3)$ и однородным линейным граничным условиям (10) $(\varphi_{cj} + \varphi_{\chi j} - F^{3+j} \equiv 0,\ j = \overline{1,5})$. Умножим действительную и мнимую части первого уравнения однородной системы (8) соответственно на w_1

и w_2, второго уравнения – соответственно на ψ_1 и ψ_2, а третье уравнение – на w_3. После этого проинтегрируем по области Ω и сложим получившиеся равенства. С учётом однородных граничных условий (10) получаем, что w_j, $j=1,2,3$, ψ_k, $k=1,2$, удовлетворяют системе $\nu_{j1\alpha^1}=0$, $\nu_{j2\alpha^2}=0$, $\nu_{j1\alpha^2}+\nu_{j2\alpha^1}=0$, $w_{3\alpha^j}+\psi_j=0$, $j=1,2$, решение которой имеет вид

$$w_1=-c_0\alpha^2+c_1,\quad w_2=c_0\alpha^1+c_2,\quad w_3=-c_4\alpha^1-c_5\alpha^2+c_6,\quad \psi_1=c_4,\quad \psi_2=c_5, \tag{28}$$

где c_j – произвольные действительные постоянные.

Так как $\Psi_j(0)=0$, $j=1,2,3$, $w_3(0)=0$, то из (28) будем иметь $w_1=-c_0\alpha^2+c_1$, $w_2= c_0\alpha^1+c_2$, $w_3=\psi_1=\psi_2\equiv 0$. Тогда $\omega_j(z)=2ic_0DD^{1212}_{j-1}$, $j=1,2$, и из уравнений (12) следуют равенства

$$\rho^j(z)=2ic_0(DD^{1212}_{j-1})_{\overline{z}},\quad j=1,2,\quad \rho^3(z)\equiv 0,\quad z\in\Omega. \tag{29}$$

Используя формулы (13), (16), (18) и представление для ω^0_{jz} в (19), находим функции $\Phi_k(z)$, $k=1,2$, $\Psi'_j(z)$, $j=1,2,3$, подставив которые в (24), получим

$$\mu_1(t)/t'-c_0(\overline{t}')^2=F^-_1(t),\quad \mu_{2j}(t)/t'-2ic_0DD^{1212}_{j-1}(t)=F^-_{2j}(t),\quad j=1,2,$$

$$\mu_{2j-1}(t)/t'=F^-_{2j-1}(t),\quad j=2,3,$$

где $F^-_j(t)$ – граничные значения функции $F^-_j(z)$, голоморфной во внешности Ω и исчезающей на бесконечности. Следовательно, для функции $F^-_j(z)$ во внешности области Ω приходим к задаче Римана–Гильберта с краевым условием $\mathrm{Re}\,[it'F^-_j(t)]=f^-_j(t)$, $j=\overline{1,5}$, где

$$f^-_1(t)=c_0\mathrm{Re}\,(it'),\quad f^-_{2j}(t)=2c_0DD^{1212}_{j-1}(t)\,\mathrm{Re}\,t',\quad j=1,2,\quad f^-_{2j-1}(t)=0,\quad j=2,3.$$

Используя решение этой задачи [17, с. 253], для функций $\mu_j(t)$ получаем представления

$$\mu_j(t)=c_0\mu^0_j(t)+\beta_{0j}\mu^1_j(t),\quad j=1,2,4,\quad \mu_j(t)=\beta_{0j}\mu^1_j(t),\quad j=3,5, \tag{30}$$

где $\mu^k_j(t)$ – известные действительные функции, принадлежащие пространству $C_\alpha(\Gamma)$; c_0, β_{0j} – произвольные действительные постоянные.

Решения (29), (30) показывают, что однородная система уравнений (26) имеет шесть линейно независимых решений. Тогда союзная с ней система уравнений также будет иметь шесть линейно независимых решений. Для вывода союзной системы действительные и мнимые части левых частей уравнений в (20) умножим соответственно на действительные функции $v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\in L_q(\Omega)$, $1/p+1/q=1$, и проинтегрируем по области Ω, а левые части уравнений в (22) умножим на действительные функции $\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4,\nu_5\in C_\alpha(\Gamma)$ и проинтегрируем по кривой Γ. После этого их сложим и приравняем к нулю. Заменяя голоморфные функции $\Phi_j(z)$, $\Psi_k(z)$, $\Psi'_k(z)$ их выражениями из (24), (25) с постоянными, равными нулю, переставляя порядок интегрирования в полученных повторных интегралах, после несложных, но достаточно громоздких преобразований приходим к искомой союзной системе уравнений

$$\overline{v^j(z)}-T_{3+j}v(z)+2\Theta(\tau'\overline{\nu^j})(z)=0,\quad j=1,2,\quad \mathrm{Re}\,T_3v(z)=0,\quad z\in\Omega,$$

$$\mathrm{Re}\,\{i[T_{3+j}v(t)-2\Theta^-(\tau'\overline{\nu^j})(t)]\}=0,\quad j=1,2,\quad \mathrm{Re}\,[Tg(v)(t)+\Theta^-(\tau'DD^{1313}_0\nu_3)(t)]=0,$$

$$\mathrm{Re}\,\{T[(DD^{1212}_{\lambda+j-2})_{\overline{\zeta}}v^\lambda](t)-2\Theta^-(\tau'DD^{1212}_{\lambda+j-2}\nu^\lambda)(t)+(j-1)[iT^0g(v)(t)-$$

$$-T^0_\Gamma(DD^{1313}_0\tau'\nu_3)(t)]\}=0,\quad j=1,2,\quad t\in\Gamma;$$

$$v^j=v_{3j-2}+iv_{3j-1},\quad \nu^j=\nu_{3j-2}+i\nu_{3j-1},\quad j=1,2,\quad v^3=v_3,\quad \nu^3=\nu_3. \tag{31}$$

В уравнениях (31) приняты обозначения

$$T_3v(z) = -2Tg(v)(z) + 2DD_0^{1313}(z)v_3(z) - 2\Theta(\tau' DD_0^{1313}\nu_3)(z), \quad T_{3+j}v(z) =$$

$$= 2Td_{j+2\lambda-2}[S_\lambda v](z) + Td_{2+j}[T_3v](z), \quad S_jv(z) = S[(DD_{j+\lambda-2}^{1212})_{\overline{\zeta}}v^\lambda](z) - (DD_{j+\lambda-2}^{1212})_z v^\lambda(z) -$$

$$- 2\Theta'(\tau' DD_{j+\lambda-2}^{1212}\nu^\lambda)(z), \quad j = 1,2, \quad g(v)(z) = (DD_0^{1313})_{\overline{z}}(z)v_3(z) - DD_0^{1313}(z)v^2(z)/4,$$

$$T^0f(z) = -\frac{1}{\pi i}\iint\limits_\Omega f(\zeta)\ln\left(1-\frac{\zeta}{z}\right)d\xi\,d\eta, \quad T_\Gamma^0 f(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma f(\tau)\ln\left(1-\frac{\tau}{z}\right)d\sigma,$$

$$\Theta'(f)(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{f(\tau)\,d\tau}{\tau'(\tau-z)^2}, \quad v = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5), \tag{32}$$

$\Theta^-(f)(t)$ – граничные значения функции $\Theta(f)(z)$ при $z \to t \in \Gamma$ извне области Ω; операторы Tf, Sf, $d_j[f]$, $\Theta(f)$ определены в (13), (14), (17), (24) соответственно.

Система (31), как отмечено выше, имеет шесть линейно независимых решений. Получим их явные выражения. Далее в (31) под $v \in L_q(\Omega)$, $1/p+1/q = 1$, $\nu \in C_\alpha(\Gamma)$ будем подразумевать некоторое её решение.

Заметим, что операторы T, T^0, T_Γ^0, введённые в (13), (32), определяют функции $Tf(z)$, $T^0f(z)$, $T_\Gamma^0 f(z)$, которые голоморфны во внешности области Ω и обращаются в нуль на бесконечности. Этими же свойствами обладает и функция $\theta(f)(z)$. Поэтому последние пять равенств на кривой Γ в (31) представляют собой краевые условия задачи Римана–Гильберта с нулевым индексом для функций, голоморфных вне Ω и исчезающих на бесконечности. Такая задача, как известно, имеет только нулевое решение. Следовательно, эти пять равенств на кривой Γ преобразуются к виду

$$T_{3+j}v(z) - 2\Theta(\tau'\overline{\nu^j})(z) = 0, \quad j = 1,2, \quad Tg(v)(z) + \Theta(\tau' DD_0^{1313}\nu_3)(z) = 0,$$

$$T[(DD_{\lambda+j-2}^{1212})_{\overline{\zeta}}v^\lambda](z) - 2\Theta(\tau' DD_{\lambda+j-2}^{1212}\nu^\lambda)(z) + (j-1)[iT^0g(v)(z) - T_\Gamma^0(DD_0^{1313}\tau'\nu_3)(z)] = 0,$$

$$j = 1,2, \quad z \in \Omega_1 \equiv \mathbb{C}\setminus\overline{\Omega}, \tag{33}$$

$\mathbb{C}$ – комплексная плоскость.

Из первых трёх равенств в (31) следует, что функции v_j, $j = \overline{1,5}$, принадлежат пространству $W_{q_1}^{(1)}(\Omega)\bigcap C_\alpha(\overline{\Omega})$, $1 < q_1 < 2/(1-\alpha)$. В них перейдём к пределу при $z \to t \in \Gamma$ изнутри области Ω, а в первых трёх равенствах в (33) – извне области Ω, затем последние прибавим к первым трём соответственно. Принимая во внимание непрерывность функций вида $Tf(z)$ при $f \in L_p(\Omega)$ на $\mathbb{C}$ и используя формулы Сохоцкого, получаем

$$v^j(t) = -2\nu^j(t), \quad j = 1,2, \quad v_3(t) = \nu_3(t), \quad t \in \Gamma. \tag{34}$$

Продифференцировав первые два равенства в (31) по $\overline{z}$, с учётом (14) получим равенства

$$\overline{v^j}_{\overline{z}} = 2d_{j+2\lambda-2}[S_\lambda v](z) + d_{2+j}[T_3v](z), \quad j = 1,2, \quad z \in \Omega,$$

откуда, рассматривая их как систему относительно $X_1 = 2S_1v$, $X_2 = 2S_2v + T_3v$ и решая её, будем иметь

$$X_j = D[(D_{j+\lambda-2}^{1111} - D_{j+\lambda-2}^{1212})\overline{v_z^\lambda} + (D_{j+\lambda-2}^{1111} + D_{j+\lambda-2}^{1212})v_z^\lambda], \quad j = 1,2, \quad z \in \Omega. \tag{35}$$

Пусть дополнительно выполнены условия

$$D_j^{1212}, \quad j = 0,1,2, \quad D_0^{1313} \in W_p^{(2)}(\Omega). \tag{36}$$

Используя соотношения для функций $T_3v(z)$, $S_jv(z)$, $j=1,2$, в (32), находим $X_{j\overline{z}}$, $j=1,2$, которые, как нетрудно видеть, принадлежат пространству $L_{q_1}(\Omega)$, $1<q_1<2/(1-\alpha)$. Теперь эти выражения $X_{j\overline{z}}$, $j=1,2$, подставим в левые части соотношений, полученных дифференцированием по $\overline{z}$ равенств (35). Третье равенство в (31) дифференцируем по z и $\overline{z}$. При помощи несложных преобразований полученных соотношений убеждаемся в том, что вектор-функция $\widetilde{v}=(v_1,v_2,2v_3,v_4,v_5)$ является решением системы линейных уравнений (8) при нулевой правой части.

Далее от решения (v,ν) союзной системы уравнений (31) потребуем, чтобы $\nu(t)\in C^1_\alpha(\Gamma)$. Тогда, как нетрудно видеть, $v(z)\in C^1_\alpha(\overline{\Omega})$. Теперь в равенствах (35) переходим к пределу при $z\to t\in\Gamma$ изнутри области Ω, при этом левую часть $X_j^+(t)$ заменим выражением, полученным с использованием представлений $(S_jv)(z)$, $T_3v(z)$ в (32). Затем из них вычтем соответственно равенства, которые получаются дифференцированием по z последних двух соотношений в (33) с последующим переходом в них к пределу при $z\to t\in\Gamma$ извне Ω. Далее третьи равенства в (31) и (33) продифференцируем по z, в получившихся равенствах перейдём к пределу при $z\to t\in\Gamma$ соответственно изнутри и извне области Ω и затем вычтем их друг из друга. При помощи полученных таким образом равенств на кривой Γ, используя соотношения (34) и формулы

$$(Sf)^+(t)-(Sf)^-(t)=-f(t)\cdot(\bar{t}\,')^2,\quad \theta'^+(\tau'f)(t)-\theta'^-(\tau'f)(t)=f_t+f_{\overline{t}}\cdot(\bar{t}\,')^2,\quad t\in\Gamma,$$

в которых операторы Sf, $\Theta'(f)$ определены в (14), (32), после несложных преобразований приходим к тому, что функции v_1, v_2, $2v_3$, v_4, v_5 удовлетворяют также и однородным линейным граничным условиям в (10). Таким образом, вектор $\widetilde{v}=(v_1,v_2,2v_3,v_4,v_5)$ является решением однородной системы линейных уравнений в (8), удовлетворяющим однородным линейным граничным условиям в (10). Следовательно, в соответствии с (28) для компонент вектора $\widetilde{v}$ получим следующие представления:

$$v_1=-c_0\alpha^2+c_1,\quad v_2=c_0\alpha^1+c_2,\quad v_3=(-c_4\alpha^1-c_5\alpha^2+c_6)/2,\quad v_4=c_4,\quad v_5=c_5,$$

где c_j – произвольные действительные постоянные.

Функции $\nu_j(t)$ и v_k связаны друг с другом формулами (34). Следовательно, решение $(v,\nu)^T$, $v=(v_1,v_2,v_3,v_4,v_5)$, $\nu=(\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4,\nu_5)$ союзной системы (31) можно представить как $(v,\nu)^T=c_0\gamma_1+c_1\gamma_2+c_2\gamma_3+c_4\gamma_4+c_5\gamma_5+c_6\gamma_6$, где $\gamma_k=(\gamma_{k1},\gamma_{k2},\ldots,\gamma_{k10})$, $k=\overline{1,6}$, – линейно независимые решения системы (31). Тогда для разрешимости системы (26) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$\iint\limits_\Omega\{\mathrm{Re}\,[(f^1_c+f^1_\chi+g^1_c-F^1)(z)(\gamma_{k1}-i\gamma_{k2})(z)+(f^2_c+f^2_\chi+g^2_c-F^2)(z)(\gamma_{k4}-i\gamma_{k5})(z)]+$$

$$+(f^3_c+f^3_\chi+g^3_c-F^3)(z)\gamma_{k3}(z)\}\,d\alpha^1\,d\alpha^2+\sum_{j=1}^5\int\limits_\Gamma(\varphi_{cj}+\varphi_{\chi j}+g^{3+j}_c-F^{3+j})(t)\gamma_{k,5+j}(t)\,ds=0,\quad k=\overline{1,6},$$

которые после несложных преобразований принимают вид

$$\iint\limits_\Omega DR^j\,d\alpha^1\,d\alpha^2+\int\limits_\Gamma P^j ds+\iint\limits_\Omega DG^j_{\lambda\mu}T^{\lambda\mu}(\gamma)\,d\alpha^1\,d\alpha^2=0,\quad j=1,2,$$

$$\iint\limits_\Omega D(R^1\alpha^2-R^2\alpha^1)\,d\alpha^1\,d\alpha^2+\int\limits_\Gamma(P^1\alpha^2-P^2\alpha^1)ds+\iint\limits_\Omega D(\alpha^2G^1_{\lambda\mu}-\alpha^1G^2_{\lambda\mu})T^{\lambda\mu}(\gamma)\,d\alpha^1\,d\alpha^2=0,$$

$$\iint\limits_\Omega D(\alpha^jR^3-L^j)\,d\alpha^1\,d\alpha^2+\int\limits_\Gamma(\alpha^jP^3-N^j)ds+\iint\limits_\Omega D\alpha^jB_{\lambda\mu}T^{\lambda\mu}(\gamma)\,d\alpha^1\,d\alpha^2-$$

$$-\iint\limits_{\Omega} DT^{\lambda j}(\gamma)w_{3\alpha^\lambda}\,d\alpha^1\,d\alpha^2-\iint\limits_{\Omega} DG^j_{\lambda\mu}M^{\lambda\mu}(\gamma)\,d\alpha^1\,d\alpha^2=0,\quad j=1,2,$$

$$\iint\limits_{\Omega} DR^3\,d\alpha^1\,d\alpha^2+\int\limits_{\Gamma}P^3ds+\iint\limits_{\Omega} DB_{\lambda\mu}T^{\lambda\mu}(\gamma)\,d\alpha^1\,d\alpha^2=0,\tag{37}$$

где R^j, P^j, $j=1,2,3$, L^k, N^k, $k=1,2$, – компоненты внешних сил, γ – произвольно фиксированный вектор деформации, w_3 – произвольно фиксированная функция.

При выполнении условий (37) общее решение системы (26) можно представить в виде

$$(\rho,\mu)=(\rho_c,\mu_c)(a)+(\rho_\chi,\mu_\chi)(a)+(\rho_*,\mu_*)+(\rho_F,\mu_F),\quad (\rho_c,\mu_c)(a)=\Re f_c(a),$$
$$(\rho_\chi,\mu_\chi)(a)=\Re f_\chi(a),\quad (\rho_*,\mu_*)=\Re g_c+(\widetilde{\rho},\widetilde{\mu}),\quad (\rho_F,\mu_F)=-\Re F,\tag{38}$$

где $f_c(a)=(f_c^1,f_c^2,f_c^3,\varphi_{c1},\ldots,\varphi_{c5})$, $f_\chi(a)=(f_\chi^1,f_\chi^2,f_\chi^3,\varphi_{\chi1},\ldots,\varphi_{\chi5})$, $g_c=(g_c^1,\ldots,g_c^8)$, $F=(F^1,\ldots,F^8)$; $\Re=(\Re_1,\ldots,\Re_8)$; $\Re_j$, $j=1,2,3$, и $\Re_k$, $k=\overline{4,8}$, – линейные ограниченные операторы из $L_p(\Omega)\times C_\alpha(\Gamma)$ в $L_p(\Omega)$ и в $C_\alpha(\Gamma)$ соответственно; функции $\widetilde{\rho}=(\widetilde{\rho}_1,\widetilde{\rho}_2,\widetilde{\rho}_3)$, $\widetilde{\mu}=(\widetilde{\mu}_1,\ldots,\widetilde{\mu}_5)$ определены формулами (29), (30), а f_c^j, f_χ^j, φ_{ck}, $\varphi_{\chi k}$, g_c^n, F^n – формулами в (9), (11), (27).

Если выражение для вектор-функции $\mu(t)$ из (38) подставить в соотношения (24), (25), то для голоморфной вектор-функции $\Phi(z)=(\Phi_0,\Psi)$, $\Phi_0=(\Phi_1,\Phi_2)$, $\Psi=(\Psi_1,\Psi_2,\Psi_3)$ получим представление

$$\Phi(z)=\Phi_c(a)(z)+\Phi_\chi(a)(z)+\Phi_*(z)+\Phi_F(z),\quad z\in\Omega,\tag{39}$$

где

$$\Phi_c(a)(z)=\Phi(\mu_c(a))(z),\quad \Phi_\chi(a)(z)=\Phi(\mu_\chi(a))(z),\quad \Phi_F(z)=\Phi(\mu_F)(z),$$
$$\Phi_*(z)=\Phi(\Re g_c)(z)+\widetilde{\Phi}(z),\quad \widetilde{\Phi}(z)=(c_0\beta_0(z),c_0\beta_1(z),c_0\gamma_0(z)+c_1+ic_2,0,0),$$
$$\beta_j(z)=2i\Theta(t'DD_j^{1212})(z),\quad j=0,1,\quad \gamma_0(z)=\Theta(t'\overline{t})(z),$$

функция $\Theta(f)(z)$ определена в (24), c_j – произвольные действительные постоянные.

Теперь выражения $\rho(z)$ из (38) и голоморфных функций из (39) подставим в (16), (18). Тогда задача (1), (2) сведётся к системе нелинейных уравнений относительно вектор-функции $a=(w_1,w_2,w_3,\psi_1,\psi_2)$, которую представим в виде

$$\omega_j^0(z)=\omega_{jc}^0(a)+\omega_{j\chi}^0(a)+\omega_{j*}^0(z)+\omega_{jF}^0(z),\quad j=1,2,$$
$$w_3(z)=w_{3c}(a)+w_{3\chi}(a)+w_{3*}(z)+w_{3F}(z),\quad z\in\Omega,\tag{40}$$

где $\omega_{jc}^0(a)=\omega_j^0(\Psi_{jc}(a);\omega_{jc}(a))$, $\omega_c(a)=(\omega_{1c},\omega_{2c})$, $\omega_{jc}(a)=\omega_j(\Phi_{jc}(a);\rho_c^j(a))$, $j=1,2$, $w_{3c}(a)=w_3(\Psi_{3c}(a);\rho_c^3(a))$; остальные слагаемые в системе (40) определяются аналогично; операторы $\omega_j(\Phi_j;\rho^j)$, $\omega_j^0(\Psi_j;\omega_j)$ и $w_3(\Psi_3;\rho^3)$ определены в (13), (16), (18) соответственно.

Отметим, что функции $\omega_{j*}^0(z)$, $w_{3*}(z)$ и $\omega_{jF}^0(z)$, $w_{3F}(z)$ зависят соответственно от произвольных постоянных и внешних сил, действующих на оболочку. При этом, как нетрудно заметить, для функций $\omega_{1*}^0(z)=w_{2*}+iw_{1*}$, $\omega_{2*}^0(z)=\psi_{2*}+i\psi_{1*}$, $w_{3*}(z)$ имеют место представления (28).

Исследуем разрешимость системы (40) в пространстве $W_p^{(2)}(\Omega)$.

Лемма 2. *Пусть выполнены условия (a), (b), (c), (d). Тогда*

1) $\omega_{jc}^0(a)$, $j=1,2$, $w_{3c}(a)$ *– линейные вполне непрерывные операторы в* $W_p^{(2)}(\Omega)$;

2) $\omega_{j\chi}^0(a)$, $j=1,2$, $w_{3\chi}(a)$ *– нелинейные ограниченные операторы в* $W_p^{(2)}(\Omega)$, *причём для любых* $a^j=(w_1^j,w_2^j,w_3^j,\psi_1^j,\psi_2^j)\in W_p^{(2)}(\Omega)$, $j=1,2$, *справедливы оценки*

$$\|\omega_{j\chi}^0(a^1)-\omega_{j\chi}^0(a^2)\|_{W_p^{(2)}(\Omega)},\quad \|w_{3\chi}(a^1)-w_{3\chi}(a^2)\|_{W_p^{(2)}(\Omega)}\leqslant c(\|a^1\|_{W_p^{(2)}(\Omega)}+\|a^2\|_{W_p^{(2)}(\Omega)}+$$
$$+\|w_3^1\|^2_{W_p^{(2)}(\Omega)}+\|w_3^2\|^2_{W_p^{(2)}(\Omega)})\|a^1-a^2\|_{W_p^{(2)}(\Omega)},\tag{41}$$

где c – известная положительная постоянная, зависящая от физико-геометрических характеристик оболочки;

3) $\omega^0_{j*}(z), \omega^0_{jF}(z) \in W^{(2)}_p(\Omega)$, $j = 1, 2$.

Доказательство. Из представлений для $f^j_c(a)$, $f^j_\chi(a)$ в (9), $\varphi_{cj}(a)$, $\varphi_{\chi j}(a)$ в (11) следует, что $f^j_c(a)$ и $\varphi_{cj}(a)$ – линейные вполне непрерывные, а $f^j_\chi(a)$ и $\varphi_{\chi j}(a)$ – нелинейные ограниченные операторы из $W^{(2)}_p(\Omega)$ в $L_p(\Omega)$ и в $C_\alpha(\Gamma)$ соответственно; для $f^3_\chi(a)$, $\varphi_{\chi 3}(a)$ справедливы оценки вида (41), а для $f^j_\chi(a)$, $\varphi_{\chi j}(a)$, $j = 1, 2$, – оценки вида

$$\|f^j_\chi(a^1) - f^j_\chi(a^2)\|_{L_p(\Omega)}, \quad \|\varphi_{\chi j}(a^1) - \varphi_{\chi j}(a^2)\|_{C_\alpha(\Gamma)} \leqslant c(\|w^1_3\|_{W^{(2)}_p(\Omega)} + \\ + \|w^2_3\|_{W^{(2)}_p(\Omega)})\|a^1 - a^2\|_{W^{(2)}_p(\Omega)}, \quad j = 1, 2. \tag{42}$$

Тогда из (38) с учётом ограниченности операторов $\mathfrak{R}_j$ получим, что $\rho^j_c(a)$ и $\mu_{kc}(a)$ – линейные вполне непрерывные, а $\rho^j_\chi(a)$ и $\mu_{k\chi}(a)$ – нелинейные ограниченные операторы из $W^{(2)}_p(\Omega)$ в $L_p(\Omega)$ и в $C_\alpha(\Gamma)$ соответственно, и для $\rho^j_\chi(a)$, $\mu_{k\chi}(a)$ справедливы оценки (41). Следовательно, с учётом свойств интеграла типа Коши из (39) будем иметь, что $\Phi_{kc}(a)$, $\Psi'_{jc}(a)$ – линейные вполне непрерывные, $\Phi_{k\chi}(a)$, $\Psi'_{j\chi}(a)$ – нелинейные ограниченные операторы из $W^{(2)}_p(\Omega)$ в $C_\alpha(\overline{\Omega})$, причём для нелинейных операторов $\Phi_{k\chi}(a)$, $\Psi'_{j\chi}(a)$ справедливы оценки (41).

Исследуем свойства операторов

$$\Phi'_{kc}(a) = \Theta'(\mu_{2kc}(a)), \quad k = 1, 2, \quad \Psi''_{jc}(a) = i^{(j-1)(j-2)/2}\Theta'(\mu_{2j-1c}(a)), \quad j = 1, 2, 3, \tag{43}$$

где оператор $\Theta'(f)$ определён в (32).

Заметим, что функции $\rho^j_c(a)(z)$, $\mu_{kc}(a)(t)$, определённые в (38), являются решениями системы (26) с правой частью $f^j_c(a)(z)$, $j = 1, 2, 3$, $\varphi_{ck}(a)(t)$, $k = \overline{1, 5}$. Поэтому $\mu_c = (\mu_{1c}, \ldots, \mu_{5c})$ можно представить в виде

$$\mu_c(a)(t) = A^{-1}(t)\left[\varphi_c(a)(t) - B(t)\int\limits_\Gamma \frac{\mu_c(a)(\tau)}{\tau - t}\,d\tau - K\mu_c(a)(t) - H\rho_c(a)(t)\right], \tag{44}$$

где $A^{-1}(t) \in C_\beta(\Gamma)$ – матрица, обратная к матрице $A(t)$, $\varphi_c = (\varphi_{c1}, \ldots, \varphi_{c5})$, $K = (K_1, \ldots, K_5)$, $H = (H_1, \ldots, H_5)$, $\rho_c = (\rho^1_c, \rho^2_c, \rho^3_c)$.

Если выражение (44) для $\mu_c(a)(t)$ подставить в (43), после этого переставить порядок интегрирования в повторных интегралах и использовать указанные выше свойства интеграла типа Коши, операторов T, S, соотношений (4.7), (4.9) из [14, с. 28–29] и лемму 1, то после несложных, но достаточно громоздких преобразований получим, что операторы $\Phi'_{kc}(a)$, $k = 1, 2$, $\Psi''_{jc}(a)$, $j = 1, 2, 3$, суть линейные вполне непрерывные операторы из $W^{(2)}_p(\Omega)$ в $L_p(\Omega)$. При помощи аналогичных рассуждений также будем иметь, что $\Phi'_{k\chi}(a)$, $k = 1, 2$, $\Psi''_{j\chi}(a)$ $j = 1, 2, 3$, – нелинейные ограниченные операторы из $W^{(2)}_p(\Omega)$ в $L_p(\Omega)$ и для них справедливы оценки (41). Теперь, если использовать соотношения (15), (16), (19) и оценки (42), утверждение леммы становится очевидным. Лемма доказана.

Систему (40) запишем в виде

$$a - L(a) - G(a) = a_* + \widetilde{a}_F, \tag{45}$$

где

$$L = (L_1, \ldots, L_5), \quad G = (G_1, \ldots, G_5), \quad a_* = (w_{1*}, w_{2*}, w_{3*}, \psi_{1*}, \psi_{2*}),$$
$$\widetilde{a}_F = (\widetilde{w}_{1F}, \widetilde{w}_{2F}, \widetilde{w}_{3F}, \widetilde{\psi}_{1F}, \widetilde{\psi}_{2F}), \quad \omega^0_{1*} = w_{2*} + iw_{1*}, \quad \omega^0_{2*} = \psi_{2*} + i\psi_{1*}, \quad L_3(a) = w_{3c}(a),$$
$$G_3(a) = w_{3\chi}(a), \quad L_{3(n-1)+j}(a) = -\mathrm{Re}\,[i^j\omega^0_{nc}(a)], \quad G_{3(n-1)+j}(a) = -\mathrm{Re}\,[i^j\omega^0_{n\chi}(a)], \quad n, j = 1, 2,$$
$$\widetilde{w}_{jF} = -\mathrm{Re}\,[i^j\omega^0_{1F}], \quad \widetilde{\psi}_{jF} = -\mathrm{Re}\,[i^j\omega^0_{2F}], \quad j = 1, 2, \quad \widetilde{w}_{3F} = w_{3F}.$$

Отметим, что $L(a)$ – линейный вполне непрерывный, $G(a)$ – нелинейный ограниченный операторы в $W_p^{(2)}(\Omega)$, причём для $G(a)$ имеет место оценка (41); $\widetilde{a}_F \in W_p^{(2)}(\Omega)$ – известная функция, зависящая от внешних сил; компоненты вектора a_* даются формулами (28).

Уравнение $a - L(a) = 0$ имеет лишь нулевое решение в пространстве $W_p^{(2)}(\Omega)$. Действительно, если $a \in W_p^{(2)}(\Omega)$ – ненулевое его решение, то, как нетрудно заметить, a является решением системы линейных уравнений равновесия, удовлетворяющим линейным однородным граничным условиям. Тогда, рассуждая как и в случае системы (26), приходим к тому, что вектор a удовлетворяет системе

$$w_{j\alpha^j} - G_{jj}^{\lambda} w_\lambda - B_{jj} w_3 = 0, \quad j = 1,2,$$

$$w_{1\alpha^2} + w_{2\alpha^1} - 2G_{12}^{\lambda} w_\lambda - 2B_{12} w_3 = 0, \quad \psi_{j\alpha^j} - G_{jj}^{\lambda}\psi_\lambda = 0, \quad j = 1,2,$$

$$\psi_{1\alpha^2} + \psi_{2\alpha^1} - 2G_{12}^{\lambda}\psi_\lambda = 0, \quad w_{3\alpha^j} + \psi_j = 0, \quad j = 1,2. \tag{46}$$

Выведем условия, при выполнении которых система (46) имеет только нулевое решение. Для этого введём в рассмотрение вспомогательную систему вида

$$(\omega_1/\Lambda)_{\alpha^1} - (\omega_2/\Lambda)_{\alpha^2} = c_1 f_1(\alpha^1,\alpha^2), \quad (\omega_1/\Lambda)_{\alpha^2} + (\omega_2/\Lambda)_{\alpha^1} = c_1 f_2(\alpha^1,\alpha^2),$$

$$\omega_{1\alpha^1} + \omega_{2\alpha^2} = c_1 f_3(\alpha^1,\alpha^2) \tag{47}$$

относительно функций $\omega_1(\alpha^1,\alpha^2)$, $\omega_2(\alpha^1,\alpha^2) \in C_\alpha^1(\overline{\Omega})$, где $f_j \in W_p^{(2)}(\Omega)$, $j = 1,2,3$, – произвольно фиксированные функции, c_1 – произвольная действительная постоянная.

Решаем систему (47). При помощи комплексной функции $\omega = \omega_1/\Lambda + i\omega_2/\Lambda$ первые два уравнения в (47) представим в виде неоднородного уравнения Коши–Римана $\omega_{\overline{z}} = c_1(f_1 + {}$ ${}+ if_2)/2$, общее решение которого даётся формулой $\omega = \varphi(z) + c_1 T(f_1 + if_2)(z)/2$, откуда для ω_j получаем представления

$$\omega_1 = \Lambda(\alpha^1,\alpha^2)\operatorname{Re}\varphi(z) + c_1 g_1(\alpha^1,\alpha^2), \quad \omega_2 = \Lambda(\alpha^1,\alpha^2)\operatorname{Im}\varphi(z) + c_1 g_2(\alpha^1,\alpha^2),$$

$$g_1 = \Lambda \operatorname{Re} T(f_1 + if_2)/2, \quad g_2 = \Lambda \operatorname{Im} T(f_1 + if_2)/2, \quad z = \alpha^1 + i\alpha^2, \tag{48}$$

где $\varphi(z)$ – произвольная голоморфная в области Ω функция, принадлежащая пространству $C_\alpha^1(\overline{\Omega})$, оператор T определён в (13). Из условия (b) и указанных выше свойств оператора T следует, что функции g_j, $j = 1,2$, принадлежат пространству $W_p^{(3)}(\Omega)$.

Выражения решений ω_1, ω_2 из (48) подставим в третье уравнение системы (47). Тогда относительно голоморфной функции $\varphi(z)$ получим уравнение вида

$$\operatorname{Re}[\varphi'(z) + (\ln\Lambda)_z \varphi(z)] = c_1 g_3(\alpha^1,\alpha^2), \quad g_3(\alpha^1,\alpha^2) = (f_3 - g_{1\alpha^1} - g_{2\alpha^2})/(2\Lambda), \tag{49}$$

где функция g_3 принадлежит пространству $W_p^{(2)}(\Omega)$.

Предположим, что в области Ω выполняется условие

$$\Lambda_0(\alpha^1,\alpha^2) = (\ln\Lambda)_{z\overline{z}} \neq 0, \tag{50}$$

т.е. функция $\ln\Lambda(\alpha^1,\alpha^2)$ в области Ω не является гармонической.

Заметим, что условие (50) в силу уравнения Гаусса [18, с. 193] означает, что гауссова кривизна срединной поверхности оболочки не равна нулю.

Найдём решение уравнения (49). Заметим, что функция $\operatorname{Re}\varphi'(z)$, как действительная часть голоморфной функции $\varphi'(z)$, в области Ω является гармонической, т.е. $[\operatorname{Re}\varphi'(z)]_{z\overline{z}} = {}$ ${}= 0$. Следовательно, в области Ω при любой постоянной c_1 должно выполняться условие $[c_1 g_3 - \operatorname{Re}((\ln\Lambda)_z\varphi)]_{z\overline{z}} = 0$, которое можно записать в виде $\operatorname{Re}(\Lambda_0\varphi)_z - c_1 g_{3z\overline{z}} = 0$, $c_1 = \mathrm{const}$, $z \in \Omega$, откуда с учётом условий (50) и $g_{3z\overline{z}} \neq 0$, $z \in \Omega$, получим $\operatorname{Re}(\Lambda_0\varphi)_z = 0$, $c_1 = 0$. Итак, голоморфная функция $\varphi(z)$ удовлетворяет системе уравнений $\operatorname{Re}(\Lambda\varphi)_z = 0$, $\operatorname{Re}(\Lambda_0\varphi)_z = 0$, которая эквивалентна системе

$$2\Lambda u_{\alpha^1} + \Lambda_{\alpha^1} u + \Lambda_{\alpha^2} v = 0, \quad 2\Lambda_0 u_{\alpha^1} + \Lambda_{0\alpha^1} u + \Lambda_{0\alpha^2} v = 0,$$
$$u_{\alpha^1} = v_{\alpha^2}, \quad u_{\alpha^2} = -v_{\alpha^1}, \quad \Lambda_0/\Lambda \neq \mathrm{const}, \tag{51}$$

где $\varphi(z) = u(\alpha^1, \alpha^2) + iv(\alpha^1, \alpha^2)$, функция $\Lambda_0(\alpha^1, \alpha^2)$ определена в (50).

Исключив из первых двух уравнений в (51) производную u_{α^1}, получим

$$v = \Lambda_1 u, \quad \Lambda_1 \equiv \Lambda_1(\alpha^1, \alpha^2) = -(\Lambda_0/\Lambda)_{\alpha^1}/(\Lambda_0/\Lambda)_{\alpha^2} \in W_p^{(1)}(\Omega). \tag{52}$$

Теперь, если выражение функции v из (52) подставить в первое уравнение (51), относительно функции u получим уравнение

$$u_{\alpha^1} + \Lambda_2 u = 0, \quad \Lambda_2 \equiv \Lambda_2(\alpha^1, \alpha^2) = [(\ln\Lambda)_{\alpha^1} + (\ln\Lambda)_{\alpha^2}\Lambda_1]/2 \in W_p^{(1)}(\Omega),$$

общее решение которого даётся формулой

$$u = c(\alpha^2)\Lambda_3, \quad \Lambda_3 \equiv \Lambda_3(\alpha^1, \alpha^2) = \exp\left[-\int\limits_{\alpha_0^1}^{\alpha^1} \Lambda_2(\beta^1, \alpha^2)d\beta^1\right] \in W_p^{(1)}(\Omega), \tag{53}$$

где $c(\alpha^2)$ – произвольная действительная функция переменной α^2, принадлежащая пространству C_α^1, $(\alpha_0^1, \alpha_0^2) \in \overline{\Omega}$ – произвольно фиксированная точка.

Тогда для функции v с учётом (52) будем иметь представление

$$v = \Lambda_1\Lambda_3 c(\alpha^2). \tag{54}$$

Теперь функции $u(\alpha^1, \alpha^2)$, $v(\alpha^1, \alpha^2)$ из (53), (54) подставим в третье и четвертое уравнения системы (51). В результате относительно функции $c(\alpha^2)$ почти всюду в области Ω получим уравнения

$$\Lambda_3 c'(\alpha^2) + [\Lambda_{3\alpha^2} + (\Lambda_1\Lambda_3)_{\alpha^1}]c(\alpha^2) = 0, \quad \Lambda_1\Lambda_3 c'(\alpha^2) - [\Lambda_{3\alpha^1} - (\Lambda_1\Lambda_3)_{\alpha^2}]c(\alpha^2) = 0,$$

из которых видно, что $c(\alpha^2) \equiv 0$, следовательно, из формул (53), (54) будем иметь $\varphi(z) \equiv 0$ в $\overline{\Omega}$. Тогда из соотношений (48) получим $\omega_1 = \omega_2 \equiv 0$ в $\overline{\Omega}$.

Перейдём к нахождению функций ψ_1, ψ_2. С этой целью четвертое и пятое равенства системы (46) сложим и вычтем друг из друга. Принимая во внимание соотношения (4) для символов Кристоффеля, будем иметь систему

$$(\psi_1/\Lambda)_{\alpha^1} - (\psi_2/\Lambda)_{\alpha^2} = 0, \quad (\psi_1/\Lambda)_{\alpha^2} + (\psi_2/\Lambda)_{\alpha^1} = 0, \quad \psi_{1\alpha^1} + \psi_{2\alpha^2} = 0,$$

которая получается из системы (47) при $f_j \equiv 0$, $j = 1, 2, 3$, $\omega_1 = \psi_1$, $\omega_2 = \psi_2$. Поэтому в силу доказанного выше $\psi_1(z) = \psi_2(z) \equiv 0$ в $\overline{\Omega}$ и из последних двух равенств в (46) следует, что $w_3 = c_1 = \mathrm{const}$ в $\overline{\Omega}$. Подставляя это значение функции w_3 в первые три равенства системы (46), при помощи аналогичных рассуждений снова приходим к системе вида (47), в которой $\omega_1 = w_1$, $\omega_2 = w_2$, $f_1 = (B_{11} - B_{22})/\Lambda$, $f_2 = 2B_{12}/\Lambda$, $f_3 = B_{11} + B_{22}$. В силу условия (a) имеем $f_j \in W_p^{(2)}(\Omega)$, $j = 1, 2, 3$, при этом условие $g_{3z\overline{z}} \neq 0$ примет вид

$$[(B_{11} + B_{22})/\Lambda - \operatorname{Re}(\ln\Lambda)_z \operatorname{Re} Tf + \operatorname{Im}(\ln\Lambda)_z \operatorname{Im} Tf - \operatorname{Re} Sf]_{z\overline{z}} \neq 0,$$
$$f = (B_{11} - B_{22} + 2iB_{12})/\Lambda, \tag{55}$$

где операторы T, S определены в (13), (14). Следовательно, $w_j \equiv 0$, $j = 1, 2, 3$, в $\overline{\Omega}$. Итак, уравнение $a - L(a) = 0$ имеет только нулевое решение в $W_p^{(2)}(\Omega)$. Таким образом, существует обратный оператор $(I-L)^{-1}$, ограниченный в $W_p^{(2)}(\Omega)$, с помощью которого уравнение (45) сведётся к эквивалентному уравнению

$$a - G_*(a) = a_F, \tag{56}$$

где $G_*(a) = (I-L)^{-1}G(a)$, $a_F = (I-L)^{-1}\widetilde{a}_F$.

Отметим, что вектор $a_c = (I-L)^{-1}a_*$ является решением однородной системы линейных уравнений равновесия, удовлетворяющим однородным линейным граничным условиям. Поэтому в силу доказанного выше $a_c \equiv 0$, что и учтено нами при переходе к уравнению (56).

Также отметим, что вектор a_F в (56) зависит только от внешних сил и $a_F = 0$, если внешние силы отсутствуют.

Лемма 3. *Пусть выполнены условия (a), (b), (c), (d). Тогда:*

1) $G_*(a)$ – нелинейный ограниченный оператор в $W_p^{(2)}(\Omega)$, причём для любых векторов $a^j = (w_1^j, w_2^j, w_3^j, \psi_1^j, \psi_2^j)$, $j = 1,2$, справедлива оценка

$$\|G_*(a^1)-G_*(a^2)\|_{W_p^{(2)}(\Omega)} \leqslant c_*(\|a^1\|_{W_p^{(2)}(\Omega)}+\|a^2\|_{W_p^{(2)}(\Omega)}+\|w_3^1\|^2_{W_p^{(2)}(\Omega)}+\|w_3^2\|^2_{W_p^{(2)}(\Omega)})\|a^1-a^2\|_{W_p^{(2)}(\Omega)},$$

где c_* – известная положительная постоянная, зависящая от физико-геометрических характеристик оболочки;

2) $a_F \in W_p^{(2)}(\Omega)$.

Справедливость этой леммы вытекает из леммы 2 с учётом указанных выше свойств операторов $(I-L)^{-1}$ и G.

Исследуем разрешимость уравнения (56) в пространстве $W_p^{(2)}(\Omega)$. Используя лемму 3, для любых $a^j \in W_p^{(2)}(\Omega)$, $j = 1,2$, принадлежащих шару $\|a\|_{W_p^{(2)}(\Omega)} < r$, получаем

$$\|G_*(a^1) - G_*(a^2)\|_{W_p^{(2)}(\Omega)} \leqslant q_*\|a^1 - a^2\|_{W_p^{(2)}(\Omega)}, \quad q_* = 2c_*r(1+r).$$

Предположим, что радиус r шара и внешние силы таковы, что выполняются неравенства

$$q_* < 1, \quad \|a_F\|_{W_p^{(2)}(\Omega)} < (1-q_*)r. \tag{57}$$

Тогда к уравнению (56) можно применить принцип сжатых отображений [19, с. 146], согласно которому уравнение (56) в шаре $\|a\|_{W_p^{(2)}(\Omega)} < r$ имеет единственное решение вида $a = \mathbb{R}(a_F) \in W_p^{(2)}(\Omega)$, где $\mathbb{R}$ – резольвента оператора G_*.

Заметим, что если внешняя нагрузка отсутствует, то задача (1), (2) имеет только нулевое решение.

Вернёмся к условиям разрешимости (37), в которых под $a = (w_1, w_2, w_3, \psi_1, \psi_2) \in W_p^{(2)}(\Omega)$ будем подразумевать решение задачи (1), (2). Используя равенства (1) и (2), убеждаемся в том, что условия разрешимости (37) выполняются.

Таким образом, доказана следующая

Теорема. *Пусть выполнены условия (a), (b), (c), (d), (36), (50), (55) и неравенства (57). Тогда задача (1), (2) имеет единственное обобщённое решение $a = (w_1, w_2, w_3, \psi_1, \psi_2) \in W_p^{(2)}(\Omega)$, $2 < p < 4/(2-\beta)$.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Галимов К.З.* Основы нелинейной теории тонких оболочек. Казань, 1975.
2. *Ворович И.И.* Математические проблемы нелинейной теории пологих оболочек. М., 1989.
3. *Морозов Н.Ф.* Избранные двумерные задачи теории упругости. Л., 1978.
4. *Карчевский М.М.* Исследование разрешимости нелинейной задачи о равновесии пологой незакреплённой оболочки // Уч. зап. Казанского. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2013. Т. 155. № 3. С. 105–110.

5. *Тимергалиев С.Н.* Теоремы существования в нелинейной теории тонких упругих оболочек. Казань, 2011.
6. *Тимергалиев С.Н.* О существовании решений геометрически нелинейных задач для пологих оболочек типа Тимошенко со свободными краями // Изв. вузов. Математика. 2014. № 3. С. 40–56.
7. *Тимергалиев С.Н.* К вопросу о существовании решений нелинейной краевой задачи для системы дифференциальных уравнений с частными производными теории пологих оболочек типа Тимошенко со свободными краями // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51. № 3. С. 373–386.
8. *Тимергалиев С.Н., Харасова Л.С.* Исследование разрешимости одной краевой задачи для системы нелинейных дифференциальных уравнений теории пологих оболочек типа Тимошенко // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52. № 5. С. 651–664.
9. *Тимергалиев С.Н.* Метод интегральных уравнений в нелинейных краевых задачах для пологих оболочек типа Тимошенко со свободными краями // Изв. вузов. Математика. 2017. № 4. С. 59–75.
10. *Тимергалиев С.Н.* К проблеме разрешимости нелинейных задач равновесия пологих оболочек типа Тимошенко // Прикл. математика и механика. 2018. Т. 82. № 1. С. 98–113.
11. *Тимергалиев С.Н.* Метод интегральных уравнений исследования разрешимости краевых задач для системы нелинейных дифференциальных уравнений теории пологих неоднородных оболочек типа Тимошенко // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 2. С. 239–255.
12. *Тимергалиев С.Н.* К проблеме разрешимости нелинейных краевых задач для произвольных изотропных пологих оболочек типа Тимошенко со свободными краями // Изв. вузов. Математика. 2021. № 4. С. 90–107.
13. *Тимергалиев С.Н.* О разрешимости нелинейных краевых задач для системы дифференциальных уравнений равновесия пологих анизотропных оболочек типа Тимошенко с незакреплёнными краями // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 4. С. 507–525.
14. *Векуа И.Н.* Обобщённые аналитические функции. М., 1988.
15. *Мусхелишвили Н.И.* Сингулярные интегральные уравнения. М., 1962.
16. *Пресдорф З.* Некоторые классы сингулярных уравнений. М., 1979.
17. *Гахов Ф.Д.* Краевые задачи. М., 1963.
18. *Векуа И.Н.* Основы тензорного анализа и теории ковариантов. М., 1978.
19. *Красносельский М.А.* Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. М., 1956.

Казанский государственный
архитектурно-строительный университет

Поступила в редакцию 17.12.2022 г.
После доработки 13.02.2023 г.
Принята к публикации 16.03.2023 г.