ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 6, с. 707–711

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.925.51+517.926

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ КОЭФФИЦИЕНТОВ КВАДРАТИЧНОЙ ФУНКЦИИ ЛЯПУНОВА С ЗАДАННЫМИ СВОЙСТВАМИ В СЛУЧАЕ КРАТНЫХ КОРНЕЙ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

© 2023 г. О. Г. Антоновская

Для непрерывных и дискретных линейных автономных систем обсуждается возможность выбора коэффициентов квадратичной функции Ляпунова, обеспечивающих выполнение условия знакоотрицательности её первой производной (первой разности) с заданным запасом в случае кратных корней характеристического уравнения.

DOI: 10.31857/S0374064123060018, EDN: FFHCNR

Введение. В задачах исследования устойчивости прямым методом Ляпунова как непрерывных, так и дискретных систем, широкое применение находят функции Ляпунова квадратичного вида, построенные для соответствующих линейных систем [1, с. 120–132; 2, с. 33–45]. При решении прикладных динамических задач, когда интерес представляют не только качественные, но и количественные характеристики системы, возникает необходимость использования ограничений на величину первой производной (первой разности) функции Ляпунова в силу соответствующей линейной системы [3, 4].

В работе [4] для случая различных корней характеристического уравнения решается задача такого выбора коэффициентов квадратичной функции Ляпунова с помощью простых соотношений, что выполнение неравенства $\dot V(x) < 0$ $(\Delta V(x) < 0)$ на заданной поверхности уровня $V(x) = V_0$ обеспечивается с заданным (не обязательно максимальным) запасом. Здесь $x \in \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$. В настоящей работе обсуждается возможность решения аналогичной задачи в случае кратных корней характеристического уравнения. Рассматривается случай, когда матрица канонической системы представляет собой жорданову клетку (жорданов блок), т.е. все корни характеристического уравнения действительны и равны между собой.

1. Выбор коэффициентов квадратичной функции Ляпунова, удовлетворяющей заданному ограничению, для линейных систем дифференциальных уравнений. Коэффициенты квадратичной функции Ляпунова, для которой выполнение неравенства $\dot V(x) < 0$ для производной квадратичной формы $V(x)$ в силу линейной автономной системы обеспечивается с заданным запасом δ (т.е. $\dot V(x) < \delta V(x)$, $x \neq 0$), естественно выбирать с использованием следующего утверждения, доказанного в работах [3, 5], а именно: пусть дана система дифференциальных уравнений

$$\dot x = Ax, \quad x = (x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

такая, что корни λ_1, λ_2, $\ldots$, λ_n характеристического уравнения имеют отрицательные действительные части. И пусть положительно определённая квадратичная форма задана соотношением

$$V(x) = x^{\mathrm{T}} K x \quad (K^{\mathrm{T}} = K). \tag{2}$$

Элементы постоянных $n\times n$-матриц $A = (a_{ij})_{ij=1}^n$ и $K = (K_{ij})_{ij=1}^n$ вещественные. Рассмотрим первую производную квадратичной формы (2) в силу системы (1)

$$\dot V_{(1)}(x) = x^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}} K + KA)x. \tag{3}$$

Теорема 1. *Пусть квадратичная форма (2) является функцией Ляпунова системы (1) и на заданной поверхности уровня $V(x) = V_0 = \mathrm{const} > 0$ функции $V(x)$ максимальное* *значение её первой производной (3) в силу системы (1) равно* δV_0. *Тогда для собственных значений* λ_i, $i=\overline{1,n}$, *матрицы коэффициентов системы (1) справедливо неравенство* $2\max\limits_{i=\overline{1,n}}\operatorname{Re}\lambda_i\leqslant\delta<0$, *а* δ *является наибольшим корнем уравнения*

$$\det(A^{\mathrm{T}}K+KA-\mu K)=0. \tag{4}$$

Для случая, когда все корни характеристического уравнения действительны и различны, в работе [4] предложена методика выбора коэффициентов квадратичной формы (2), основанная на переходе с помощью линейного преобразования неизвестных к каноническому виду соответствующей дифференциальной системы, имеющему диагональный вид.

В случае, когда среди корней характеристического уравнения есть кратные действительные корни, проблема состоит в том, что матрицу системы не всегда можно привести к диагональному виду [6, с. 168–172; 7, с. 117–122]. Следует отметить, что всегда существует линейное невырожденное преобразование координат

$$x=B\xi,\quad \xi=(\xi_1,\ldots,\xi_n)^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^n,\quad B=(b_{ij})_{i,j=1}^n,$$

приводящее систему к каноническому виду [8, с. 121]. Но даже в случае системы второго порядка канонический вид линеаризованной системы может быть как

$$\dot\xi_1=\lambda\xi_1,\quad \dot\xi_2=\lambda\xi_2, \tag{5}$$

так и

$$\dot\xi_1=\lambda\xi_1+\xi_2,\quad \dot\xi_2=\lambda\xi_2 \tag{6}$$

(λ – кратный корень характеристического уравнения). В первом случае, какую бы положительно определённую квадратичную форму

$$V(\xi_1,\xi_2)=K_{11}\xi_1^2+2K_{12}\xi_1\xi_2+K_{22}\xi_2^2 \tag{7}$$

мы ни взяли, первая производная в силу (5) будет равна $\dot V_{(5)}(x)(\xi_1,\xi_2)=2\lambda V(\xi_1,\xi_2)$, т.е. $\max\limits_{x\neq0}\dot V_{(5)}(x)/V(x)=2\lambda$. Во втором случае уравнение (4) запишется в виде

$$\begin{vmatrix}(2\lambda-\mu)K_{11} & (2\lambda-\mu)K_{12}+K_{11}\\ (2\lambda-\mu)K_{12}+K_{11} & (2\lambda-\mu)K_{22}+2K_{12}\end{vmatrix}=0. \tag{8}$$

Следует отметить, что в этом случае значение $\mu_{\max}=2\lambda$ недостижимо, так как приводит к соотношению $K_{11}=0$, невозможному для положительно определённой формы (7). Согласно (8) максимальный корень этого уравнения будет равен

$$\mu_{\max}=2\lambda+\frac{K_{11}}{\sqrt{K_{11}K_{22}-K_{12}^2}}. \tag{9}$$

И поскольку значение $K_{12}=0$ даёт минимум (9) при фиксированных значениях остальных коэффициентов (7), квадратичную функцию Ляпунова можно искать в виде

$$V(\xi_1,\xi_2)=K_{11}\xi_1^2+K_{22}\xi_2^2. \tag{10}$$

В этом случае (9) примет вид

$$\mu_{\max}=2\lambda+\sqrt{\frac{K_{11}}{K_{22}}},$$

а значение $k=K_{11}/K_{22}$, если $\mu_{\max}=\delta$ $(2\lambda<\delta<0)$, будет равно $k=(2\lambda-\delta)^2$. (Тот факт, что $\max\dot V/V\geqslant2\lambda$, следует из теоремы 1.)

Таким образом, имеет место следующая

Теорема 2. *Для любого* $\delta \in (2\lambda, 0)$ *положительно определённая квадратичная форма (10), коэффициенты которой удовлетворяют условию* $2\lambda + \sqrt{k} = \delta$, *где* $k = K_{11}/K_{22}$, *является функцией Ляпунова системы (6), причём* $\max \dot{V}_{(6)}/V = \delta$. *При* $\delta \leqslant 2\lambda$ *квадратичной функции Ляпунова с указанным свойством не существует.*

В случае, когда матрица канонической системы содержит жорданову клетку порядка $n > 2$, квадратичную функцию Ляпунова, подобно (10), будем подбирать в виде

$$V(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = \sum_{i=1}^{n} K_{ii}\xi_i^2. \tag{11}$$

Тогда соответствующий ей блок в уравнении (4) можно записать как

$$D_n(\mu, K_{11}, K_{22}, \ldots, K_{nn}) = 0, \tag{12}$$

где при $n \geqslant 4$

$$D_n(\mu, K_{11}, K_{22}, \ldots, K_{nn}) = (2\lambda - \mu)K_{11}D_{n-1}(\mu, K_{22}, K_{33}, \ldots, K_{nn}) -$$
$$- K_{11}^2 D_{n-2}(\mu, K_{33}, \ldots, K_{nn}),$$

причём

$$D_2(\mu, K_{11}, K_{22}) = (2\lambda - \mu)^2 K_{11}K_{22} - K_{11}^2,$$
$$D_3(\delta, K_{11}, K_{22}, K_{33}) = (2\lambda - \mu)K_{11}D_2(\delta, K_{22}, K_{33}) - (2\lambda - \mu)K_{11}^2 K_{33}.$$

Таким образом, имеет место следующая

Теорема 3. *Для любого* $\delta \in (2\lambda, 0)$ *положительно определённая квадратичная форма (11), коэффициенты которой удовлетворяют условию* $\mu_{\max} = \delta$, *где* $\mu_{\max}$ *– наибольший корень уравнения (12), существует и является функцией Ляпунова системы*

$$\dot{\xi} = J_n\xi, \tag{13}$$

где J_n *– жорданова клетка порядка* n, *причём* $\max \dot{V}/V_{(13)} = \delta$. *При* $\delta \leqslant 2\lambda$ *квадратичной функции Ляпунова с указанным свойством не существует.*

Примем в случае $n = 3$, что

$$\mu_{\max} = 2\lambda + \sqrt{\frac{K_{11}}{K_{22}} + \frac{K_{22}}{K_{33}}}.$$

Если считать, что все отношения $K_{i-1,i-1}/K_{ii} = k$, $i = \overline{2, n}$, равны между собой, то для любого $\mu \in (2\lambda, 0)$ [5], разделив обе части (12) на $K_{11}K_{22}\cdots K_{nn}$, получим

$$d_n(\mu, k) = (2\lambda - \mu)d_{n-1}(\mu, k) - kd_{n-2}(\mu, k) = 0, \tag{14}$$

где $d_n = D_n/(K_{11}K_{22}\cdots K_{nn})$. При этом

$$d_2(\mu, k) = (2\lambda - \mu)^2 - k, \quad d_3(\mu, k) = (2\lambda - \mu)((2\lambda - \mu)^2 - 2k).$$

Из теоремы 3 следует

Следствие 1. *Для любого* $\delta \in (2\lambda, 0)$ *положительно определённая квадратичная форма (11), коэффициенты которой удовлетворяют условию* $\mu_{\max} = \delta$, *где* $\mu_{\max}$ *– наибольший корень уравнения (14), и* $k = K_{i-1,i-1}/K_{ii}$, $i = \overline{2, n}$, *существует и является функцией Ляпунова системы (13), причём* $\max \dot{V}_{(13)}/V = \delta$. *При* $\delta \leqslant 2\lambda$ *квадратичной функции Ляпунова с указанным свойством не существует.*

Таким образом, при $n = 3$ получим, что $\mu_{\max} = 2\lambda + \sqrt{2k}$, при $n = 4$ $\mu_{\max} = 2\lambda + (\sqrt{5} + 1)\sqrt{k}/2$, при $n = 5$ $\mu_{\max} = 2\lambda + \sqrt{3k}$, при $n = 7$ $\mu_{\max} = 2\lambda + (\sqrt{2} + 2)\sqrt{k}$ и т.д. А в предположении, что задано $\delta \in (2\lambda, 0)$, из равенства $\mu_{\max} = \delta$ можно получить соответствующее ему значение k, а именно: при $n = 3$ $k = (2\lambda - \delta)^2/2$, при $n = 4$ $k = (3 - \sqrt{5})(2\lambda - \delta)^2/2$, при $n = 5$ $k = (2\lambda - \delta)^2/3$, при $n = 7$ $k = (2\lambda - \delta)^2/(6 + 4\sqrt{2})$ и т.д.

Замечание 1. Если некоторому корню характеристического уравнения соответствует жорданов блок, содержащий несколько различных жордановых клеток, то для каждой клетки выбор соответствующих коэффициентов в квадратичной функции Ляпунова может осуществляться по указанному выше принципу. Тогда полученная в результате квадратичная функция Ляпунова будет обладать заданными свойствами.

Переходя обратно от канонических переменных к исходным и задавая конкретное числовое значение величины $K_{11} > 0$, получаем квадратичную функцию Ляпунова, которая будет удовлетворять условию $\max \dot{V}_{(1)}/V = \delta$ для выбранного $\delta \in (2\lambda, 0)$ [5].

2. Выбор коэффициентов квадратичной функции Ляпунова, удовлетворяющей заданному ограничению, для линейных точечных отображений. Коэффициенты квадратичной функции Ляпунова, для которой выполнение неравенства $\Delta V(x) < 0$ для первой разности квадратичной формы $V(x)$ в силу функций последования линейного точечного отображения обеспечивается с заданным запасом δ (т.е. $\Delta V(x) < \delta V(x)$, $x \neq 0$), естественно выбирать с использованием теоремы, подобной теореме 1, доказанной в работе [3]. Для случая когда все корни характеристического уравнения действительны и различны, в [4] предложена методика выбора коэффициентов (2), основанная на переходе к каноническому виду точечного отображения. В случае когда среди корней характеристического уравнения есть кратные действительные корни будем рассуждать аналогично случаю дифференциальной системы, а именно: пусть дано линейное точечное отображение вида

$$\bar{x} = Ax, \quad x = (x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{т}} \in \mathbb{R}^n, \tag{15}$$

такое, что корни z_1, z_2, $\ldots$, z_n характеристического уравнения, соответствующего неподвижной точке $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$, лежат внутри круга единичного радиуса, действительны и равны между собой, т.е. $z_1 = z_2 = \ldots = z_n = z$. Рассмотрим первую разность квадратичной формы (2) в силу (15)

$$\Delta_{(15)} V(x) = x^{\mathrm{т}}(A^{\mathrm{т}} K A - K)x.$$

Утверждения, аналогичные теоремам 2, 3 и следствию 1, в канонических переменных будут иметь следующий вид.

Теорема 4. *Для любого $\delta \in (z^2 - 1, 0)$ положительно определённая квадратичная форма (10), коэффициенты которой удовлетворяют условию $k = (1 - z^2 - \delta)^2/(1 + \delta)$, где $k = K_{11}/K_{22}$, является функцией Ляпунова для отображения*

$$\bar{\xi}_1 = z\xi_1 + \xi_2, \quad \bar{\xi}_2 = z\xi_2, \tag{16}$$

причём $\max \Delta_{(16)} V/V = \delta$. При $\delta \leqslant z^2 - 1$ квадратичной функции Ляпунова с указанным свойством не существует.

Теорема 5. *Для любого $\delta \in (z^2 - 1, 0)$ положительно определённая квадратичная форма (11), коэффициенты которой удовлетворяют условию $\mu_{\max} = \delta$, где $\mu_{\max}$ – наибольший корень уравнения*

$$((z^2 - 1 - \mu)K_{11})\tilde{D}_{n-1}(\mu, K_{11}, K_{22}, \ldots, K_{nn}) - z^2 K_{11}^2 \tilde{D}_{n-2}(\mu, K_{22}, \ldots, K_{nn}) = 0,$$

в котором

$$D_2(\mu, K_{11}, K_{22}, K_{33}) = ((z^2 - 1 - \mu)K_{22} + K_{11})((z^2 - 1 - \mu)K_{33} + K_{22}) - z^2 K_{22}^2,$$

$$D_3(\mu, K_{11}, K_{22}, K_{33}) = ((z^2 - 1 - \mu)K_{22} + K_{11})\tilde{D}_2(\mu, K_{22}, K_{33}, K_{44}) - z^2 K_{22}^2((z^2 - 1 - \mu)K_{44} + K_{33}),$$

существует и является функцией Ляпунова для отображения

$$\bar{\xi} = J_n \xi, \tag{17}$$

где J_n *– жорданова клетка порядка* n, *причём* $\max \Delta_{(17)} V/V = \delta$. *При* $\delta \leqslant z^2 - 1$ *квадратичной функции Ляпунова с указанным свойством не существует.*

Следствие 2. *Для любого* $\delta \in (z^2 - 1, 0)$ *положительно определённая квадратичная форма (11), коэффициенты которой удовлетворяют условию* $\mu_{\max} = \delta$, *где* $\mu_{\max}$ *– наибольший корень уравнения*

$$(z^2 - 1 - \mu)\tilde{d}_{n-1}(\mu, k) - z^2 k \tilde{d}_{n-2}(\mu, k) = 0, \tag{18}$$

в котором

$$\tilde{d}_n(\mu, k) = (z^2 - 1 - \mu + k)\tilde{d}_{n-1}(\mu, k) - z^2 k \tilde{d}_{n-2}(\mu, k),$$

$$\tilde{d}_2(\mu, k) = (z^2 - 1 - \mu + k)^2 - z^2 k,$$

$$\tilde{d}_3(\mu, k) = (z^2 - 1 - \mu + k)\tilde{d}_2(\mu, k) - z^2 k (z^2 - 1 - \mu + k),$$

а $k = K_{i-1,i-1}/K_{ii}$ *при всех* $i = \overline{2, n}$, *существует и является функцией Ляпунова для отображения (17), причём* $\max \Delta_{(17)} V/V = \delta$. *При* $\delta \leqslant z^2 - 1$ *квадратичной функции Ляпунова с указанным свойством не существует.*

Так при $n = 2$ максимальный корень уравнения (18) есть $\mu_{\max} = z^2 - 1 + (k + \sqrt{k^2 + 4z^2 k})/2$. При $n = 3$ для любого $\delta \in (z^2 - 1, 0)$ найдём значения $k = (1 - z^2 + \delta)(\sqrt{1 + \delta} \pm |z|)/\sqrt{1 + \delta}$. А, скажем, при $n = 5$ для любого $\delta \in (z^2 - 1, 0)$ найдём $k = (1 - z^2 + \delta)/(1 + \sqrt{3}|z|)$ и т.д.

Замечание 2. Если некоторому корню характеристического уравнения соответствует жорданов блок, содержащий несколько различных жордановых клеток, то для каждой клетки выбор соответствующих коэффициентов в квадратичной функции Ляпунова может осуществляться по указанному выше принципу. Тогда полученная в результате квадратичная функция Ляпунова будет обладать заданными свойствами.

Переходя обратно от канонических переменных к исходным и задавая конкретное числовое значение величины $K_{11} > 0$, получаем квадратичную функцию Ляпунова для точечного отображения (15) такую, что $\max \Delta_{(15)} V/V = \delta$ для выбранного $\delta \in (z^2 - 1, 0)$.

Заключение. Приведённые в статье результаты дополняют результаты, полученные для случая различных корней характеристического уравнения [4], о построении квадратичных функций Ляпунова, удовлетворяющих ограничениям на первую производную (первую разность) в силу системы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Барбашин Е.А.* Функции Ляпунова. М., 1970.
2. *Косякин А.А., Шамриков Б.М.* Колебания в цифровых автоматических системах. М., 1983.
3. *Антоновская О.Г.* О построении квадратичной функции Ляпунова с заданными свойствами // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49. № 9. С. 1220–1224.
4. *Антоновская О.Г.* Об определении коэффициентов квадратичной функции Ляпунова с заданными свойствами // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52. № 3. С. 275–281.
5. *Антоновская О.Г.* О сохранении квадратичной функции Ляпунова линейной дифференциальной автономной системы при стационарных возмущениях её коэффициентов // Дифференц. уравнения. 2023. Т. 59. № 3. С. 295–302.
6. *Петровский И.Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М., 1984.
7. *Ильин В.А., Позняк Э.Г.* Линейная алгебра. М., 1999.
8. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения. М.; Л., 1950.

Нижегородский государственный
архитектурно-строительный университет

Поступила в редакцию 21.11.2022 г.
После доработки 18.05.2023 г.
Принята к публикации 19.05.2023 г.