ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 6, с. 712–725

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.93

КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ТРЁХПОЗИЦИОННЫМ ГИСТЕРЕЗИСНЫМ РЕЛЕ БЕЗ ВЫХОДА В ЗОНЫ НАСЫЩЕНИЯ

© 2023 г. В. В. Евстафьева

Исследовано обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка с существенной нелинейностью и внешним возмущением в виде непрерывной периодической функции. Нелинейность задана релейной симметричной характеристикой с гистерезисом, мёртвой зоной и зонами насыщения. Рассмотрен обход характеристики без выхода в зоны насыщения за некоторое конечное заданное время и время, соизмеримое с периодом функции возмущения. Получены условия существования колебательного решения с замкнутой фазовой траекторией и четырьмя точками переключения за время одного обхода характеристики. Доказаны теоремы существования периодических решений, в том числе решений с симметричной траекторией. Приведён численный пример.

DOI: 10.31857/S037406412306002X, EDN: FFLCJG

1. Введение. Постановка задачи. Дифференциальные уравнения и системы с релейными, в том числе симметричными, характеристиками исследуются в задачах теории автоматического управления достаточно давно [1]. Существование периодических и колебательных решений (режимов), а также изучение их свойств и фазовых траекторий являются актуальными вопросами современной теории (см., например, [2–18]).

Из последних статей автора, в том числе в соавторстве, по изучению возмущённых релейных систем с гистерезисом отметим [12–14] (с двухпозиционным реле), [10, 16, 18] (с трёхпозиционным реле). В этих работах применён общий подход к исследованию, который заключается в решении задачи Коши с помощью *метода припасовывания* и методов решения систем трансцендентных уравнений. В данной статье развивается это направление и продолжается начатое в [10] изучение обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с релейной нелинейностью гистерезисного типа и гармоническим возмущением.

Рассматривается обыкновенное дифференциальное уравнение вида

$$\ddot{y}(t) = \lambda\dot{y}(t) + \alpha N(y(t)) + \beta\cos(\omega t + \varphi). \tag{1}$$

Здесь t – время ($t \geqslant 0$), λ, α, β, ω и φ – ненулевые вещественные постоянные, причём $\alpha < 0$, $N(y(t))$ – существенная нелинейность, которая задаётся релейной характеристикой

$$N(y) = \begin{cases} -C, & \text{если } y \leqslant -B \text{ или } -B < y \leqslant -A \text{ и } N_- = -C, \\ 0, & \text{если } -A < y < A \text{ или } -B < y < B \text{ и } N_- = 0, \\ C, & \text{если } y \geqslant B \text{ или } A \leqslant y < B \text{ и } N_- = C, \end{cases} \tag{2}$$

где A, B, C – положительные параметры и $A < B$, N_- – предыстория $N(y)$. Характеристика (2) включает зоны насыщения на множествах $(-\infty, -B]$ и $[B, +\infty)$, зону нечувствительности (мёртвую зону) на интервале $(-A, A)$ и зоны неоднозначности (гистерезис) на полуотрезках $(-B, -A]$ и $[A, B)$.

В статьях [10, 16] и [18] исследуется уравнение вида (1) с характеристикой (2). В зависимости от знака параметра λ ($\lambda < 0$ в [10] и $\lambda > 0$ в [16]) установлено существование периодического режима (решения) с выходом в зоны насыщения характеристики $N(y)$, фазовая траектория которого проходит через две симметричные точки $(y_{\max}, 0)$ и $(-y_{\max}, 0)$ за фиксированный период, где $y_{\max}$ – максимальное значение решения $y(t)$ и такое, что $y_{\max} > B$. В [18] дано определение колебательного решения с произвольным начальным моментом времени $t_0 \geqslant 0$, установлена теорема существования колебательного решения с возможным выходом в зоны насыщения $N(y)$ и замкнутой фазовой траекторией, а также получены достаточные условия существования и несуществования периодических решений с $t_0 = 0$.

В настоящей работе рассматриваются колебательные, в том числе периодические, решения уравнения (1) с полным (в обе стороны) обходом характеристики $N(y)$ без выхода в её зоны насыщения за некоторое конечное и заданное время. Исследуются фазовые траектории решений.

Запишем общее решение уравнения (1) и его производную, для любого $t \geqslant 0$ имеем

$$y(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 + qt + q_1 \cos(\omega t + \varphi) + q_2 \sin(\omega t + \varphi),$$

$$\dot{y}(t) = \lambda c_1 e^{\lambda t} + q - \omega q_1 \sin(\omega t + \varphi) + \omega q_2 \cos(\omega t + \varphi),$$

где

$$q = \begin{cases} q^-, & \text{если } N(y) = -C, \\ 0, & \text{если } N(y) = 0, \\ q^+, & \text{если } N(y) = C, \end{cases}$$

$q^- = \alpha C/\lambda$, $q^+ = -q^-$, $q_1 = -\beta/(\lambda^2 + \omega^2)$, $q_2 = q_1\lambda/\omega$ и c_1, c_2 – произвольные постоянные, значения которых могут меняться в точках разрыва нелинейности $N(y(t))$.

Рассмотрим колебательное решение в классе непрерывных функций $y(t)$ для любого $t \geqslant 0$ с полным обходом характеристики $N(y)$ без выхода в зоны насыщения за время T_r и замкнутой фазовой траекторией, которая проходит через четыре фиксированные точки, лежащие на прямых $y = \pm A$ и $y = \pm B$. Таким образом, фазовая траектория, отвечающая одному полному обходу характеристики, состоит из четырёх кусков, которые соответствуют различным участкам $N(y)$ на плоскости $(y, N(y))$ и склеиваются согласно методу припасовывания, тем самым обеспечивая непрерывность $y(t)$ и замкнутость траектории на фазовой плоскости $(y, \dot{y})$.

При полном обходе характеристики без выхода в зоны насыщения решение $y(t)$ удовлетворяет условию $|y(t)| \leqslant B$ для любого $t \geqslant 0$, а его траектория проходит через фиксированные точки $(B, 0)$ и $(-B, 0)$ на плоскости $(y, \dot{y})$. Действительно, в окрестности максимального значения $y_{\max} = B$ функции $y(t)$ производная $\dot{y}(t)$ меняет знак с “плюса” на “минус” в направлении возрастания t, а в окрестности минимального значения $y_{\min} = -B$ – наоборот.

Обозначим порядковый номер обхода характеристики через p, а прямые разрыва $y = B$, $y = A$, $y = -B$ и $y = -A$ через L_1, L_2, L_3 и L_4 соответственно.

Определение 1. Решение $y(t)$ уравнения (1) назовём *T_r-колебательным с полным обходом характеристики $N(y)$ без выхода в зоны насыщения*, если существуют положительные числа τ_1, τ_2, τ_3, τ_4 такие, что $\sum_{i=1}^4 \tau_i = T_r$, и точки $Y^1 \in L_1$, $Y^2 \in L_2$, $Y^3 \in L_3$, $Y^4 \in L_4$ на фазовой плоскости, которые удовлетворяют следующим условиям:

1) $(y((p-1)T_r), \dot{y}((p-1)T_r)) = Y^1$, $\dot{y}((p-1)T_r) = 0$, $(y(\tau_1 + (p-1)T_r), \dot{y}(\tau_1 + (p-1)T_r)) = Y^2$, $\dot{y}(\tau_1 + (p-1)T_r) < 0$, $(y(\tau_1 + \tau_2 + (p-1)T_r), \dot{y}(\tau_1 + \tau_2 + (p-1)T_r)) = Y^3$, $\dot{y}(\tau_1 + \tau_2 + (p-1)T_r) = 0$, $(y(\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + (p-1)T_r), \dot{y}(\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + (p-1)T_r)) = Y^4$, $\dot{y}(\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + (p-1)T_r) > 0$, где $p \in \mathbb{N}$;

2) для всех $p \in \mathbb{N}$ и для любого $t \in [(p-1)T_r, \tau_1 + (p-1)T_r]$ выполняются равенство $q = q^+$ и неравенство $\dot{y}(t) \leqslant 0$ (причём равенство нулю только для $t = (p-1)T_r$); для любого $t \in (\tau_1 + (p-1)T_r, \tau_1 + \tau_2 + (p-1)T_r)$ выполняются равенство $q = 0$ и неравенство $\dot{y}(t) < 0$; для любого $t \in [\tau_1 + \tau_2 + (p-1)T_r, \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + (p-1)T_r]$ выполняются равенство $q = q^-$ и неравенство $\dot{y}(t) \geqslant 0$ (причём равенство нулю только для $t = \tau_1 + \tau_2 + (p-1)T_r$); для любого $t \in (\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + (p-1)T_r, pT_r)$ выполняются равенство $q = 0$ и неравенство $\dot{y}(t) > 0$.

Далее для краткости будем называть решение $y(t)$ уравнения (1), удовлетворяющее определению 1, *T_r-колебательным*, точку Y^i и прямую L_i, $i = \overline{1, 4}$, *точкой переключения* и *прямой переключения* соответственно, число τ_i – *временем перехода* из точки $Y^i \in L_i$ на прямую L_{i+1}, причём при $i=4$ – на прямую L_1, а времена перехода и точки переключения – *параметрами решения*.

В отличие от определения T_r-колебательного решения из работы [18], здесь в определение 1 добавлены условия на производную решения, которые обеспечивают обход характеристики без выхода в зоны насыщения, и задан начальный момент времени $t_0 = 0$.

Определение 2. *T_r-периодическим решением* назовём такое T_r-колебательное решение $y(t)$ уравнения (1), что $y(t) = y(t+T_r)$ и $\dot{y}(t) = \dot{y}(t+T_r)$ для $t \geqslant 0$.

Ставим задачу исследования T_r-колебательного и T_r-периодического решений уравнения (1), установления необходимых и достаточных условий их существования для некоторой заданной величины T_r.

2. Необходимое и достаточное условия существования T_r-колебательного решения. Введём обозначения

$$d_1(t) = q_1\cos(\omega t+\varphi) + q_2\sin(\omega t+\varphi), \quad d_2(t) = q_2\cos(\omega t+\varphi) - q_1\sin(\omega t+\varphi)$$

для любого $t \geqslant 0$. Имеет место

Теорема 1. *Пусть существует T_r-колебательное решение уравнения (1). Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) значения $d_j((p-1)T_r)$, $d_j(\tau_1+(p-1)T_r)$, $d_j(\tau_1+\tau_2+(p-1)T_r)$ и $d_j(\tau_1+\tau_2+\tau_3+(p-1)T_r)$, $j=1,2$, не зависят от p;

2) выполняются системы равенств

$$\lambda(1-e^{\lambda\tau_1})^{-1}(B-A+q^+\tau_1+d_1(\tau_1)-d_1(0))+q^++\omega d_2(0)=0,$$

$$\lambda e^{\lambda\tau_2}(1-e^{\lambda\tau_2})^{-1}(A+B+d_1(\tau_1+\tau_2)-d_1(\tau_1))+\omega d_2(\tau_1+\tau_2)=0,$$

$$\lambda(1-e^{\lambda\tau_3})^{-1}(A-B+q^-\tau_3+d_1(\tau_1+\tau_2+\tau_3)-d_1(\tau_1+\tau_2))+q^-+\omega d_2(\tau_1+\tau_2)=0, \tag{3}$$

$$\lambda e^{\lambda\tau_1}(1-e^{\lambda\tau_1})^{-1}(B-A+q^+\tau_1+d_1(\tau_1)-d_1(0))+q^+ = \lambda(1-e^{\lambda\tau_2})^{-1}(A+B+d_1(\tau_1+\tau_2)-d_1(\tau_1)),$$

$$\lambda e^{\lambda\tau_3}(1-e^{\lambda\tau_3})^{-1}(A-B+q^-\tau_3+d_1(\tau_1+\tau_2+\tau_3)-d_1(\tau_1+\tau_2))+q^- =$$

$$= \lambda(1-e^{\lambda\tau_4})^{-1}(-A-B+d_1(T_r)-d_1(\tau_1+\tau_2+\tau_3)),$$

$$\lambda e^{\lambda\tau_4}(1-e^{\lambda\tau_4})^{-1}(-A-B+d_1(T_r)-d_1(\tau_1+\tau_2+\tau_3))+\omega d_2(T_r)=0 \tag{4}$$

и система неравенств

$$\lambda e^{\lambda\tau_1}(1-e^{\lambda\tau_1})^{-1}(B-A+q^+\tau_1+d_1(\tau_1)-d_1(0))+q^++\omega d_2(\tau_1)<0,$$

$$\lambda e^{\lambda\tau_3}(1-e^{\lambda\tau_3})^{-1}(A-B+q^-\tau_3+d_1(\tau_1+\tau_2+\tau_3)-d_1(\tau_1+\tau_2))+q^-+\omega d_2(\tau_1+\tau_2+\tau_3)>0. \tag{5}$$

Доказательство. Пусть уравнение (1) имеет T_r-колебательное решение. Это означает, что параметры решения удовлетворяют условиям определения 1. Сначала запишем решение и его производную в общем виде на интервалах, указанных в условии 2), при этом постоянные c_1 и c_2, зависящие от порядка обхода характеристики p, обозначим через c_1^p и c_2^p соответственно. Затем обратимся к условию 1) для нахождения неопределённых постоянных c_1^p и c_2^p на каждом куске траектории.

Для всех $p \in \mathbb{N}$ и любого $t \in [t_0^p, t_0^p+\tau_1]$, где $t_0^p = (p-1)T_r$, имеем

$$y(t) = c_1^p e^{\lambda t} + c_2^p + q^+t + d_1(t), \quad \dot{y}(t) = \lambda c_1^p e^{\lambda t} + q^+ + \omega d_2(t) \leqslant 0. \tag{6}$$

Условия $Y^1 \in L_1$ и $Y^2 \in L_2$ из определения 1 равносильны равенствам $(y(t_0^p), \dot{y}(t_0^p)) = (B, \dot{y}^1) = (B, 0)$ и $(y(t_0^p+\tau_1), \dot{y}(t_0^p+\tau_1)) = (A, \dot{y}^2)$ соответственно, причём $\dot{y}^2 < 0$. Исходя из условий на первые координаты точек переключения, приходим к системе уравнений относительно c_1^p и c_2^p, а именно,

$$y(t_0^p) = c_1^p e^{\lambda t_0^p} + c_2^p + q^+ t_0^p + d_1(t_0^p) = B,$$

$$y(t_0^p + \tau_1) = c_1^p e^{\lambda(t_0^p+\tau_1)} + c_2^p + q^+(t_0^p + \tau_1) + d_1(t_0^p + \tau_1) = A. \tag{7}$$

Поскольку $y(t_0^p) = B$ и $y(t_0^p+\tau_1) = A$ для всех p, то значения $d_1(t_0^p)$ и $d_1(t_0^p+\tau_1)$ не зависят от p, что отражено в утверждении 1) теоремы 1, и выполняются равенства $c_1^p e^{\lambda t_0^p} = c_1^1$ и $c_2^p + q^+ t_0^p = c_2^1$, откуда

$$c_1^p = c_1^1 e^{-\lambda t_0^p}, \quad c_2^p = c_2^1 - q^+ t_0^p, \tag{8}$$

где

$$c_1^1 = (1 - e^{\lambda\tau_1})^{-1}(B - A + q^+\tau_1 + d_1(\tau_1) - d_1(0)), \quad c_2^1 = B - c_1^1 - d_1(0). \tag{9}$$

Постоянные c_1^1, c_2^1 найдены из системы уравнений (7) при $p = 1$. Теперь рассмотрим условия на вторые координаты точек переключения Y^1 и Y^2. Имеем

$$\dot y^1 = \lambda c_1^p e^{\lambda t_0^p} + q^+ + \omega d_2(t_0^p) = 0, \quad \dot y^2 = \lambda c_1^p e^{\lambda(t_0^p+\tau_1)} + q^+ + \omega d_2(t_0^p + \tau_1) < 0. \tag{10}$$

Подставим в (10) вместо c_1^p выражение из (8) и получим

$$\dot y^1 = \lambda c_1^1 + q^+ + \omega d_2(t_0^p) = 0, \quad \dot y^2 = \lambda c_1^1 e^{\lambda\tau_1} + q^+ + \omega d_2(t_0^p + \tau_1) < 0. \tag{11}$$

Поскольку $\dot y^1 = \dot y(t_0^p)$ и $\dot y^2 = \dot y(t_0^p+\tau_1)$ для всех p, то значения $d_2(t_0^p)$ и $d_2(t_0^p+\tau_1)$ не зависят от p, что отражено в утверждении 1) теоремы 1, и найденная постоянная c_1^1 удовлетворяет системе (11) для всех p, а значит, для $p = 1$ и, как следствие, $t_0^1 = 0$, т.е. имеют место первое равенство в (3) и первое неравенство в (5).

Итак, первый кусок траектории решения между прямыми L_1 и L_2 задаётся функциями в (6) с постоянными c_1^p и c_2^p, определяемыми равенствами (8).

Для всех $p \in \mathbb{N}$ и для любого $t \in (t_0^p, t_0^p + \tau_2)$, где $t_0^p = \tau_1 + (p-1)T_r$, имеем

$$y(t) = c_1^p e^{\lambda t} + c_2^p + d_1(t), \quad \dot y(t) = \lambda c_1^p e^{\lambda t} + \omega d_2(t) < 0. \tag{12}$$

Условия $Y^2 \in L_2$ и $Y^3 \in L_3$ равносильны равенствам

$$(y(t_0^p), \dot y(t_0^p)) = (A, \dot y^2), \quad (y(t_0^p + \tau_2), \dot y(t_0^p + \tau_2)) = (-B, \dot y^3) = (-B, 0).$$

Согласно методу припасовывания Y^2 является точкой склейки первого и второго кусков траектории. Условия на первые координаты точек переключения Y^2 и Y^3 приводят к системе уравнений

$$y(t_0^p) = c_1^p e^{\lambda t_0} + c_2^p + d_1(t_0) = A, \quad y(t_0^p + \tau_2) = c_1^p e^{\lambda(t_0^p+\tau_2)} + c_2^p + d_1(t_0^p + \tau_2) = -B. \tag{13}$$

Поскольку $y(t_0^p) = A$ и $y(t_0^p + \tau_2) = -B$ для всех p, то значения $d_1(t_0^p)$ и $d_1(t_0^p + \tau_2)$ не зависят от p, что отражено в утверждении 1) теоремы 1, и выполняются равенства

$$c_1^p = c_1^1 e^{-\lambda t_0^p}, \quad c_2^p = c_2^1, \tag{14}$$

где

$$c_1^1 = (1 - e^{\lambda\tau_2})^{-1}(A + B + d_1(\tau_1 + \tau_2) - d_1(\tau_1)), \quad c_2^1 = A - c_1^1 - d_1(\tau_1). \tag{15}$$

Постоянные c_1^1, c_2^1 найдены из системы уравнений (13) при $p = 1$, а значит $t_0^1 = \tau_1$.

Условия на вторые координаты точек переключения Y^2 и Y^3 равносильны равенствам

$$\dot y^2 = \lambda c_1^p e^{\lambda t_0^p} + \omega d_2(t_0^p) = \lambda c_1^1 + \omega d_2(t_0^p),$$

$$\dot{y}^3 = \lambda c_1^p e^{\lambda(t_0^p+\tau_2)} + \omega d_2(t_0^p+\tau_2) = \lambda c_1^1 e^{\lambda\tau_2} + \omega d_2(t_0^p+\tau_2) = 0. \tag{16}$$

Поскольку $\dot{y}^2 = \dot{y}(t_0^p)$ и $\dot{y}^3 = \dot{y}(t_0^p+\tau_2)$ для всех $p,$ то значения $d_2(t_0^p)$ и $d_2(t_0^p+\tau_2)$ не зависят от $p,$ что также отражено в утверждении 1) теоремы 1, и найденная постоянная c_1^1 удовлетворяет системе равенств (16) для всех $p,$ а следовательно, для $p=1$ и $t_0^1=\tau_1,$ т.е. имеют место второе равенство в (3) и первое равенство в (4).

Итак, второй кусок траектории решения между L_2 и L_3 задаётся функциями в (12) с постоянными c_1^p и $c_2^p,$ определяемыми равенствами (14).

Для всех $p\in\mathbb{N}$ и любого $t\in[t_0^p, t_0^p+\tau_3],$ где $t_0^p = \tau_1+\tau_2+(p-1)T_r,$ имеем

$$y(t) = c_1^p e^{\lambda t} + c_2^p + q^- t + d_1(t), \quad \dot{y}(t) = \lambda c_1^p e^{\lambda t} + q^- + \omega d_2(t) \geqslant 0. \tag{17}$$

Условия $Y^3\in L_3$ и $Y^4\in L_4$ равносильны равенствам $(y(t_0^p), \dot{y}(t_0^p)) = (-B, \dot{y}^3)$ и $(y(t_0+$ $+\tau_3), \dot{y}(t_0+\tau_3)) = (-A, \dot{y}^4),$ где $\dot{y}^3 = 0,$ $\dot{y}^4>0.$ Точка переключения Y^3 является точкой склейки второго и третьего кусков траектории. Из условий на первые координаты точек Y^3 и Y^4 получаем систему уравнений

$$y(t_0^p) = c_1^p e^{\lambda t_0^p} + c_2^p + q^- t_0^p + d_1(t_0^p) = -B,$$

$$y(t_0^p+\tau_3) = c_1^p e^{\lambda(t_0^p+\tau_3)} + c_2^p + q^-(t_0^p+\tau_3) + d_1(t_0^p+\tau_3) = -A. \tag{18}$$

Равенства $y(t_0^p) = -B$ и $y(t_0^p+\tau_3) = -A$ имеют место для всех $p,$ поэтому значения $d_1(t_0^p)$ и $d_1(t_0^p+\tau_3)$ не зависят от $p,$ что внесено в утверждение 1) теоремы 1, и выполняются равенства

$$c_1^p = c_1^1 e^{-\lambda t_0^p}, \quad c_2^p = c_2^1 - q^- t_0^p, \tag{19}$$

где

$$c_1^1 = (1-e^{\lambda\tau_3})^{-1}(A - B + q^-\tau_3 + d_1(\tau_1+\tau_2+\tau_3) - d_1(\tau_1+\tau_2)), \quad c_2^1 = -B - c_1^1 - d_1(\tau_1+\tau_2). \tag{20}$$

Постоянные $c_1^1,$ c_2^1 найдены из системы уравнений (18) при $p=1.$ Из условий на вторые координаты точек переключения Y^3 и Y^4 имеем соотношения

$$\dot{y}^3 = \lambda c_1^p e^{\lambda t_0^p} + q^- + \omega d_2(t_0^p) = \lambda c_1^1 + q^- + \omega d_2(t_0^p) = 0,$$

$$\dot{y}^4 = \lambda c_1^p e^{\lambda(t_0^p+\tau_3)} + q^- + \omega d_2(t_0^p+\tau_3) = \lambda c_1^1 e^{\lambda\tau_3} + q^- + \omega d_2(t_0^p+\tau_3) > 0. \tag{21}$$

Поскольку $\dot{y}^3 = \dot{y}(t_0^p)$ и $\dot{y}^4 = \dot{y}(t_0^p+\tau_3)$ для всех $p,$ то значения $d_2(t_0^p)$ и $d_2(t_0^p+\tau_3)$ не зависят от p (отражено в утверждении 1) теоремы 1) и найденная постоянная c_1^1 удовлетворяет системе (21) для всех $p,$ а значит, для $p=1$ и $t_0^1 = \tau_1+\tau_2,$ т.е. имеют место третье равенство в (3) и второе неравенство в (5). Итак, третий кусок траектории решения между прямыми L_3 и L_4 задаётся функциями в (17) с постоянными c_1^p и $c_2^p,$ определяемыми равенствами (19).

Наконец, для всех $p\in\mathbb{N}$ и для любого $t\in(t_0^p, t_0^p+\tau_4),$ где $t_0^p = \tau_1+\tau_2+\tau_3+(p-1)T_r,$ имеем

$$y(t) = c_1^p e^{\lambda t} + c_2^p + d_1(t), \quad \dot{y}(t) = \lambda c_1^p e^{\lambda t} + \omega d_2(t) > 0. \tag{22}$$

Условия $Y^4\in L_4$ и $Y^1\in L_1$ равносильны равенствам

$$(y(t_0^p), \dot{y}(t_0^p)) = (-A, \dot{y}^4) \quad \text{и} \quad (y(t_0^p+\tau_4), \dot{y}(t_0^p+\tau_4)) = (B, \dot{y}^1) = (B, 0)$$

соответственно. Точки Y^4 и Y^1 являются точками склейки третьего, четвёртого и четвёртого, первого кусков траектории соответственно. Условия на первые координаты точек переключения Y^4 и Y^1 приводят к системе уравнений

$$y(t_0^p) = c_1^p e^{\lambda t_0^p} + c_2^p + d_1(t_0^p) = -A, \quad y(t_0^p+\tau_4) = c_1^p e^{\lambda(t_0^p+\tau_4)} + c_2^p + d_1(t_0^p+\tau_4) = B. \tag{23}$$

Имеют место равенства $y(t_0^p) = -A$ и $y(t_0^p + \tau_4) = B$ для всех p, поэтому значения $d_1(t_0^p)$ и $d_1(t_0^p + \tau_4)$ не зависят от p, что отражено в утверждении 1) теоремы 1, и выполняются равенства (14) для $t_0^p = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + (p-1)T_r$, где

$$c_1^1 = (1 - e^{\lambda\tau_4})^{-1}(-A - B + d_1(T_r) - d_1(\tau_1 + \tau_2 + \tau_3)), \quad c_2^1 = -A - c_1^1 - d_1(\tau_1 + \tau_2 + \tau_3). \quad (24)$$

Постоянные c_1^1, c_2^1 найдены из системы уравнений (23) при $p = 1$.

Условия на вторые координаты точек переключения Y^4 и Y^1 равносильны равенствам

$$\dot y^4 = \lambda c_1^p e^{\lambda t_0^p} + \omega d_2(t_0^p) = \lambda c_1^1 + \omega d_2(t_0^p),$$

$$\dot y^1 = \lambda c_1^p e^{\lambda(t_0^p + \tau_4)} + \omega d_2(t_0^p + \tau_4) = \lambda c_1^1 e^{\lambda\tau_4} + \omega d_2(t_0^p + \tau_4) = 0. \quad (25)$$

Поскольку $\dot y^4 = \dot y(t_0^p)$ и $\dot y^1 = \dot y(t_0^p + \tau_4)$ для всех p, то значения $d_2(t_0^p)$ и $d_2(t_0^p + \tau_4)$ не зависят от p, что отражено в утверждении 1) теоремы 1, и найденная постоянная c_1^1 удовлетворяет системе (25) для всех p, а значит, и для $p = 1$ и $t_0^1 = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3$, т.е. имеют место второе и третье равенства в (4).

Итак, четвёртый кусок траектории решения между прямыми L_4 и L_1 задаётся функциями в (22) с постоянными c_1^p и c_2^p, определяемыми равенствами (14), в которых $t_0 = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + (p-1)T_r$ и постоянные c_1^1, c_2^1 вычисляются по формулам (24). Теорема доказана.

Достаточное условие существования T_r-колебательного решения уравнения (1) даёт

Теорема 2. *Пусть при некотором заданном $T_r > 0$ выполняются следующие условия:*

1) τ_1 – наименьшее (или единственное) решение уравнения

$$\lambda(1 - e^{\lambda z_1})^{-1}(B - A + q^+ z_1 + d_1(z_1) - d_1(0)) + q^+ + \omega d_2(0) = 0, \quad (26)$$

где z_1 – независимая переменная из интервала $(0, T_r)$;

2) τ_2 – наименьшее (или единственное) решение уравнения

$$\lambda e^{\lambda z_2}(1 - e^{\lambda z_2})^{-1}(A + B + d_1(\tau_1 + z_2) - d_1(\tau_1)) + \omega d_2(\tau_1 + z_2) = 0 \quad (27)$$

при фиксированном значении τ_1, где z_2 – независимая переменная из интервала $(0, T_r - \tau_1)$;

3) τ_3 – наименьшее (или единственное) решение уравнения

$$\lambda(1 - e^{\lambda z_3})^{-1}(A - B + q^- z_3 + d_1(\tau_1 + \tau_2 + z_3) - d_1(\tau_1 + \tau_2)) + q^- + \omega d_2(\tau_1 + \tau_2) = 0 \quad (28)$$

при фиксированных значениях τ_1 и τ_2, где z_3 – независимая переменная из интервала $(0, T_r - \tau_1 - \tau_2)$;

4) величины τ_1, τ_2, τ_3, определённые в условиях 1)–3) соответственно, и величина τ_4, вычисляемая по формуле $\tau_4 = T_r - \tau_1 - \tau_2 - \tau_3$, удовлетворяют утверждению 1) теоремы 1, системе равенств (4) и неравенств (5).

Тогда существует T_r-колебательное решение уравнения (1) с временами перехода τ_1, τ_2, τ_3, τ_4 и точками переключения

$$Y^1 = (B, 0), \quad Y^2 = (A, \dot y^2), \quad Y^3 = (-B, 0), \quad Y^4 = (-A, \dot y^4), \quad (29)$$

где

$$\dot y^2 = \lambda(1 - e^{\lambda\tau_2})^{-1}(A + B + d_1(\tau_1 + \tau_2) - d_1(\tau_1)) + \omega d_2(\tau_1),$$

$$\dot y^4 = \lambda(1 - e^{\lambda\tau_4})^{-1}(-A - B + d_1(T_r) - d_1(\tau_1 + \tau_2 + \tau_3)) + \omega d_2(\tau_1 + \tau_2 + \tau_3).$$

Доказательство. Пусть задана величина $T_r > 0$ и выполнено условие 1) теоремы 2. Тогда имеет место первое равенство системы (3). Из уравнения (26) с учётом начальных условий $(y(0), \dot y(0)) = Y^1 = (B, 0)$ следует равенство $(y(z_1), \dot y(z_1)) = (A, \dot y^2)$, что является условием определения 1 при $p = 1$, $z_1 = \tau_1$ и равносильно утверждению, что изображающая точка решения $y(t)$ принадлежит прямой L_1 в момент времени $t = 0$ и прямой L_2 в момент времени

$t = z_1 > 0$. Уравнение (26) является трансцендентным и может иметь несколько решений, которые соответствуют моментам времени достижения или пересечения прямой L_2. По условию величина τ_1 является наименьшим (или единственным) решением уравнения (26). Тогда изображающая точка движется по куску траектории, который задаётся функциями в (6) для $p = 1$ с постоянными c_1^1 и c_2^1, определяемыми равенствами (9), из точки $Y^1 \in L_1$ к прямой L_2 на промежутке $[0, \tau_1)$ и впервые принадлежит прямой L_2 в момент времени $t = \tau_1 \in (0, T_r)$ в точке Y^2. Следовательно, значение τ_1 является временем перехода изображающей точки T_r-колебательного решения по первому куску траектории при первом обходе релейной характеристики. Пусть найденная величина τ_1 удовлетворяет утверждению 1) теоремы 1, а именно, значения $d_j((p-1)T_r)$ и $d_j(\tau_1 + (p-1)T_r)$, $j = 1, 2$, не зависят от p. Тогда при всех последующих обходах релейной характеристики τ_1 остаётся временем перехода из точки $Y^1 \in L_1$ в точку переключения $Y^2 \in L_2$ по первому куску, соответствующему p траектории, который задаётся функциями в (6) с постоянными c_1^p и c_2^p, определяемыми равенствами (8).

Пусть выполнено условие 2) теоремы 2. Тогда имеет место второе равенство системы (3). Из уравнения (27) с учётом начальных условий $(y(\tau_1), \dot{y}(\tau_1)) = Y^2 = (A, \dot{y}^2)$ следует равенство

$$(y(\tau_1 + z_2), \dot{y}(\tau_1 + z_2)) = (-B, 0),$$

что является условием определения 1 при $p = 1$, $z_2 = \tau_2$ и равносильно утверждению, что в момент времени $t = \tau_1$ изображающая точка находится в точке $Y^2 \in L_2$, а в момент времени $t = \tau_1 + z_2 > \tau_1$ принадлежит прямой L_3. Уравнение (27) также является трансцендентным и может иметь несколько решений, которые соответствуют моментам времени достижения или пересечения прямой L_3. Поскольку величина τ_2 является наименьшим (или единственным) решением уравнения (27), то изображающая точка движется по куску траектории, который задаётся функциями в (12) для $p = 1$ с постоянными c_1^1 и c_2^1, определяемыми равенствами (15), из точки переключения $Y^2 \in L_2$ к прямой L_3 на промежутке $[\tau_1, \tau_1 + \tau_2)$ и впервые принадлежит прямой L_3 в момент времени $t = \tau_1 + \tau_2 \in (\tau_1, T_r)$ в точке Y^3. Отсюда следует, что величина τ_2 является временем перехода изображающей точки решения по второму куску траектории при первом обходе релейной характеристики. При выполнении утверждения 1) теоремы 1 о том, что значения $d_j(\tau_1 + (p-1)T_r)$ и $d_j(\tau_1 + \tau_2 + (p-1)T_r)$, $j = 1, 2$, не зависят от p, при всех последующих обходах релейной характеристики найденная величина τ_2 остаётся временем перехода из точки $Y^2 \in L_2$ в точку переключения $Y^3 \in L_3$ по второму куску, соответствующему p траектории, который задаётся функциями в (12) с постоянными c_1^p и c_2^p, определяемыми равенствами (14).

Пусть выполнено условие 3) теоремы 2. Тогда имеет место третье равенство системы (3). Из уравнения (28) с учётом начальных условий $(y(\tau_1 + \tau_2), \dot{y}(\tau_1 + \tau_2)) = Y^3 = (-B, 0)$ следует равенство

$$(y(\tau_1 + \tau_2 + z_3), \dot{y}(\tau_1 + \tau_2 + z_3)) = (-A, \dot{y}^4),$$

что является условием определения 1 при $p = 1$, $z_3 = \tau_3$ и означает, что в момент времени $t = \tau_1 + \tau_2$ изображающая точка находится в точке $Y^3 \in L_3$, а в момент времени $t = \tau_1 + \tau_2 + z_3 > \tau_1 + \tau_2$ принадлежит прямой L_4. Уравнение (28) может иметь несколько решений, которые соответствуют моментам времени достижения или пересечения прямой L_4. По условию величина τ_3 является наименьшим (или единственным) решением уравнения (28). Тогда изображающая точка движется по куску траектории, который задаётся функциями в (17) для $p = 1$ с постоянными c_1^1 и c_2^1, определяемыми равенствами (20), из точки переключения $Y^3 \in L_3$ к прямой L_4 на промежутке $[\tau_1 + \tau_2, \tau_1 + \tau_2 + \tau_3)$ и впервые принадлежит прямой L_4 в момент времени $t = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 \in (\tau_1 + \tau_2, T_r)$ в точке Y^4. Следовательно, значение τ_3 является временем перехода изображающей точки решения по третьему куску траектории при первом обходе релейной характеристики. Если имеет место утверждение 1) теоремы 1 о том, что значения $d_j(\tau_1 + \tau_2 + (p-1)T_r)$ и $d_j(\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + (p-1)T_r)$, $j = 1, 2$, не зависят от p, то при всех последующих обходах релейной характеристики $(p > 1)$ найденная величина τ_3 остаётся временем перехода из точки $Y^3 \in L_3$ в точку переключения $Y^4 \in L_4$ по третьему куску, соответствующему p траектории, который задаётся функциями в (17) с постоянными c_1^p и c_2^p, определяемыми равенствами (19).

Пусть выполнено условие 4) теоремы 2, т.е. найденные величины τ_1, τ_2, τ_3 и однозначно определяемая из равенства $\sum_{i=1}^{4}\tau_i = T_r$ величина τ_4 удовлетворяют системе равенств (4) и неравенств (5), а также утверждению 1) теоремы 1 в той части, что значения $d_j((p-1)T_r)$ и $d_j(\tau_1+\tau_2+\tau_3+(p-1)T_r)$, $j=1,2$, не зависят от p.

Выполнение третьего равенства в (4) означает, что значение τ_4 является решением уравнения

$$\lambda e^{\lambda z_4}(1-e^{\lambda z_4})^{-1}(-A-B+d_1(T_r)-d_1(\tau_1+\tau_2+\tau_3))+\omega d_2(T_r)=0 \qquad (30)$$

относительно независимой переменной $z_4\in(0, T_r-\tau_1-\tau_2-\tau_3]$. Из уравнения (30) с учётом начальных условий

$$(y(\tau_1+\tau_2+\tau_3), \dot y(\tau_1+\tau_2+\tau_3)) = Y^4 = (-A, \dot y^4)$$

следует равенство

$$(y(\tau_1+\tau_2+\tau_3+z_4), \dot y(\tau_1+\tau_2+\tau_3+z_4)) = (B, 0).$$

Это условие определения 1 при $p=1$ и $z_4=\tau_4$, которое означает, что в момент времени $t=\tau_1+\tau_2+\tau_3$ изображающая точка находится в точке $Y^4\in L_4$, а в момент времени $t=\tau_1+\tau_2+\tau_3+z_4>\tau_1+\tau_2+\tau_3$ принадлежит прямой L_1. Нетрудно заметить, что уравнение (30) имеет единственное решение, а значит изображающая точка решения движется по куску траектории, который задаётся функциями в (22) для $p=1$ с постоянными c_1^1 и c_2^1, определяемыми равенствами (24), из точки переключения $Y^4\in L_4$ к прямой L_1 на интервале $[\tau_1+\tau_2+\tau_3, T_r)$ и впервые достигает прямую L_1 в момент времени $t=T_r$ в точке Y^1. Следовательно, значение τ_4 является временем перехода изображающей точки по четвёртому куску траектории при первом обходе релейной характеристики. Если выполняется утверждение 1) теоремы 1 в указанной части, то при всех последующих обходах релейной характеристики найденная величина τ_4 остаётся временем перехода из точки $Y^4\in L_4$ в точку переключения $Y^1\in L_1$ по четвёртому куску, соответствующему p траектории, который задаётся функциями в (22) с постоянными c_1^p и c_2^p, определяемыми равенствами (14) с $t_0^p=\tau_1+\tau_2+\tau_3+(p-1)T_r$.

Совместно с утверждением 1) теоремы 1 выполнение первого и второго равенств в (4) равносильно выполнению условий склейки первого, второго кусков траекторий в точке Y^2 и третьего, четвёртого кусков траекторий в точке Y^4 соответственно, а выполнение неравенств в (5) равносильно выполнению условий

$$\dot y^2 = \dot y(\tau_1+(p-1)T_r)<0 \quad \text{и} \quad \dot y^4=\dot y(\tau_1+\tau_2+\tau_3+(p-1)T_r)>0$$

определения 1 при всех p. Отсюда следует, что траектория решения является замкнутой кривой.

Таким образом, существует T_r-колебательное решение уравнения (1) с найденными параметрами. Наименьшие (или единственные) решения τ_1, τ_2, τ_3 уравнений (26), (27), (28) соответственно и величина τ_4 такая, что $\tau_4=T_r-\tau_1-\tau_2-\tau_3$, являются временами перехода его изображающей точки на соответствующие прямые переключения из точек переключения Y^1, Y^2, Y^3 и Y^4, которые находятся по формулам (29). Выражения для $\dot y^2$ и $\dot y^4$ получены из равенств (16) и (25) с соответствующей постоянной c_1^1, что отражено в утверждении теоремы 2. Теорема доказана.

3. Теорема существования T_r-периодического решения. Существование периодического решения устанавливает

Теорема 3. *Пусть выполняются условия теоремы 2 и значение T_r кратно $2\pi/\omega$, $\omega>0$. Тогда существует T_r-периодическое решение уравнения (1).*

Доказательство. Пусть имеют место условия теоремы 2. Покажем, что T_r-колебательное решение уравнения (1) является T_r-периодическим, если значение T_r кратно $2\pi/\omega$, $\omega>0$, т.е. $T_r=2\pi k/\omega$, $k\in\mathbb{N}$.

Воспользуемся методом замены переменной и от функций $y(t)$ и $\dot y(t)$, зависящих от текущего времени t, перейдём к функциям, которые зависят от времени перехода τ по i-му куску фазовой траектории $(i=\overline{1,4})$ при p-м обходе характеристики $N(y)$.

Рассмотрим первый кусок фазовой траектории решения для всех $p \in \mathbb{N}$ и любого $t \in [t_0^p, t_0^p + \tau_1]$, где $t_0^p = (p-1)T_r$. Положим $\tau = t - t_0^p$. Тогда $\tau \in [0, \tau_1]$ и функции в (6) принимают вид

$$y(\tau + t_0^p) = c_1^p e^{\lambda(\tau + t_0^p)} + c_2^p + q^+(\tau + t_0^p) + d_1(\tau + t_0^p), \quad \dot{y}(\tau + t_0^p) = \lambda c_1^p e^{\lambda(\tau + t_0^p)} + q^+ + \omega d_2(\tau + t_0^p)$$

или (после подстановки выражений вместо постоянных c_1^p и c_2^p согласно равенствам (8) и преобразования)

$$y(\tau + t_0^p) = c_1^1 e^{\lambda\tau} + c_2^1 + q^+\tau + d_1(\tau + t_0^p), \quad \dot{y}(\tau + t_0^p) = \lambda c_1^1 e^{\lambda\tau} + q^+ + \omega d_2(\tau + t_0^p), \tag{31}$$

где постоянные c_1^1, c_2^1 определяются по формулам (9). Обозначим правые части равенств (31) через $y_1^p(\tau)$ и $\dot{y}_1^p(\tau)$ соответственно, т.е.

$$y_1^p(\tau) = y(\tau + t_0^p), \quad \dot{y}_1^p(\tau) = \dot{y}(\tau + t_0^p).$$

Далее, следуя аналогичным рассуждениям, на трёх последующих кусках фазовой траектории решения с помощью соответствующей замены $\tau = t - t_0^p$ преобразуем $y(t)$ и $\dot{y}(t)$ к функциям $y_i^p(\tau)$ и $\dot{y}_i^p(\tau)$, $i = \overline{2,4}$.

Итак, на втором куске траектории для всех $p \in \mathbb{N}$ и любого $t \in (t_0^p, t_0^p + \tau_2)$, где $t_0^p = \tau_1 + (p-1)T_r$, функции в (12) с новой переменной $\tau \in (0, \tau_2)$ принимают вид

$$y_2^p(\tau) = y(\tau + t_0^p) = c_1^1 e^{\lambda\tau} + c_2^1 + d_1(\tau + t_0^p), \quad \dot{y}_2^p(\tau) = \dot{y}(\tau + t_0^p) = \lambda c_1^1 e^{\lambda\tau} + \omega d_2(\tau + t_0^p),$$

где c_1^1, c_2^1 вычисляются по формуле (15). В моменты склейки траектории, которые соответствуют точкам Y^2 и Y^3, имеют место равенства

$$y_2^p(0) = y(t_0^p) = A, \quad \dot{y}_2^p(0) = \dot{y}(t_0^p) = \dot{y}^2,$$

$$y_2^p(\tau_2) = y(\tau_2 + t_0^p) = -B, \quad \dot{y}_2^p(\tau_2) = \dot{y}(\tau_2 + t_0^p) = \dot{y}^3 = 0.$$

На третьем куске траектории для всех $p \in \mathbb{N}$ и любого $t \in [t_0^p, t_0^p + \tau_3]$, где $t_0^p = \tau_1 + \tau_2 + (p-1)T_r$, функции в (17) с переменной $\tau \in [0, \tau_3]$ принимают вид

$$y_3^p(\tau) = y(\tau + t_0^p) = c_1^1 e^{\lambda\tau} + c_2^1 + q^-\tau + d_1(\tau + t_0^p), \quad \dot{y}_3^p(\tau) = \dot{y}(\tau + t_0^p) = \lambda c_1^1 e^{\lambda\tau} + q^- + \omega d_2(\tau + t_0^p),$$

где c_1^1, c_2^1 вычисляются по формуле (20).

И, наконец, на четвёртом куске траектории для всех $p \in \mathbb{N}$ и любого $t \in (t_0^p, pT_r)$, где $t_0^p = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + (p-1)T_r$, функции в (22) с переменной $\tau \in (0, \tau_4)$ принимают вид

$$y_4^p(\tau) = y(\tau + t_0^p) = c_1^1 e^{\lambda\tau} + c_2^1 + d_1(\tau + t_0^p), \quad \dot{y}_4^p(\tau) = \dot{y}(\tau + t_0^p) = \lambda c_1^1 e^{\lambda\tau} + \omega d_2(\tau + t_0^p),$$

где c_1^1, c_2^1 вычисляются по формуле (24). В моменты склейки, соответствующие точкам переключения Y^4 и Y^1, имеют место равенства

$$y_4^p(0) = y(t_0^p) = -A, \quad \dot{y}_4^p(0) = \dot{y}(t_0^p) = \dot{y}^4,$$

$$y_4^p(\tau_4) = y(\tau_4 + t_0^p) = B, \quad \dot{y}_4^p(\tau_4) = \dot{y}(\tau_4 + t_0^p) = \dot{y}^1 = 0.$$

Пусть $T_r = 2\pi k/\omega$, $k \in \mathbb{N}$. Функция $d_j(t)$, $j = 1, 2$, является $2\pi/\omega$-периодической, т.е. удовлетворяет равенству $d_j(t) = d_j(t + 2\pi/\omega)$ для любого $t \geqslant 0$. Тогда на соответствующих кускам траектории интервалах для всех p справедливо равенство $d_j(\tau + t_0^1) = d_j(\tau + t_0^p)$. Следовательно, функции $y_i^p(\tau)$ и $\dot{y}_i^p(\tau)$, $i = \overline{1,4}$, не зависят от p, и для любого $p \in \mathbb{N}$ справедливы равенства $y_i^1(\tau) = y(\tau + t_0^p)$, $\dot{y}_i^1(\tau) = \dot{y}(\tau + t_0^p)$. Это означает, что каждый кусок траектории при первом обходе совпадает с соответствующим куском траектории при всех последующих обходах, повторяющихся через время T_r, т.е. фазовая траектория решения состоит из четырёх кусков на протяжении неограниченного количества обходов. Таким образом, для всех $t \geqslant 0$ имеют место равенства $y(t) = y(t+T_r)$, $\dot{y}(t) = \dot{y}(t+T_r)$, поэтому согласно определению 2 решение является T_r-периодическим. Теорема доказана.

4. Периодическое решение с симметричной траекторией. Рассмотрим T_r-периодическое решение уравнения (1) с фазовой траекторией, симметричной относительно начала координат плоскости $(y, \dot{y})$.

Определение 3. *T_r-периодическим решением с симметричной траекторией* назовём такое T_r-периодическое решение уравнения (1), куски траектории которого на соответствующих временных интервалах удовлетворяют условиям

$$y_1^1(\tau) = -y_3^1(\tau), \quad \dot{y}_1^1(\tau) = -\dot{y}_3^1(\tau),$$

$$y_2^1(\tau) = -y_4^1(\tau), \quad \dot{y}_2^1(\tau) = -\dot{y}_4^1(\tau).$$

Обозначим через T *полупериод* решения. Тогда $T = T_r/2$. Достаточное условие существования $2T$-периодического решения с симметричной траекторией даёт

Теорема 4. *Пусть выполняются условия теоремы 3 и* $\tau_1 = \tau_3$, $\tau_2 = \tau_4$, $T = (2k-1)\pi/\omega$, $k \in \mathbb{N}$. *Тогда существует $2T$-периодическое решение с симметричной траекторией.*

Доказательство. При выполнении условий теоремы 3 существует T_r-периодическое решение уравнения (1). Пусть $\tau_1 = \tau_3$ и $\tau_2 = \tau_4$. Тогда $T = \tau_1 + \tau_2$ и $T_r = 2T$.

Рассмотрим первый и третий куски фазовой траектории периодического решения. На первом куске для любого $\tau \in [0, \tau_1]$ имеем

$$y_1^1(\tau) = y(\tau) = c_1^1 e^{\lambda\tau} + c_2^1 + q^+\tau + d_1(\tau), \quad \dot{y}_1^1(\tau) = \dot{y}(\tau) = \lambda c_1^1 e^{\lambda\tau} + q^+ + \omega d_2(\tau),$$

где постоянные c_1^1, c_2^1 определяются равенствами (9), т.е.

$$c_1^1 = (1 - e^{\lambda\tau_1})^{-1}(B - A + q^+\tau_1 + d_1(\tau_1) - d_1(0)), \quad c_2^1 = B - c_1^1 - d_1(0).$$

Учитывая, что $q^- = -q^+$, $\tau_1 = \tau_3$ и $T = \tau_1 + \tau_2$, на третьем куске траектории для любого $\tau \in [0, \tau_1]$ имеем

$$y_3^1(\tau) = y(\tau + T) = c_1^1 e^{\lambda\tau} + c_2^1 - q^+\tau + d_1(\tau + T),$$

$$\dot{y}_3^1(\tau) = \dot{y}(\tau + T) = \lambda c_1^1 e^{\lambda\tau} - q^+ + \omega d_2(\tau + T),$$

где c_1^1, c_2^1 определяются равенствами (20), которые при выполнении условий теоремы 3 принимают вид

$$c_1^1 = (1 - e^{\lambda\tau_1})^{-1}(-B + A - q^+\tau_1 + d_1(\tau_1 + T) - d_1(T)), \quad c_2^1 = -B - c_1^1 - d_1(T).$$

Пусть $T = (2k-1)\pi/\omega$, $k \in \mathbb{N}$. Тогда $d_j(\tau + T) = -d_j(\tau)$, $j = 1, 2$. Отсюда следует справедливость равенств

$$y_1^1(\tau) = -y_1^3(\tau), \quad \dot{y}_1^1(\tau) = -\dot{y}_1^3(\tau)$$

для любых $\tau \in [0, \tau_1]$.

Аналогично рассмотрим второй и четвёртый куски траектории решения. На втором куске для любого $\tau \in (0, \tau_2)$ имеем

$$y_2^1(\tau) = y(\tau + \tau_1) = c_1^1 e^{\lambda\tau} + c_2^1 + d_1(\tau + \tau_1), \quad \dot{y}_2^1(\tau) = \dot{y}(\tau + \tau_1) = \lambda c_1^1 e^{\lambda\tau} + \omega d_2(\tau + \tau_1),$$

где c_1^1, c_2^1 вычисляются по формуле (15), т.е.

$$c_1^1 = (1 - e^{\lambda\tau_2})^{-1}(A + B + d_1(T) - d_1(\tau_1)), \quad c_2^1 = A - c_1^1 - d_1(\tau_1).$$

На четвёртом куске в силу равенства $\tau_2 = \tau_4$ для любого $\tau \in (0, \tau_2)$ имеем

$$y_4^1(\tau) = y(\tau + \tau_1 + T) = c_1^1 e^{\lambda\tau} + c_2^1 + d_1(\tau + \tau_1 + T),$$

$$\dot{y}_4^1(\tau) = \dot{y}(\tau + \tau_1 + T) = \lambda c_1^1 e^{\lambda\tau} + \omega d_2(\tau + \tau_1 + T),$$

где c_1^1, c_2^1 определяются равенствами (24), которые принимают вид

$$c_1^1 = (1 - e^{\lambda\tau_2})^{-1}(-A - B + d_1(2T) - d_1(\tau_1 + T)), \quad c_2^1 = -A - c_1^1 - d_1(\tau_1 + T).$$

Очевидно, что $d_j(\tau + \tau_1 + T) = -d_j(\tau + \tau_1)$, $d_j(\tau_1 + T) = -d_j(\tau_1)$ и $d_j(2T) = -d_j(T)$, $j = 1, 2$. Поэтому имеют место соотношения $y_2^1(\tau) = -y_4^1(\tau)$, $\dot{y}_2^1(\tau) = -\dot{y}_4^1(\tau)$ для любых $\tau \in (0, \tau_2)$. Заметим, что в моменты склейки кусков траектории справедливы равенства

$$y_2^1(0) = y(\tau_1) = A, \quad \dot{y}_2^1(0) = \dot{y}(\tau_1) = \dot{y}^2, \quad y_2^1(\tau_2) = y(T) = -B, \quad \dot{y}_2^1(\tau_2) = \dot{y}(T) = 0,$$

$$y_4^1(0) = y(\tau_1 + T) = -A, \quad \dot{y}_4^1(0) = \dot{y}(\tau_1 + T) = -\dot{y}^2, \quad y_4^1(\tau_4) = y(2T) = B, \quad \dot{y}_4^1(\tau_4) = \dot{y}(2T) = 0.$$

Условия определения 3 выполнены.

Таким образом, существует T_r-периодическое решение с симметричной траекторией, где $T_r = 2T$. Теорема доказана.

В силу симметричности траектории относительно начала координат фазовой плоскости, достаточно рассмотреть первый и второй куски траектории, которые соответствуют решению с обходом характеристики в одну сторону и двумя точками переключения $Y^1 = (B, \dot{y}^1)$, $Y^2 = (A, \dot{y}^2)$ за полупериод T, где $\dot{y}^1 = 0$, $\dot{y}^2 < 0$.

Для $2T$-периодического решения с симметричной траекторией системы (3) и (4) с учётом равенства $d_1(0) = -d_1(T)$ после замены $\tau_2 = T - \tau_1$ принимают вид

$$\lambda(1 - e^{\lambda\tau_1})^{-1}(B - A + q^+\tau_1 + d_1(\tau_1) - d_1(0)) + q^+ + \omega d_2(0) = 0,$$

$$\lambda e^{\lambda\tau_1}(1 - e^{\lambda\tau_1})^{-1}(B - A + q^+\tau_1 + d_1(\tau_1) - d_1(0)) + q^+ = \lambda(1 - e^{\lambda(T-\tau_1)})^{-1}(B + A - d_1(0) - d_1(\tau_1)),$$

$$\lambda e^{\lambda(T-\tau_1)}(1 - e^{\lambda(T-\tau_1)})^{-1}(A + B + d_1(T) - d_1(\tau_1)) + \omega d_2(T) = 0, \tag{32}$$

а система (5) принимает вид неравенства

$$\lambda e^{\lambda\tau_1}(1 - e^{\lambda\tau_1})^{-1}(B - A + q^+\tau_1 + d_1(\tau_1) - d_1(0)) + q^+ + \omega d_2(\tau_1) < 0. \tag{33}$$

Равенства (32) рассмотрим как систему уравнений, приняв τ_1 и T за переменные. Условия разрешимости системы уравнений (32) относительно τ_1 при фиксированном T и выполнения неравенства (33) устанавливает

Лемма. *Величина τ_1, определяемая для некоторого $k \in \mathbb{N}$ равенством*

$$\tau_1 = -\frac{1}{\lambda}\ln\left(1 + \frac{\omega d_2(0)}{q^+}(e^{-\lambda T} + 1)\right), \tag{34}$$

где $T = \pi(2k-1)/\omega$, $\omega > 0$, является решением системы уравнений (32) из интервала $(0, T)$ и удовлетворяет неравенству (33), если выполняются следующие условия:

1) имеют место неравенства

$$(e^{-\lambda T} - 1)q^+ < (e^{-\lambda T} + 1)\omega d_2(0) < 0;$$

2) справедливы равенства

$$A = \frac{1}{\lambda}(1 - e^{\lambda\tau_1})(q^+ + \omega d_2(0)) + B + q^+\tau_1 + d_1(\tau_1) - d_1(0), \tag{35}$$

$$B = \frac{1}{2\lambda}(e^{\lambda\tau_1}(q^+ + \omega d_2(0)(e^{-\lambda T} + 1)) - q^+) - \frac{\omega d_2(0)}{\lambda} - \frac{q^+\tau_1}{2} + d_1(0), \tag{36}$$

причём $0 < A < B$, и неравенство

$$e^{\lambda\tau_1}(q^+ + \omega d_2(0)) > q^+ + \omega d_2(\tau_1).$$

Доказательство. Преобразуем систему уравнений (32) с учётом равенства $d_j(T)=-d_j(0)$, $j=1,2$. Для этого обе части первого уравнения умножим на $e^{\lambda\tau_1}$, а третьего уравнения – разделим на $e^{\lambda(T-\tau_1)}$, и после переноса слагаемых в правые части получим равенства

$$\lambda e^{\lambda\tau_1}(1-e^{\lambda\tau_1})^{-1}(B-A+q^+\tau_1+d_1(\tau_1)-d_1(0))=-e^{\lambda\tau_1}(q^++\omega d_2(0)),$$

$$\lambda(1-e^{\lambda(T-\tau_1)})^{-1}(A+B-d_1(0)-d_1(\tau_1))=\omega d_2(0)e^{\lambda(\tau_1-T)}.$$

Во втором уравнении системы (32) сделаем замены в соответствии с этими равенствами и получим первое уравнение преобразованной системы, записанной ниже. Далее обе части первого уравнения системы (32) умножим на выражение $e^{\lambda(T-\tau_1)}(1-e^{\lambda\tau_1})$, а третьего уравнения – на выражение $1-e^{\lambda(T-\tau_1)}$, после их сложения и группирования получим второе уравнение преобразованной системы. Наконец, в качестве третьего уравнения преобразованной системы рассмотрим первое уравнение системы (32), обе части которого умножены на выражение $1-e^{\lambda\tau_1}$. Таким образом, приходим к системе

$$
\begin{gathered}
-e^{\lambda\tau_1}(q^++\omega d_2(0))+q^+=e^{\lambda(\tau_1-T)}\omega d_2(0),\\
e^{\lambda(T-\tau_1)}(\lambda(2B+q^+\tau_1-2d_1(0))+q^++2\omega d_2(0))-e^{\lambda T}q^+-\omega d_2(0)(e^{\lambda T}+1)=0,\\
\lambda(B-A+q^+\tau_1+d_1(\tau_1)-d_1(0))+(1-e^{\lambda\tau_1})(q^++\omega d_2(0))=0,
\end{gathered}
\tag{37}
$$

равносильной системе уравнений (32).

Введём обозначение

$$P=1+(1+e^{-\lambda T})\omega d_2(0)/q^+.$$

Пусть выполняются неравенства в условии 1) леммы. Тогда для $\lambda>0$ (в этом случае $q^+>0$) имеют место неравенства

$$e^{-\lambda T}<1+(1+e^{-\lambda T})\omega d_2(0)/q^+<1; \tag{38}$$

для $\lambda<0$ (в этом случае $q^+<0$) – неравенства

$$1<1+(1+e^{-\lambda T})\omega d_2(0)/q^+<e^{-\lambda T}, \tag{39}$$

или (с учётом введённого выше обозначения) $e^{-\lambda T}<P<1$ для $\lambda>0$ и $1<P<e^{-\lambda T}$ для $\lambda<0$, т.е. $P>0$. Прологарифмируем (38), (39). После умножения на выражение $-1/\lambda$ приходим к неравенствам $0<-\lambda^{-1}\ln P<T$.

Пусть выполняется (34), т.е. $\tau_1=-\lambda^{-1}\ln P$. Тогда $\tau_1\in(0,T)$. Равенство (34) получено из первого уравнения системы (37), поэтому величина τ_1 является решением этого уравнения.

Пусть при найденной величине τ_1 имеют место равенства (35), (36), которые получены из третьего и второго уравнений системы (37) соответственно. Следовательно, величина τ_1 удовлетворяет системе уравнений (37), а значит, является решением равносильной системы уравнений (32).

Пусть имеет место неравенство в условии 2) леммы при известной величине τ_1. Выполнение этого неравенства равносильно выполнению неравенства (33) совместно с первым равенством системы (32), а поскольку величина τ_1 является решением системы уравнений (32), то она удовлетворяет и неравенству (33).

Таким образом, если выполняются условия 1) и 2) леммы, то величина τ_1, определяемая равенством (34) при фиксированном T, является решением системы уравнений (32) и удовлетворяет неравенству (33). Лемма доказана.

Пример. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\ddot y(t)=0.1963495\dot y(t)-0.1N(y(t))-0.1\cos(t+0.6584073), \tag{40}$$

где $\lambda=0.1963495$, $\alpha=\beta=-0.1$, $\omega=1$ и $\varphi=0.6584073$. Пусть $C=0.602$. Тогда $q^+=$ $=0.3065961$, $q_1=0.0962878$ и $q_2=0.0527249$. Здесь и далее расчёты проведены с точностью до 10^{-7}.

Обратимся к условиям леммы. Пусть $k = 1$, тогда $T = \pi$. Справедливы неравенства условия 1), а именно, $-0.1411441 < -0.0343235 < 0$ (здесь $d_2(0) = -0.0172108$). Согласно равенству (34) имеем $\tau_1 = 0.4603672$. Далее рассчитаем параметры A и B по формулам (35) и (36), где $d_1(0) = 0.1084207$ и $d_1(\tau_1) = 0.0894866$. Тогда $B = 0.1255011$ и $A = 0.1082834$, при этом $0 < A < B$. Проверим выполнение неравенства в условии 2). Поскольку $d_2(\tau_1) = -0.0635877$, то имеем верное неравенство $0.3167624 > 0.2430083$. Условия 1) и 2) леммы выполнены. Следовательно, найденное значение τ_1 является решением системы уравнений (32), которое удовлетворяет неравенству (33). Это означает, что выполняется необходимое условие существования 2π-периодического решения с симметричной траекторией.

Обратимся к условиям теоремы 2. Уравнение (26) имеет одно решение $z_1 = \tau_1$ на интервале $(0, T)$, поскольку второе значение $z_1 = 6.39220008 > 2T$. Уравнение (27) имеет одно решение $z_2 = \tau_2 = T - \tau_1 = 2.6812254$ на интервале $(0, T)$, второе значение $z_2 = 4.9526250 > T$. Отсюда следует, что величины τ_1 и τ_2 являются единственными решениями соответствующих уравнений. Дополнительно имеют место условия теорем 3 и 4. Значит, выполняется достаточное условие существования 2π-периодического решения с симметричной траекторией.

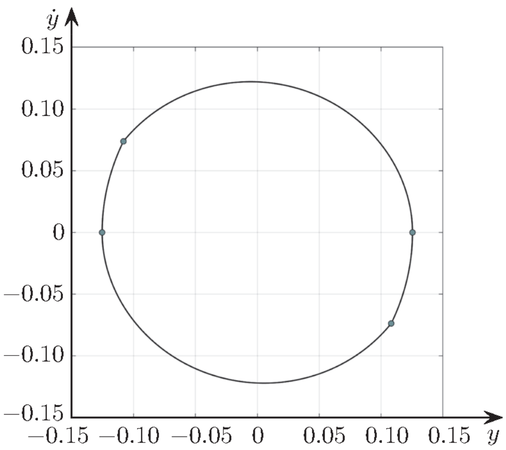

Рисунок. Траектория 2π-периодического решения $y(t)$ уравнения (40).

На рисунке представлен график симметричной траектории 2π-периодического решения уравнения (40) с временами перехода

$$\tau_1 = \tau_3 = 0.4603672, \quad \tau_2 = \tau_4 = 2.6812254$$

и точками переключения

$$Y^1 = (0.1255011, 0),$$

$$Y^2 = (0.1082834, -0.0737541),$$

$$Y^3 = -Y^1 = (-0.1255011, 0),$$

$$Y^4 = -Y^2 = (-0.1082834, 0.0737541),$$

которые отмечены на рисунке и расположены на фазовой плоскости $(y, \dot{y})$ по ходу часовой стрелки. Куски траектории между точками переключения для всех $p \in \mathbb{N}$ задаются следующими функциями:

1) первый кусок для $t \in (2(p-1)\pi, 2(p-1)\pi + \tau_1)$

$$y(t) = c_1^1 e^{\lambda(t-2(p-1)\pi)} + c_2^1 + q^+(t - 2(p-1)\pi) + d_1(t), \quad \dot{y}(t) = \lambda c_1^1 e^{\lambda(t-2(p-1)\pi)} + q^+ + \omega d_2(t),$$

где $c_1^1 = -1.4738273$, $c_2^1 = 1.4909076$;

2) второй кусок для $t \in (\tau_1 + 2(p-1)\pi, \pi + 2(p-1)\pi)$

$$y(t) = c_1^1 e^{\lambda(t-\tau_1-2(p-1)\pi)} + c_2^1 + d_1(t), \quad \dot{y}(t) = \lambda c_1^1 e^{\lambda(t-\tau_1-2(p-1)\pi)} + \omega d_2(t),$$

где $c_1^1 = -0.0517765$, $c_2^1 = 0.0705734$;

3) третий кусок для $t \in (\pi + 2(p-1)\pi, \tau_1 + \pi + 2(p-1)\pi)$

$$y(t) = c_1^1 e^{\lambda(t-2p\pi+\pi)} + c_2^1 - q^+(t - 2p\pi + \pi) + d_1(t), \quad \dot{y}(t) = \lambda c_1^1 e^{\lambda(t-2p\pi+\pi)} - q^+ + \omega d_2(t),$$

где $c_1^1 = 1.4738272$, $c_2^1 = -1.4909076$;

4) четвёртый кусок для $t \in (\tau_1 + \pi + 2(p-1)\pi, 2p\pi)$

$$y(t) = c_1^1 e^{\lambda(t-\tau_1-2p\pi+\pi)} + c_2^1 + d_1(t), \quad \dot{y}(t) = \lambda c_1^1 e^{\lambda(t-\tau_1-2p\pi+\pi)} + \omega d_2(t),$$

где $c_1^1 = 0.0517765$, $c_2^1 = -0.0705734$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 23-21-00069).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Цыпкин Я.З.* Релейные автоматические системы. М., 1974.
2. *Нижник И.Л., Краснеева А.А.* Периодические решения дифференциальных уравнений второго порядка с разрывной нелинейностью // Нелин. колебания. 2012. Т. 15. № 3. С. 381–389.
3. *Kamachkin A.M., Potapov D.K., Yevstafyeva V.V.* Existence of solutions for second-order differential equations with discontinuous right-hand side // Electron. J. Differ. Equat. 2016. № 124. P. 1–9.
4. *Kamachkin A.M., Potapov D.K., Yevstafyeva V.V.* On uniqueness and properties of periodic solution of second-order nonautonomous system with discontinuous nonlinearity // J. Dyn. Control Syst. 2017. V. 23. № 4. P. 825–837.
5. *Kamachkin A.M., Potapov D.K., Yevstafyeva V.V.* Existence of periodic solutions to automatic control system with relay nonlinearity and sinusoidal external influence // Int. J. Robust Nonlin. Control. 2017. V. 27. № 2. P. 204–211.
6. *Kamachkin A.M., Potapov D.K., Yevstafyeva V.V.* Existence of subharmonic solutions to a hysteresis system with sinusoidal external influence // Electron. J. Differ. Equat. 2017. № 140. P. 1–10.
7. *Leonov G.A., Shumafov M.M., Teshev V.A., Aleksandrov K.D.* Differential equations with hysteresis operators. Existence of solutions, stability, and oscillations // Differ. Equat. 2017. V. 53. № 13. P. 1764–1816.
8. *Евстафьева В.В.* Периодические решения системы дифференциальных уравнений с гистерезисной нелинейностью при наличии нулевого собственного числа // Укр. мат. журн. 2018. Т. 70. № 8. С. 1085–1096.
9. *Фурсов А.С., Тодоров Т.С., Крылов П.А., Митрев Р.П.* О существовании колебательных режимов в одной нелинейной системе с гистерезисами // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 8. С. 1103–1121.
10. *Kamachkin A.M., Potapov D.K., Yevstafyeva V.V.* Existence of periodic modes in automatic control system with a three-position relay // Int. J. Control. 2020. V. 93. № 4. P. 763–770.
11. *da Silva C.E.L., Jacquemard A., Teixeira M.A.* Periodic solutions of a class of non-autonomous discontinuous second-order differential equations // J. Dyn. Control Syst. 2020. V. 26. № 1. P. 17–44.
12. *Евстафьева В.В.* О существовании двухточечно-колебательных решений возмущённой релейной системы с гистерезисом // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 2. С. 169–178.
13. *Евстафьева В.В.* Существование T/k-периодических решений нелинейной неавтономной системы с кратным собственным числом матрицы // Мат. заметки. 2021. Т. 109. № 4. С. 529–543.
14. *Євстаф'єва В.В.* Існування двоточково-коливних розв'язків релейної неавтономної системи з кратним власним числом дійсної симетричної матриці // Укр. мат. журн. 2021. Т. 73. № 5. С. 640–650.
15. *Фурсов А.С., Митрев Р.П., Крылов П.А., Тодоров Т.С.* О существовании периодического режима в одной нелинейной системе // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 8. С. 1104–1115.
16. *Евстафьева В.В., Камачкин А.М., Потапов Д.К.* Периодические режимы в системе автоматического управления с трёхпозиционным гистерезисным реле // Вестн. Санкт-Петербург. ун-та. Прикл. математика. Информатика. Процессы управления. 2022. Т. 18. Вып. 4. С. 596–607.
17. *Kamachkin A.M., Potapov D.K., Yevstafyeva V.V.* Continuous dependence on parameters and boundedness of solutions to a hysteresis system // Appl. Math. 2022. V. 67. № 1. P. 65–80.
18. *Евстафьева В.В., Камачкин А.М., Потапов Д.К.* Об одном типе колебательных решений обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с трёхпозиционным гистерезисным реле и возмущением // Дифференц. уравнения. 2023. Т. 59. № 2. С. 150–163.

Санкт-Петербургский государственный
университет

Поступила в редакцию 23.01.2023 г.
После доработки 23.01.2023 г.
Принята к публикации 19.05.2023 г.