

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.4

АППРОКСИМАЦИЯ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЁННОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

© 2023 г. А. М. Денисов

Рассматривается начально-краевая задача для сингулярно возмущённой системы уравнений в частных производных. Ставится обратная задача, состоящая в определении неизвестного начального условия по дополнительной информации о решении начально-краевой задачи. Доказывается, что на основе использования разложения решения начально-краевой задачи по малому параметру ε можно получить приближённые решения, аппроксимирующие решение обратной задачи с порядком $O(\varepsilon)$ или $O(\varepsilon^2)$.

DOI: 10.31857/S0374064123060055, EDN: FFQKXU

Рассмотрим начально-краевую задачу для сингулярно возмущённой системы уравнений в частных производных

$$\varepsilon \nu u_x(x, t) + u_t(x, t) + a_t(x, t) = \varepsilon u_{xx}(x, t), \quad (x, t) \in Q_T, \quad (1)$$

$$a_t(x, t) = \gamma u(x, t) - a(x, t), \quad (x, t) \in Q_T, \quad (2)$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad (4)$$

$$a(x, 0) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad (5)$$

где $Q_T = \{(x, t) : 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq t \leq T\}$, ε , ν , γ – положительные постоянные, ε – малый параметр, $\varepsilon < 1$.

Задачу (1)–(5) можно интерпретировать как математическую модель динамики сорбции [1, с. 174; 2, с. 5], когда эффекты процессов переноса и диффузии малы по сравнению с поглощением. Чтобы подчеркнуть зависимость решения задачи (1)–(5) от параметра ε , далее будем обозначать его $u(x, t; \varepsilon)$, $a(x, t; \varepsilon)$.

Сформулируем обратную задачу. Пусть постоянные ε , ν , γ заданы, а функция $\psi(x)$ неизвестна. Требуется определить $\psi(x)$, если задана дополнительная информация о решении задачи (1)–(5)

$$u(x, T; \varepsilon) = g(x; \varepsilon), \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad (6)$$

где $g(x; \varepsilon)$ – заданная функция.

Дадим определение решения обратной задачи. Так как при неизвестной $\psi(x)$ функции $u(x, t; \varepsilon)$, $a(x, t; \varepsilon)$ также неизвестны, то решением обратной задачи будем считать тройку функций $\{\psi(x), u(x, t; \varepsilon), a(x, t; \varepsilon)\}$.

Определение. Функции $\{\psi(x), u(x, t; \varepsilon), a(x, t; \varepsilon)\}$ называются *решением обратной задачи*, если $\psi \in C[0, \pi]$, $u \in C^{2,1}(Q_T)$, $a, a_t \in C(Q_T)$ и $\{\psi(x), u(x, t; \varepsilon), a(x, t; \varepsilon)\}$ удовлетворяют уравнениям (1), (2) и условиям (3)–(6).

При выполнении ряда условий можно получить разложение функции $u(x, t; \varepsilon)$ по малому параметру ε . Цель данной работы состоит в использовании этого разложения для построения функций, аппроксимирующих неизвестную функцию $\psi(x)$ при малых ε . Подобный подход применялся для приближённого решения некоторых обратных задач в статьях [3, 4]. Другим аспектам исследования обратных задач для сингулярно возмущённых уравнений в частных производных посвящены работы [5–14].

Рассмотрим функцию

$$\psi_0(x; \varepsilon) = g(x; \varepsilon)(\gamma + 1)(1 - \exp(-(\gamma + 1)T))^{-1}. \tag{7}$$

Докажем, что при выполнении определённых условий она аппроксимирует $\psi(x)$ с порядком $O(\varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Теорема 1. Если функции $\{\psi(x), u(x, t; \varepsilon), a(x, t; \varepsilon)\}$ являются решением обратной задачи и $\psi \in C^3[0, \pi]$,

$$\psi(0) = \psi(\pi) = 0, \quad \psi''(0) - \nu\psi'(0) = \psi''(\pi) - \nu\psi'(\pi) = 0, \tag{8}$$

то

$$\max_{[0, \pi]} |\psi(x) - \psi_0(x; \varepsilon)| \leq c_1 \varepsilon, \tag{9}$$

где c_1 – постоянная, не зависящая от x и ε .

Далее через c_i обозначаются положительные постоянные, не зависящие от x , t и ε .

Доказательство. Пусть функции $\{\psi(x), u(x, t; \varepsilon), a(x, t; \varepsilon)\}$ являются решением обратной задачи. Проинтегрировав уравнение (2) с начальным условием (5), имеем

$$a(x, t; \varepsilon) = \psi(x)e^{-t} + \gamma \int_0^t e^{-(t-\tau)} u(x, \tau; \varepsilon) d\tau.$$

Из этого представления и уравнений (1), (2) следует, что $u(x, t; \varepsilon)$ является решением уравнения

$$\varepsilon \nu u_x + u_t + \gamma u - \psi(x)e^{-t} - \gamma \int_0^t e^{-(t-\tau)} u(x, \tau; \varepsilon) d\tau = \varepsilon u_{xx}, \quad (x, t) \in Q_T. \tag{10}$$

Применив метод разделения переменных, получим представление

$$u(x, t; \varepsilon) = e^{\nu x/2} \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t; \varepsilon) \sin(nx), \tag{11}$$

справедливое для функции $u(x, t; \varepsilon)$, удовлетворяющей уравнению (10) и условиям (3), (4). Здесь функции $T_n(t; \varepsilon)$ являются решениями задачи Коши

$$T'_n + \gamma T_n - \bar{\psi}_n e^{-t} - \gamma \int_0^t e^{-(t-\tau)} T_n(\tau; \varepsilon) d\tau = -\varepsilon(n^2 + \nu^2/4)T_n, \quad 0 \leq t \leq T, \tag{12}$$

$$T_n(0; \varepsilon) = 0, \tag{13}$$

а

$$\bar{\psi}_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} e^{-\nu x/2} \psi(x) \sin(nx) dx.$$

С учётом условий (8) имеем

$$\bar{\psi}_n = -\frac{2}{\pi n^3} \int_0^{\pi} \alpha(x) \cos(nx) dx, \tag{14}$$

где

$$\alpha(x) = \frac{d}{dx} (e^{-\nu x/2} [\psi''(x) - \nu\psi'(x) + \nu^2\psi(x)/4]).$$

Рассмотрим функции $\tilde{T}_{n0}(t)$, являющиеся решениями задачи Коши

$$\tilde{T}_{n0}'' + (\gamma - 1)\tilde{T}_{n0}' - \gamma\tilde{T}_{n0} = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \tag{15}$$

$$\tilde{T}_{n0}(0) = 0, \quad \tilde{T}_{n0}'(0) = \bar{\psi}_n, \tag{16}$$

и функции $\hat{T}_{n1}(t; \varepsilon)$ – решения задачи Коши

$$\hat{T}_{n1}'' + a_{n\varepsilon}\hat{T}_{n1}' - \gamma\hat{T}_{n1} = -(n^2 + (\nu^2)/4)\tilde{T}_{n0}', \quad 0 \leq t \leq T, \tag{17}$$

$$\hat{T}_{n1}(0) = 0, \quad \hat{T}_{n1}'(0) = 0, \tag{18}$$

где $a_{n\varepsilon} = \varepsilon(n^2 + (\nu^2)/4) + \gamma - 1$. Из уравнений (12), (15), (17) и начальных условий (13), (16), (18) следует, что

$$T_n(t; \varepsilon) = e^{-t}(\tilde{T}_{n0}(t) + \varepsilon\hat{T}_{n1}(t; \varepsilon)). \tag{19}$$

Решение задачи (15), (16) определяется как

$$\tilde{T}_{n0}(t) = \bar{\psi}_n(\gamma + 1)^{-1}(e^t - e^{-\gamma t}), \tag{20}$$

а задачи (17), (18) – формулой

$$\hat{T}_{n1}(t; \varepsilon) = -\frac{n^2 + \nu^2/4}{\lambda_1(n; \varepsilon) - \lambda_2(n; \varepsilon)} \int_0^t [\exp(\lambda_1(n; \varepsilon)(t - \tau)) - \exp(\lambda_2(n; \varepsilon)(t - \tau))] \tilde{T}_{n0}'(\tau) d\tau, \tag{21}$$

где

$$\lambda_1(n; \varepsilon) = \frac{-a_{n\varepsilon} + \sqrt{a_{n\varepsilon}^2 + 4\gamma}}{2}, \quad \lambda_2(n; \varepsilon) = \frac{-a_{n\varepsilon} - \sqrt{a_{n\varepsilon}^2 + 4\gamma}}{2}.$$

Из (20) и (21) следует, что

$$\max_{[0, T]} |\hat{T}_{n1}(t; \varepsilon)| \leq c_2(n^2 + \nu^2/4)|\bar{\psi}_n| \tag{22}$$

для любого n . Подстановка представления (19) в формулу (11) с учётом оценки (22) и формулы (14) даёт

$$u(x, t; \varepsilon) = \psi(x)(\gamma + 1)^{-1}(1 - \exp(-(\gamma + 1)t)) + \varepsilon u_0(x, t; \varepsilon), \quad (x, t) \in Q_T, \tag{23}$$

где $\max_{Q_T} |u_0(x, t; \varepsilon)| \leq c_3$. Положив в формуле (23) $t = T$ и используя условие (6), получим

$$g(x; \varepsilon) = \psi(x)(\gamma + 1)^{-1}(1 - \exp(-(\gamma + 1)T)) + \varepsilon u_0(x, T; \varepsilon).$$

Из этой формулы и определения (7) функции $\psi_0(x)$ следует оценка (9). Теорема доказана.

Из теоремы 1 следует, что при малых ε функция $\psi_0(x)$ аппроксимирует $\psi(x)$ с порядком $O(\varepsilon)$. Покажем, что при дополнительных предположениях можно построить приближённое решение $\psi_1(x; \varepsilon)$, которое аппроксимирует $\psi(x)$ с порядком $O(\varepsilon^2)$.

Введём функции

$$p_0(t) = (\gamma + 1)^{-1}(1 - \exp(-(\gamma + 1)t)),$$

$$p_1(t) = \frac{\exp(-t)}{(\gamma + 1)^2} \int_0^t [\exp(t - \tau) - \exp(-\gamma(t - \tau))] (\exp(\tau) + \gamma \exp(-\gamma\tau)) d\tau.$$

Пусть для параметра ε выполнены условия

$$p_0(T)(p_1(T))^{-1} - \varepsilon\nu^2/4 \geq c_4 > 0, \quad |\sin(\pi\sqrt{p_0(T)(\varepsilon p_1(T))^{-1} - \nu^2/4})| \geq c_5 > 0. \tag{24}$$

Рассмотрим функцию $\psi_1(x; \varepsilon)$, являющуюся решением краевой задачи

$$\varepsilon p_1(T)\psi_1''(x; \varepsilon) - \varepsilon \nu p_1(T)\psi_1'(x; \varepsilon) + p_0(T)\psi_1(x; \varepsilon) = g(x; \varepsilon), \quad 0 \leq x \leq \pi, \tag{25}$$

$$\psi_1(0; \varepsilon) = 0, \quad \psi_1(\pi; \varepsilon) = 0. \tag{26}$$

Теорема 2. Пусть функции $\{\psi(x), u(x, t; \varepsilon), a(x, t; \varepsilon)\}$ являются решением обратной задачи, причём $\psi(x)$ такова, что $\psi \in C^6[0, \pi]$, выполнены условия (8) и

$$\psi^{(4)}(0) - 2\nu\psi^{(3)}(0) + \nu^2\psi''(0) = 0, \quad \psi^{(4)}(\pi) - 2\nu\psi^{(3)}(\pi) + \nu^2\psi''(\pi) = 0. \tag{27}$$

Тогда для ε , удовлетворяющих условиям (24), имеет место оценка

$$\max_{[0, \pi]} |\psi(x) - \psi_1(x; \varepsilon)| \leq c_6 \varepsilon^2. \tag{28}$$

Доказательство. Для функции $T_n(t; \varepsilon)$, являющейся решением задачи (12), (13), справедливо представление

$$T_n(t; \varepsilon) = e^{-t}(\tilde{T}_{n0}(t) + \varepsilon\tilde{T}_{n1}(t) + \varepsilon^2\tilde{T}_{n2}(t; \varepsilon)), \tag{29}$$

где $\tilde{T}_{n1}(t) = \hat{T}_{n1}(t; 0)$, а $\tilde{T}_{n2}(t; \varepsilon)$ – решение задачи Коши

$$\tilde{T}_{n2}'' + a_{n\varepsilon}\tilde{T}_{n2}' - \gamma\tilde{T}_{n2} = -(n^2 + \nu^2)/4\tilde{T}_{n1}', \quad 0 \leq t \leq T, \tag{30}$$

$$\tilde{T}_{n2}(0) = 0, \quad \tilde{T}_{n2}'(0) = 0. \tag{31}$$

Из формулы (21) следует, что

$$\tilde{T}_{n1}(t) = \hat{T}_{n1}(t; 0) = -(n^2 + \nu^2/4)(\gamma + 1)^{-2}\bar{\psi}_n h(t), \tag{32}$$

где

$$h(t) = \int_0^t [\exp(t - \tau) - \exp(-\gamma(t - \tau))](\exp(\tau) + \gamma \exp(-\gamma\tau)) d\tau.$$

Для решения задачи (30), (31) справедлива формула

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{n2}(t; \varepsilon) &= \frac{(n^2 + \nu^2/4)^2 \bar{\psi}_n}{(\gamma + 1)^2 (\lambda_1(n; \varepsilon) - \lambda_2(n; \varepsilon))} \times \\ &\times \int_0^t [\exp(\lambda_1(n; \varepsilon)(t - \tau)) - \exp(\lambda_2(n; \varepsilon)(t - \tau))] h'(\tau) d\tau. \end{aligned} \tag{33}$$

Используя условия (8) и (27), имеем

$$\bar{\psi}_n = -\frac{2}{\pi n^6} \int_0^\pi \alpha'''(x) \sin(nx) dx. \tag{34}$$

Следовательно, учитывая формулу (33), получаем, что функция

$$u_1(x, t; \varepsilon) = \exp(\nu x/2 - t) \sum_{n=1}^\infty \tilde{T}_{n2}(t; \varepsilon) \sin(nx) \tag{35}$$

определена и непрерывна в прямоугольной области Q_T и имеет там непрерывную частную производную по x для всех $\varepsilon \in (0, 1)$. Из формул (34) и (35) следуют оценки

$$\max_{Q_T} |u_1(x, t; \varepsilon)| \leq c_7, \quad \max_{Q_T} \left| \frac{\partial u_1}{\partial x}(x, t; \varepsilon) \right| \leq c_8. \quad (36)$$

Учитывая определение коэффициентов $\bar{\psi}_n$, имеем

$$-\sum_{n=1}^{\infty} (n^2 + \nu^2/4) \bar{\psi}_n \sin(nx) = \exp(-\nu x/2) (\psi''(x) - \nu \psi'(x)). \quad (37)$$

Подставляя представление (29) в формулу (11) и принимая во внимание формулы (20), (32), (35) и (37), получаем

$$u(x, t; \varepsilon) = p_0(t)\psi(x) - \varepsilon \nu p_1(t)\psi'(x) + \varepsilon p_1(t)\psi''(x) + \varepsilon^2 u_1(x, t; \varepsilon), \quad (x, t) \in Q_T.$$

Положив в этой формуле $t = T$ и используя условие (6), можем записать равенство

$$\varepsilon p_1(T)\psi''(x) - \varepsilon \nu p_1(T)\psi'(x) + p_0(T)\psi(x) = g(x; \varepsilon) - \varepsilon^2 u_1(x, T; \varepsilon), \quad 0 \leq x \leq \pi. \quad (38)$$

Рассмотрим функцию $z(x; \varepsilon) = \psi_1(x; \varepsilon) - \psi(x)$. Из уравнений (25), (38) и условий (8), (26) следует, что $z(x; \varepsilon)$ является решением краевой задачи

$$\varepsilon p_1(T)z''(x; \varepsilon) - \varepsilon \nu p_1(T)z'(x; \varepsilon) + p_0(T)z(x; \varepsilon) = \varepsilon^2 u_1(x, T; \varepsilon), \quad 0 \leq x \leq \pi,$$

$$z(0; \varepsilon) = 0, \quad z(\pi; \varepsilon) = 0,$$

которое определяется формулой

$$z(x; \varepsilon) = \varepsilon (p_1(T))^{-1} \int_0^{\pi} G(x, s; \varepsilon) \exp(\nu(x-s)/2) u_1(s, T; \varepsilon) ds, \quad (39)$$

где

$$G(x, s; \varepsilon) = \begin{cases} (b_\varepsilon \sin(b_\varepsilon \pi))^{-1} \sin(b_\varepsilon(x-\pi)) \sin(b_\varepsilon s), & s \leq x, \\ (b_\varepsilon \sin(b_\varepsilon \pi))^{-1} \sin b_\varepsilon(s-\pi) \sin(b_\varepsilon x), & x \leq s, \end{cases} \quad b_\varepsilon = \sqrt{p_0(T)(\varepsilon p_1(T))^{-1} - \nu^2/4}.$$

Интегрируя по частям интеграл в формуле (39) и используя оценку (36), получаем

$$\max_{[0, \pi]} |z(x; \varepsilon)| \leq c_6 \varepsilon^2.$$

Таким образом, оценка (28) справедлива. Теорема доказана.

Рассмотрим вопрос об оценке для приближённого решения обратной задачи в случае, когда дополнительная информация задана с погрешностью. Пусть функция $g(x; \varepsilon)$ в условии (6) неизвестна, а вместо неё задана непрерывная на отрезке $[0, \pi]$ функция $g_\delta(x)$ такая, что

$$\max_{[0, \pi]} |g(x; \varepsilon) - g_\delta(x)| \leq \delta.$$

Определим функцию

$$\psi_{0\delta}(x) = g_\delta(x)(\gamma + 1)(1 - \exp(-(\gamma + 1)T))^{-1}.$$

Простым следствием теоремы 1 является следующее утверждение.

Следствие 1. Если выполнены условия теоремы 1, то

$$\max_{[0, \pi]} |\psi(x) - \psi_{0\delta}(x)| \leq c_1 \varepsilon + \delta(\gamma + 1)(1 - \exp(-(\gamma + 1)T))^{-1}.$$

Пусть для параметра ε выполнены условия (24). Рассмотрим функцию $\psi_{1\delta}$, являющуюся решением краевой задачи

$$\begin{aligned} \varepsilon p_1(T) \psi_{1\delta}''(x; \varepsilon) - \varepsilon \nu p_1(T) \psi_{1\delta}'(x; \varepsilon) + p_0(T) \psi_{1\delta}(x; \varepsilon) &= g_\delta(x), \quad 0 \leq x \leq \pi, \\ \psi_{1\delta}(0; \varepsilon) &= 0, \quad \psi_{1\delta}(\pi; \varepsilon) = 0. \end{aligned}$$

Из доказательства теоремы 2 легко получить

Следствие 2. Если выполнены условия теоремы 2, то

$$\max_{[0, \pi]} |\psi(x) - \psi_{1\delta}(x)| \leq c_6 \varepsilon^2 + c_9 \frac{\delta}{\sqrt{\varepsilon}}.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-284.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М., 1999.
2. Денисов А.М., Лукилин А.В. Математические модели однокомпонентной динамики сорбции. М., 1989.
3. Денисов А.М. Приближенное решение обратных задач для уравнения теплопроводности с сингулярным возмущением // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2021. Т. 61. № 12. С. 2040–2049.
4. Денисов А.М. Приближенное решение обратной задачи для интегродифференциального уравнения теплопроводности с сингулярным возмущением // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2023. Т. 63. № 5. С. 795–802.
5. Латтес Р., Лионс Ж.-Л. Метод квазиобращения и его приложения. М., 1970.
6. Иванов В.К. Задача квазиобращения для уравнения теплопроводности в равномерной метрике // Дифференц. уравнения. 1972. Т. 8. № 4. С. 652–658.
7. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Численные методы решения обратных задач математической физики. М., 2004.
8. Короткий А.И., Цепелев И.А., Исмаил-заде А.Е. Численное моделирование обратных ретроспективных задач тепловой конвекции с приложениями к задачам геодинамики // Изв. Уральского ун-та. 2008. № 58. С. 78–87.
9. Табаринцева Е.В., Менихес Л.Д., Дрозин А.Д. О решении граничной обратной задачи методом квазиобращения // Вестн. Южно-Уральского гос. ун-та. Сер. Математика. Механика. Физика. 2012. Вып. 6. С. 8–13.
10. Денисов А.М. Асимптотика решений обратных задач для гиперболических уравнений с малым параметром при старшей производной // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2013. Т. 53. № 5. С. 744–752.
11. Belov Yu.Ya., Kopylova V.G. Determination of source function in composite type system of equations // Журн. Сибирского федерал. ун-та. Сер. Математика и физика. 2014. Т. 7. Вып. 3. С. 275–288.
12. Денисов А.М., Соловьева С.И. Численное решение обратных задач для гиперболического уравнения с малым параметром при старшей производной // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54. № 7. С. 919–928.
13. Lukyanenko D.V., Shishlenin M.A., Volkov V.T. Asymptotic analysis of solving an inverse boundary value problem for a nonlinear singularly perturbed time-periodic reaction–diffusion–advection equation // J. Inverse and Ill-Posed Problems. 2019. V. 27. № 5. P. 745–758.
14. Lukyanenko D.V., Borzunov A.A., Shishlenin M.A. Solving coefficient inverse problems for a nonlinear singularly perturbed equations of the reaction–diffusion–advection type with data on the position of reaction front // Comm. in Nonlin. Sci. Numer. Simulation. 2021. V. 99. P. 105824.

Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова

Поступила в редакцию 17.04.2023 г.
После доработки 17.04.2023 г.
Принята к публикации 19.05.2023 г.