ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 6, с. 763–779

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.958+517.968.23

ДВУМЕРНЫЕ ЗАДАЧИ ФИЛЬТРАЦИИ ЖИДКОСТИ С ГРАНИЧНЫМИ ИСТОЧНИКАМИ В АНИЗОТРОПНОМ НЕОДНОРОДНОМ СЛОЕ

© 2023 г. В. Ф. Пивень

Исследуются первая и вторая краевые задачи и задача сопряжения для комплексного потенциала двумерного фильтрационного течения в анизотропном и неоднородном (переменной проницаемости и толщины) пористом слое. Источники течения произвольные дискретные и могут располагаться в общем случае как на границах, так и вне границ. Границы моделируются произвольными гладкими (кусочно-гладкими) замкнутыми линиями, а источники течения – сингулярностями (изолированными особыми точками) комплексного потенциала. Наличие системы источников на границах приводит к принципиально новому обобщению (усложнению) граничных условий, которые характеризуются сингулярными функциями с изолированными особыми точками. В случае анизотропного однородного (постоянной проницаемости и толщины) слоя и прямолинейных границ решения задач представлены в конечном виде. В общем случае, когда произвольная гладкая замкнутая кривая моделирует границу с расположенными на ней источниками, использован обобщённый интеграл типа Коши для комплексного потенциала течения. Это позволило вторую краевую задачу и задачу сопряжения редуцировать к граничным сингулярным интегральным уравнениям. Исследованные задачи – математические модели двумерных фильтрационных процессов в слоистых пористых средах, представляющие интерес, например, для практики добычи флюидов (нефти, воды) из природных анизотропно-неоднородных пластов грунта.

DOI: 10.31857/S0374064123060079, EDN: FFZLVX

Введение. Известны граничные задачи аэродинамики и теории фильтрации, которые характеризуются сингулярными (негладкими) условиями на границах. Плоские и трёхмерные задачи обтекания непроницаемых профилей летательных аппаратов при наличии отсоса внешнего потока исследуются в работах [1, с. 164; 2; 3]. Поставленная в них краевая задача Неймана для уравнения Лапласа с обобщённым краевым условием редуцируется к гиперсингулярному интегральному уравнению, которое решается численным методом дискретных вихрей. В работах [4, с. 87; 5; 6] изучаются плоские задачи фильтрации в однородной пористой среде (грунт) с источниками на непроницаемых границах, моделируемых отрезком прямой или окружностью. В статьях [7–9] исследуются первая и вторая краевые задачи и задача сопряжения плоских и трёхмерных фильтрационных течений в однородной и неоднородной пористых средах, когда источники располагаются произвольно как на границах, так и вне границ. Решения задач представляются в конечном виде в случае канонических границ, а в общем случае произвольных гладких замкнутых границ задачи редуцируются к сингулярным (гиперсингулярным) интегральным уравнениям. Аналогичный подход используется в настоящей статье для исследования граничных задач двумерных течений в пористом слое с обобщёнными (усложнёнными) граничными условиями, которые характеризуются сингулярными (негладкими) функциями, причём, в отличие от статей [7–9], слой в общем анизотропный и неоднородный (переменной проницаемости и толщины), а источники течения произвольные дискретные и располагаются на границах и вне границ, которые моделируются произвольными гладкими замкнутыми кривыми (контурами).

1. Основные уравнения и граничные условия. Стационарное фильтрационное течение несжимаемой жидкости в анизотропной и неоднородной пористой среде характеризуют скорость фильтрации $\vec{v}$ и обобщённый потенциал φ, которые удовлетворяют записанным в безразмерных величинах [10, с. 10] обобщённому закону Дарси

$$\vec{v} = K \cdot \nabla\varphi \quad \left(\varphi = -\frac{p + \rho\Pi}{\mu}\right) \tag{1.1}$$

и уравнению неразрывности
$$\nabla\cdot\vec{v}=0. \tag{1.2}$$
Здесь K – проницаемость пористой среды (в общем несимметричный тензор второго ранга), p – давление, μ и ρ – вязкость и плотность жидкости соответственно, Π – потенциал массовых сил, ∇ – оператор Гамильтона.

Рассмотрим двумерное течение в тонком анизотропно-неоднородном пористом слое переменной толщины H и проницаемости K. Течение характеризуем, наряду с обобщённым потенциалом φ, также функцией тока ψ. Они, как функции декартовых координат x, y плоскости основания слоя, следующие из законов (1.1) и (1.2), определяют скорость $\vec{v}=(v_x,v_y)$ [11, с. 25]:
$$v_x=K_{11}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+K_{12}\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{1}{H}\frac{\partial\psi}{\partial y},\quad v_y=K_{21}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+K_{22}\frac{\partial\varphi}{\partial y}=-\frac{1}{H}\frac{\partial\psi}{\partial x}. \tag{1.3}$$
Из равенств (1.3) следует, что функции $\varphi(x,y)$ и $\psi(x,y)$ удовлетворяют всюду в области течения, за исключением сингулярностей (изолированных особых точек) этих функций, эллиптической системе уравнений
$$P_{11}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+P_{12}\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{\partial\psi}{\partial y},\quad P_{21}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+P_{22}\frac{\partial\varphi}{\partial y}=-\frac{\partial\psi}{\partial x}, \tag{1.4}$$
где P_{ij} – компоненты тензора проводимости слоя $P=HK$ $(P_{ij}=HK_{ij},\ i,j=1,2)$. Проводимость $P=(P_{ij})$ моделируется гладкими (непрерывно дифференцируемыми) функциями от x, y и удовлетворяет условиям
$$P_{11}>0\quad (P_{22}>0),\quad D(P_s)=P_{11}P_{22}-(P_{12}+P_{21})^2/4>0, \tag{1.5}$$
$D(P_s)$ – определитель симметричной части $P_s=(P+P^{\text{т}})/2$ тензора P, $P^{\text{т}}=(P_{ji})$ – транспонированный тензор.

Для исследования граничных задач воспользуемся согласно монографии [10, с. 75] физической комплексной плоскостью $z=x+iy$. Течение в области D этой плоскости характеризуем функциями $\varphi(z)$ и $\psi(z)$, $z\in D$, которые удовлетворяют уравнениям (1.4). Зададим для функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ условия на границах, которые моделируем гладкими (кусочно-гладкими) замкнутыми кривыми без самопересечений.

Если на границе σ_1 области D задано давление $p=p_0(z)$, $z\in\sigma_1$, то для обобщённого потенциала φ имеем условие
$$\varphi^+(z)=\alpha_1(z)\quad(\alpha_1=-(p_0+\rho\Pi)/\mu),\quad z\in\sigma_1. \tag{1.6}$$
Здесь и далее знак “ $+$ ” (“ $-$ ”) обозначает предельное значение функции при подходе к границе со стороны (с противоположной стороны) орта нормали к ней. Орт нормали к границе σ_1 направлен внутрь области D. В случае напорной фильтрации, когда массовые силы пренебрежимо малы $(\rho|\nabla\Pi|\ll|\nabla p|)$, а давление на границе σ_1 постоянно, $\varphi^+(z)=\mathrm{const}$, $z\in\sigma_1$, и можно принять
$$\varphi^+(z)=0,\quad z\in\sigma_1. \tag{1.6$'$}$$

Когда граница σ_2 непроницаемая для жидкости, то на ней имеет место условие непротекания, которое для функции тока (граница σ_2 – линия тока) запишем как
$$\psi^+(z)=\alpha_2,\quad \alpha_2=\mathrm{const},\quad z\in\sigma_2, \tag{1.7}$$
где орт нормали направлен в область D. Не нарушая общности, выберем $\alpha_2=0$ и тогда
$$\psi^+(z)=0,\quad z\in\sigma_2. \tag{1.7$'$}$$

Пусть кривая Γ – граница сопряжения областей D_1 и D_2 течения, проводимости слоя в которых P_1 и P_2 соответственно, причём $P_\nu=k_\nu P$, $k_\nu=\mathrm{const}>0$, $\nu=1,2$, $P=HK$, толщина H слоя непрерывна на Γ. Течение в областях D_1 и D_2 характеризуют функции φ_1, ψ_1 и φ_2, ψ_2, для которых имеем условия, выражающие непрерывность давления и расхода жидкости (условия сопряжения):

$$\varphi_1^+(z) = \varphi_2^-(z), \quad \psi_1(z)^+ = \psi_2^-(z), \quad z \in \Gamma. \tag{1.8}$$

Здесь орт нормали к границе Γ направлен в область D_1.

Если область течения ограничена сингулярной линией $\sigma_0 = \sigma_{01} \bigcup \sigma_{02}$, на части σ_{01} которой проводимость слоя $P(z) = \infty$ (его проницаемость $K = \infty$, толщина H конечная) и на части σ_{02} $P = 0$ $(K = 0$ или $H = 0)$, то должны выполняться условия

$$\varphi^+(z) = 0, \quad z \in \sigma_{01}; \quad \psi^+(z) = 0, \quad z \in \sigma_{02}. \tag{1.9}$$

Когда на границах σ_1, σ_2, Γ и, возможно, на линии σ_0 заданы источники течения, то указанные для функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ условия (1.6)–(1.9) должны выполняться всюду на границах, за исключением изолированных особых точек этих функций, моделирующих источники.

Если область течения содержит бесконечно удалённую точку и обобщённый потенциал $\varphi(z)$ (сопряжённая с ним функция тока $\psi(z)$) не имеет в бесконечности сингулярностей, то $\varphi(z)$ должен удовлетворять условиям

$$\varphi(z) = O(|z|^{-1}), \quad |P(z) \cdot \nabla\varphi(z)| = O(|z|^{-2}) \quad \text{при} \quad |z| \to \infty. \tag{1.10}$$

Таким образом, исследование граничных задач сводится к отысканию решений $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ системы уравнений (1.4) при заданных условиях (1.6)–(1.10). Тогда поле скоростей $\vec{v} = (v_x, v_y)$ можно найти из равенств (1.3).

Исследование задач, особенно в случае заданной на границах системы источников течения, вызывает принципиальные трудности, обусловленные в первую очередь математической сложностью системы уравнений (1.4). Эти трудности в значительной мере можно преодолеть, если данную систему уравнений, а значит в целом граничные задачи, привести к каноническому (наиболее простому) виду.

2. Постановка граничных задач на вспомогательной плоскости. Для представления граничных задач в каноническом виде наряду с физической комплексной плоскостью $z = x + iy$ используем вспомогательную комплексную плоскость $\zeta = \xi + i\eta$. Пусть область D плоскости z и область D' плоскости ζ взаимосвязаны гомеоморфным (взаимно-однозначным и непрерывным) преобразованием $\zeta = \zeta(z)$ $(\xi = \xi(x,y),\ \eta = \eta(x,y))$, которое удовлетворяет уравнению Бельтрами [10, с. 90] вида

$$\frac{\partial\zeta}{\partial\overline{z}} - \mu(z)\frac{\partial\zeta}{\partial z} = 0 \quad \left(\mu(z) = \frac{P_{22} - P_{11} - i(P_{12} + P_{21})}{P_{22} + P_{11} + 2\sqrt{D(P_s)}}, \quad |\mu(z)| < 1\right), \tag{2.1}$$

где

$$2\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}, \quad 2\frac{\partial}{\partial\overline{z}} = \frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}.$$

В силу неравенства $|\mu(z)| < 1$, $z \in D$, следующего из условий (1.5), якобиан J преобразования $\zeta = \zeta(z)$ строго положителен:

$$J = \left|\frac{\partial\zeta}{\partial z}\right|^2 - \left|\frac{\partial\zeta}{\partial\overline{z}}\right|^2 = \left|\frac{\partial\zeta}{\partial z}\right|^2(1 - |\mu(z)|^2) > 0,$$

что обеспечивает сохранение ориентации областей (в том числе направления обхода кривых) при переходе с плоскости z на плоскость ζ и обратно. Полагаем, что преобразование $\zeta = \zeta(z)$ оставляет бесконечно удалённую точку неподвижной.

Используем в плоскости ζ комплексный потенциал течения $W = W(\zeta)$, который взаимосвязан с обобщённым потенциалом $\varphi = \varphi(\zeta)$ и функцией тока $\psi = \psi(\zeta)$:

$$W = \varphi + i\frac{\psi}{P'} \quad \left(\varphi = \frac{\operatorname{Re}(P'W)}{\operatorname{Re}P'}, \quad \psi = \frac{|P'|^2 \operatorname{Im}W}{\operatorname{Re}P'}\right). \tag{2.2}$$

Здесь $P' = P'(\zeta) = \sqrt{D(P_s)} - i\sqrt{D(P_a)}$ – комплексная проводимость слоя, $D(P_a) = (P_{12} - P_{21})^2/4$ – определитель антисимметричной части $P_a = (P - P^{\mathrm{т}})/2$ тензора P.

Используя уравнение (2.1), запишем в плоскости ζ систему уравнений (1.4) в виде

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{\zeta}} + A(W - \overline{W}) = 0, \tag{2.3}$$

где

$$A = \frac{\overline{P'}}{P' + \overline{P'}} \frac{\partial \ln P'}{\partial \bar{\zeta}}, \quad 2\frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} = \frac{\partial}{\partial \xi} + i\frac{\partial}{\partial \eta}.$$

Уравнение (2.3) – комплексное представление в плоскости ζ канонической системы уравнений того же эллиптического типа

$$\sqrt{D(P_s)}\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + \sqrt{D(P_a)}\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = \frac{\partial \psi}{\partial \eta}, \quad -\sqrt{D(P_a)}\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + \sqrt{D(P_s)}\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = -\frac{\partial \psi}{\partial \xi}. \tag{2.4}$$

Пусть заданы источники течения, которые характеризуются в плоскости ζ комплексным потенциалом W_0 (обобщённым потенциалом φ_0 и функцией тока ψ_0):

$$W_0 = \varphi_0 + i\frac{\psi_0}{P'}. \tag{2.5}$$

Представим комплексный потенциал W_0 в виде

$$W_0(\zeta) = f_0(\zeta) + f(\zeta). \tag{2.6}$$

Здесь функция $f_0(\zeta)$ имеет сингулярности – систему изолированных особых точек*) $\zeta_0 = \{\zeta_{01}, \zeta_{02}, \ldots, \zeta_{0n}\}$, моделирующих точки расположения источников течения на кривых σ_1', σ_2', Γ' и, возможно, на σ_0', которые представляют собой образы кривых σ_1, σ_2, Γ и σ_0 относительно преобразования $\zeta = \zeta(z)$. Сингулярности функции $f(\zeta)$ лежат вне кривых.

Учтём заданные комплексным потенциалом (2.6) источники течения. Комплексный потенциал (2.2) для случая, когда область D' течения ограничена кривыми σ_1' и σ_2', запишем как

$$W(\zeta) = W_0(\zeta) + W_*(\zeta) = f_0(\zeta) + f(\zeta) + W_*(\zeta), \quad \zeta \in D'. \tag{2.7}$$

В случае кривой Γ' – границы сопряжения областей D_1' и D_2' слоя комплексной проводимости $\widetilde{P}_1'$ и $\widetilde{P}_2'$ ($\widetilde{P}_\nu' = k_\nu P'$, $k_\nu = \mathrm{const} > 0$, $\nu = 1, 2$) – течение в этих областях характеризуем комплексными потенциалами

$$W_\nu = k_\nu \varphi_\nu + i\frac{\psi_\nu}{P'}, \quad \nu = 1, 2, \tag{2.8}$$

которые представим в виде

$$W_\nu(\zeta) = W_0(\zeta) + W_*(\zeta) = f_0(\zeta) + f(\zeta) + W_*(\zeta), \quad \zeta \in D_\nu', \quad \nu = 1, 2. \tag{2.9}$$

В выражениях (2.7) и (2.9)

$$W_*(\zeta) = \varphi_*(\zeta) + i\frac{\psi_*(\zeta)}{P'(\zeta)} \tag{2.10}$$

– комплексный потенциал ($\varphi_*(\zeta)$ – обобщённый потенциал, $\psi_*(\zeta)$ – функция тока) возмущений, обусловленных границами.

*) Точки $\zeta_0 = \{\zeta_{01}, \zeta_{02}, \ldots, \zeta_{0n}\}$ – образы изолированных особых точек $z_0 = \{z_{01}, z_{02}, \ldots, z_{0n}\}$ расположения заданных на плоскости z источников, которые связаны гомеоморфным преобразованием $\zeta_0 = \zeta(z_0)$.

Запишем условия (1.6)–(1.10) на плоскости ζ. Учтём, что они ковариантны (сохраняют форму записи) относительно преобразования $\zeta = \zeta(z)$. Используя представления (2.2) и (2.5)–(2.10) и учитывая заданные в точках $\zeta_0 = \{\zeta_{01}, \zeta_{02}, \ldots, \zeta_{0n}\}$ границ источники, запишем условия для комплексного потенциала W_* возмущения. Имеем условия на границах σ_1' и σ_2':

$$\operatorname{Re}[P'(\zeta)W_*^+(\zeta)] = \alpha_1(\zeta)\operatorname{Re}P'(\zeta) - \operatorname{Re}[P'(\zeta)W_0(\zeta)], \quad \zeta \in \sigma_1', \quad \zeta \neq \zeta_0, \tag{2.11}$$

$$\operatorname{Im}W_*^+(\zeta) = \frac{\alpha_2(\zeta)\operatorname{Re}P'(\zeta)}{|P'(\zeta)|^2} - \operatorname{Im}W_0(\zeta), \quad \zeta \in \sigma_2', \quad \zeta \neq \zeta_0. \tag{2.12}$$

Здесь и далее в граничных условиях $W_0(\zeta) = f_0(\zeta) + f(\zeta)$. В частности, при $\alpha_1 = 0$ и $\alpha_2 = 0$ находим

$$\operatorname{Re}[P'(\zeta)W_*^+(\zeta)] = -\operatorname{Re}[P'(\zeta)W_0(\zeta)], \quad \zeta \in \sigma_1', \quad \zeta \neq \zeta_0, \tag{2.11$'$}$$

$$\operatorname{Im}W_*^+(\zeta) = -\operatorname{Im}W_0(\zeta), \quad \zeta \in \sigma_2', \quad \zeta \neq \zeta_0. \tag{2.12$'$}$$

Учтём, что всюду на границе Γ' непрерывны проводимость $P'(\zeta)$ слоя и функция $f(\zeta)$ ($f^+(\zeta) = f^-(\zeta) = f(\zeta)$, $\zeta \in \Gamma'$). Функция $f_0(\zeta)$ также непрерывна на Γ', за исключением её точек $\zeta = \zeta_0$ ($f_0^+(\zeta) = f_0^-(\zeta) = f_0(\zeta)$, $\zeta \in \Gamma'$, $\zeta \neq \zeta_0$). Имеем условия на Γ':

$$\operatorname{Re}[P'(\zeta)((1-\lambda)W_*^+(\zeta) - (1+\lambda)W_*^-(\zeta))] = 2\lambda W_0(\zeta),$$

$$\operatorname{Im}[W_*^+(\zeta) - W_*^-(\zeta)] = 0, \quad \zeta \in \Gamma', \quad \zeta \neq \zeta_0,$$

где $\lambda = (k_1 - k_2)/(k_1 + k_2)$, $\lambda \in (-1, 1)$. Из второго равенства следует, что функция тока $\psi(\zeta)$ возмущений непрерывна на границе ($\psi_*^+(\zeta) = \psi_*^-(\zeta)$, $\zeta \in \Gamma'$, $\zeta \neq \zeta_0$). Исключив $\overline{W_*^-(\zeta)}$ из этих условий, получим

$$[(1-\lambda)P'(\zeta) + (1+\lambda)\overline{P'(\zeta)}]W_*^+(\zeta) - 2\lambda\overline{P'(\zeta)}\,\overline{W_*^+(\zeta)} - (1+\lambda)[P'(\zeta) + \overline{P'(\zeta)}]W_*^-(\zeta) =$$

$$= 2\lambda[P'(\zeta)W_0(\zeta) + \overline{P'(\zeta)W_0(\zeta)}], \quad \zeta \in \Gamma', \quad \zeta \neq \zeta_0. \tag{2.13}$$

Согласно (1.9) полагаем, что заданные обобщённый потенциал $\varphi_0(\zeta)$ и функция тока $\psi_0(\zeta)$ удовлетворяют на сингулярных линиях σ_{01}' и σ_{02}' условиям

$$\varphi_0^+(\zeta) = 0, \quad \zeta \in \sigma_{01}', \quad \psi_0^+(\zeta) = 0, \quad \zeta \in \sigma_{02}', \quad \zeta \neq \zeta_0.$$

Тогда для комплексного потенциала $W_*(\zeta)$ запишем условия

$$\left[\frac{\operatorname{Re}(P'(\zeta)W_*(\zeta))}{\operatorname{Re}P'(\zeta)}\right]^+ = 0, \quad \zeta \in \sigma_{01}', \quad \left[\frac{|P'(\zeta)|^2\operatorname{Im}W_*(\zeta)}{\operatorname{Re}P'(\zeta)}\right]^+ = 0, \quad \zeta \in \sigma_{02}', \quad \zeta \neq \zeta_0. \tag{2.14}$$

Так как заданные источники течения моделируют сингулярности комплексного потенциала W_0, то комплексный потенциал W_* возмущений не имеет сингулярностей в бесконечности и для него согласно представлению (1.10) имеют место условия [10, с. 214]

$$\frac{\operatorname{Re}[P'(\zeta)W_*(\zeta)]}{\operatorname{Re}P'(\zeta)} = O(|\zeta|^{-1}), \quad \left|P'(\zeta)\cdot\nabla\frac{\operatorname{Re}[P'(\zeta)W_*(\zeta)]}{\operatorname{Re}P'(\zeta)}\right| = O(|\zeta|^{-2}) \quad \text{при} \quad |z| \to \infty, \tag{2.15}$$

которые выражают затухание возмущений на бесконечности.

Поставим для комплексного потенциала W_* первую и вторую краевые задачи и задачу сопряжения фильтрации в анизотропном неоднородном слое с произвольными дискретными источниками, расположенными на границах и вне границ. Заданы источники течения, которые моделируются в плоскости ζ сингулярностями комплексного потенциала W_0 течения в слое проводимости $P'(\zeta)$ (проводимости $P_\nu' = k_\nu P'(\zeta)$, $k_\nu = \mathrm{const} > 0$, $\nu = 1, 2$). Найти комплексный потенциал W_*, который удовлетворяет уравнению (2.3) и одному из следующих условий: условию (2.11) (первая краевая задача), условию (2.12) (вторая краевая задача) и условию (2.13) (задача сопряжения). Если область течения ограничена сингулярной линией σ_0' или/и содержит бесконечно удалённую точку, то W_* должен удовлетворять также условию (2.14) или/и условию (2.15). Тогда согласно представлениям (2.7) и (2.9) находим комплексные потенциалы W и W_ν (функции $\varphi(\zeta)$, $\psi(\zeta)$ и $\varphi_\nu(\zeta)$, $\psi_\nu(\zeta)$, $\nu=1,2$) и согласно гомеоморфизму $\zeta=\zeta(z)$ искомые обобщённые потенциалы $\varphi(z)$, $\varphi_\nu(z)$ и функции тока $\psi(z)$, $\psi_\nu(z)$, $\nu=1,2,$ течения.

Заметим, что для разрешимости второй внутренней краевой задачи согласно уравнению неразрывности (1.2) должен быть равен нулю поток жидкости через весь непроницаемый замкнутый контур σ_2', исключая его точки $\zeta=\zeta_0\in\sigma_2'$. Это означает, что комплексный потенциал $W_0=f_0(\zeta)+f(\zeta)$, характеризующий заданные внутри и на контуре σ_2' источники течения, должен согласно равенству

$$\int\limits_{\sigma_2'} Hv_n\,dl=0$$

при учёте [10, с. 180] $Hv_n=P_1'\dfrac{\partial\varphi_0}{\partial n}+P_2'\dfrac{\partial\varphi_0}{\partial l}$ удовлетворять следующему условию:

$$\int\limits_{\sigma_2'}\left(P_1'\frac{\partial\varphi_0}{\partial n}+P_2'\frac{\partial\varphi_0}{\partial l}\right)dl=0. \tag{2.16}$$

Здесь

$$\varphi_0(\zeta)=\frac{\operatorname{Re}[P'(\zeta)(f_0(\zeta)+f(\zeta))]}{P_1'(\zeta)},\quad P'=P_1'+iP_2'=\sqrt{D(P_s)}-i\sqrt{D(P_a)}.$$

Решение поставленных граничных задач представим в конечном виде, когда анизотропный слой однороден, а границы моделируются прямой линией. Исследование задач в общем случае анизотропного неоднородного слоя с произвольными гладкими граничными кривыми редуцируем к граничным сингулярным интегральным уравнениям.

3. Задачи в случае прямолинейных границ. Пусть анизотропный (кусочно-анизотропный) слой однородный и его проводимость $P=HK$ постоянная (кусочно-постоянная). На плоскости z каждую из границ σ_1, σ_2 и Γ (граница σ_0, естественно, отсутствует) моделируем прямой линией, проходящей через произвольную точку $z_0=x_0+iy_0$ под углом θ_0 к оси Ox. Её параметрическое уравнение $(t\in(-\infty,\infty)$ – параметр) имеет вид

$$z=z_0+te^{i\theta_0}\quad (x=x_0+t\cos\theta_0,\quad y=y_0+t\sin\theta_0). \tag{3.1}$$

Поскольку проводимость слоя постоянная $(P_{ij}=\mathrm{const},\ i,j=1,2)$, то находим частное решение уравнения (2.1) при $\mu=\mathrm{const}$, представляющее прямое и обратное аффинное преобразование плоскостей $z=z+iy$ и $\zeta=\xi+i\eta$ [10, с. 218]:

$$\zeta=[z-z_0+\mu(\bar z-\bar z_0)]e^{-i\vartheta_0},\quad z-z_0=\frac{\zeta e^{i\vartheta_0}-\mu\bar\zeta e^{-i\vartheta_0}}{1-|\mu|^2}, \tag{3.2}$$

где $e^{i\vartheta_0}=e^{i\theta_0}+\mu e^{-i\theta_0}$, $e^{-i\vartheta_0}=e^{-i\theta_0}+\bar\mu e^{i\theta_0}$. Согласно преобразованию (3.2) прямая линия (3.1) преобразуется в прямую $\zeta=t$ $(\xi=t,\ \eta=0,\ t\in(-\infty,\infty))$ – координатную ось $O\xi$, а точка $z=z_0$ – в точку $\zeta=0$ $(\xi=0,\ \eta=0)$ – начало координат плоскости ζ.

Решение задачи сопряжения даёт

Теорема 1 (сопряжения на прямой). *Пусть заданные источники течения в анизотропном однородном слое постоянной проводимости $P=HK$ характеризует в плоскости ζ комплексный потенциал*

$$W_0(\zeta)=f_0(\zeta)+f_1(\zeta)+f_2(\zeta), \tag{3.3}$$

в котором сингулярности (изолированные особые точки) функции $f_0(\zeta)$ *расположены на оси* $O\xi$, *а функций* $f_1(\zeta)$ *и* $f_2(\zeta)$ *– в полуплоскостях* $\{(\xi,\eta):\xi\in(-\infty,\infty),\eta>0\}$ *и* $\{(\xi,\eta):\xi\in\in(-\infty,\infty),\eta<0\}$ *соответственно, причём*

$$f_j(\zeta)=O(|\zeta|^{-1}) \quad \textit{при} \quad |\zeta|\to\infty, \quad j=0,1,2, \tag{3.4}$$

если эти функции не имеют сингулярностей в бесконечности. Тогда течение в областях $D_1'=\{(\xi,\eta):\xi\in(-\infty,\infty),\ \ \eta>0\}$ *и* $D_2'=\{(\xi,\eta):\xi\in(-\infty,\infty),\ \ \eta<0\}$, *проводимости слоя в которых* $\widetilde{P}_1'$ *и* $\widetilde{P}_2'$ $(\widetilde{P}_\nu'=k_\nu P',\ \ k_\nu=\mathrm{const}>0,\ \ \nu=1,2)$ *соответственно, характеризуют комплексные потенциалы*

$$W_1(\zeta)=W_0(\zeta)+\Lambda[\overline{P'}(\overline{f_0(\bar\zeta)}+\overline{f_1(\bar\zeta)})+P'f_2(\zeta)], \quad \zeta\in D_1',$$

$$W_2(\zeta)=W_0(\zeta)-\bar\Lambda[P'f_1(\zeta)+\overline{P'}(\overline{f_0(\bar\zeta)}+\overline{f_2(\bar\zeta)})], \quad \zeta\in D_2'. \tag{3.5}$$

Здесь $W_0(\zeta)$ *– комплексный потенциал (3.3),*

$$\Lambda=\frac{2\lambda}{(1-\lambda)P'+(1+\lambda)\overline{P'}}, \quad \bar\Lambda=\frac{2\lambda}{(1-\lambda)\overline{P'}+(1+\lambda)P'}, \quad \lambda=\frac{k_1-k_2}{k_1+k_2}, \quad \lambda\in(-1,1).$$

Доказательство. Поскольку проводимость слоя $P'=\sqrt{D(P_s)}-i\sqrt{P(P_a)}=\mathrm{const}$, то уравнение (2.3) принимает вид $\partial W/\partial\bar\zeta=0$, характерный для аналитической функции*) $W(\zeta)$. Следовательно, заданный комплексный потенциал $W_0(\zeta)$ – аналитическая функция всюду на плоскости, кроме особых точек. Убедимся, что аналитической функцией является комплексный потенциал возмущений $W_*(\zeta)$, который согласно формулам (2.9) и (3.5) представим в виде

$$W_*(\zeta)=\begin{cases}AU_1(\zeta), & \zeta\in D_1',\\ BU_2(\zeta), & \zeta\in D_2'.\end{cases}$$

Здесь $U_1(\zeta)=\overline{P'}(\overline{f_0(\bar\zeta)}+\overline{f_1(\bar\zeta)})+P'(\zeta)$, $U_2(\zeta)=P'f_1(\zeta)+\overline{P'}(\overline{f_0(\bar\zeta)}+\overline{f_2(\bar\zeta)})$, A и B – в общем случае комплексные постоянные.

По условию теоремы функции $f_1(\zeta)$ и $f_2(\zeta)$ имеют заданные сингулярности в областях D_1' и D_2' соответственно. Поэтому $f_1(\zeta)$, $\zeta\in D_2'$, и $f_2(\zeta)$, $\zeta\in D_1'$, – аналитические функции. Аналитически продолжим каждую из них соответственно в областях D_1' и D_2'. Получим функции $\overline{f_1(\bar\zeta)}$, $\zeta\in D_1'$, и $\overline{f_2(\bar\zeta)}$, $\zeta\in D_2'$, аналитические в областях D_1' и D_2'. Функции $f_0(\zeta)$, $\overline{f_0(\bar\zeta)}$ аналитические всюду в областях D_1' и D_2'. Поэтому $U_1(\zeta)$, $\zeta\in D_1'$, и $U_2(\zeta)$, $\zeta\in\in D_2'$, – аналитические функции в областях D_1' и D_2' и, следовательно, комплексный потенциал $W_*(\zeta)$ – аналитическая функция в этих областях.

Теперь найдём константы A и B из условия (2.13) на границе $\Gamma'=\{(\xi,\eta):\xi\in(-\infty,\infty),\ \eta=0\}$. Отметив, что на ней справедливы соотношения

$$\overline{U}_1(\xi,0)=U_2(\xi,0), \quad P'W_0(\xi,0)+\overline{P'W}_0(\xi,0)=U_1(\xi,0)+U_2(\xi,0),$$

имеем равенство

$$[((1-\lambda)P'+(1+\lambda)\overline{P'})A-2\lambda]U_1(\xi,0)-[2\lambda\overline{P'}\bar A-(1+\lambda)(P'+\overline{P'})B-2\lambda]U_2(\xi,0)=0.$$

Оно обращается в тождество во всех точках оси $O\xi$, за исключением особых точек функции $f_0(\zeta)$ на этой оси, если

$$A=\Lambda=\frac{2\lambda}{(1-\lambda)P'+(1+\lambda)\overline{P'}}, \quad B=-\bar\Lambda=-\frac{2\lambda}{(1-\lambda)\overline{P'}+(1+\lambda)P'}.$$

---

*) Функции $\varphi(\zeta)$ и $\psi(\zeta)$ удовлетворяют системе уравнений (2.4) с заданными постоянными коэффициентами $\sqrt{D(P_s)}$ и $\sqrt{D(P_a)}$.

Тогда имеем комплексный потенциал возмущений

$$W_*(\zeta) = \begin{cases} \Lambda U_1(\zeta), & \zeta \in D_1', \\ -\bar{\Lambda} U_2(\zeta), & \zeta \in D_2', \end{cases}$$

который удовлетворяет в силу условий (3.4) требованиям (2.15) в бесконечности.

Учитывая найденный комплексный потенциал $W_*(\zeta)$, согласно представлению (2.9) имеем искомые комплексные потенциалы (3.5). Теорема доказана.

Рассмотрим теперь случай, когда заданная уравнением (3.1) прямая моделирует каждую из границ σ_1 и σ_2. Решение первой и второй краевых задач выражает

Теорема 2. *Пусть заданные источники течения в изотропном однородном слое постоянной проводимости $P = HK$ характеризует в плоскости ζ комплексный потенциал*

$$W_0(\zeta) = f_0(\zeta) + f(\zeta), \tag{3.6}$$

в котором сингулярности функции $f_0(\zeta)$ расположены на оси $O\xi$, а функции $f(\zeta)$ – в верхней координатной полуплоскости $\{(\xi,\eta) : \xi \in (-\infty,\infty),\ \ \eta > 0\}$, причём

$$f_0(\zeta) = O(|\zeta|^{-1}), \quad f(\zeta) = O(|\zeta|^{-1}) \quad \text{при} \quad |\zeta| \to \infty, \tag{3.7}$$

если эти функции не имеют сингулярностей в бесконечности. Тогда течение в области $D' = \{(\xi,\eta) : \xi \in (-\infty,\infty),\ \ \eta > 0\}$, ограниченной осью $O\xi$, которая моделирует границу σ_1' или σ_2', описывает комплексный потенциал

$$W(\zeta) = W_0(\zeta) - \frac{\overline{P'}}{P'}\overline{W_0(\bar{\zeta})}, \quad \zeta \in D', \tag{3.8}$$

или

$$W(\zeta) = W_0(\zeta) + \overline{W_0(\bar{\zeta})}, \quad \zeta \in D'. \tag{3.9}$$

Здесь $W_0(\zeta)$ – комплексный потенциал (3.6), а $\overline{W_0(\bar{\zeta})} = \overline{f_0(\bar{\zeta})} + \overline{f(\bar{\zeta})}$.

Доказательство. Функции $f_0(\zeta)$ и $\overline{f_0(\bar{\zeta})}$ – аналитические в области D', а функция $f(\zeta)$ – аналитическая в нижней полуплоскости $\{(\xi,\eta) : \xi \in (-\infty,\infty),\ \ \eta < 0\}$. Аналитически продолжив функцию $f(\zeta)$ в верхнюю полуплоскость, получим аналитическую функцию $\overline{f(\bar{\zeta})}$, $\zeta \in D'$. Поэтому комплексные потенциалы возмущений

$$W_*(\zeta) = -\frac{\overline{P'}}{P'}\overline{W_0(\bar{\zeta})}, \quad \zeta \in D', \tag{3.10}$$

и

$$W_*(\zeta) = \overline{W_0(\bar{\zeta})}, \quad \zeta \in D', \tag{3.11}$$

являются аналитическими функциями в области D'.

Подставим комплексные потенциалы (3.10) и (3.11) в условия $(2.11')$ и $(2.12')$ соответственно. Нетрудно убедиться в том, что они выполняются во всех точках оси $O\xi$, моделирующей границы σ_1' и σ_2', кроме заданных точек сингулярности функции $f_0(\zeta)$.

В силу условий (3.7) комплексные потенциалы (3.10) и (3.11) удовлетворяют условиям (2.15) в бесконечности.

Используя представление (2.7) и найденные комплексные потенциалы $W_*(\zeta)$, получаем искомые комплексные потенциалы (3.8) и (3.9). Теорема доказана.

Рассмотрим частные случаи решений граничных задач, представленных теоремами 1 и 2 в общем виде. Если на границах источники течения отсутствуют $(f_0(\zeta) = 0)$, то из выражений (3.5), (3.8) и (3.9) следуют при $W_0(\zeta) = f(\zeta)$ известные решения задач [10, с. 218]. Когда источники располагаются только на границах, вне границ источников нет, то в решениях (3.5), (3.8) и (3.9) следует положить $W_0(\zeta) = f_0(\zeta)$. Заданные конкретные источники течения характеризуются комплексным потенциалом $W_0(\zeta)$, который может иметь изолированные особые точки логарифмического типа и полюсы [10, с. 127].

4. Задачи с произвольными гладкими границами. Рассмотрим теперь общий случай фильтрации в анизотропном неоднородном слое, когда в плоскости ζ границы Γ' и σ_2' моделируются замкнутой гладкой (кусочно-гладкой) кривой L'. В плоскости ζ комплексный потенциал $W(\zeta)$ представим обобщённым интегралом типа Коши [10, с. 185]

$$W(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L'} [\Omega_1^0(\zeta,\tau)f(\tau) - \Omega_2^0(\zeta,\tau)\overline{f}(\tau)]\,dl_\tau, \quad \zeta \notin L'. \tag{4.1}$$

Здесь $\Omega_k^0(\zeta,\tau)$, $k=1,2$, – ядра интеграла, которые выражаются через фундаментальные решения $F_k(\zeta,\tau)$, $k=1,2$, уравнения (2.3) формулами

$$\Omega_1^0(\zeta,\tau) = -2\pi P'(\tau)\frac{\partial F_1(\zeta,\tau)}{\partial\lambda_\tau} = -2\pi i\frac{\partial F_2(\zeta,\tau)}{\partial\lambda_\tau},$$

$$\Omega_2^0(\zeta,\tau) = -2\pi\overline{P'}(\tau)\frac{\partial F_1(\zeta,\tau)}{\partial\overline{\lambda}_\tau} = 2\pi i\frac{\partial F_2(\zeta,\tau)}{\partial\overline{\lambda}_\tau}, \tag{4.2}$$

где комплексные операторы дифференцирования по $\lambda_\tau = l_\tau + in_\tau$ и $\overline{\lambda}_\tau = l_\tau - in_\tau$ по направлению ортов касательной $\vec{l}_\tau$ и нормали $\vec{n}_\tau$ кривой L' находятся как

$$2\frac{\partial}{\partial\lambda_\tau} = \frac{\partial}{\partial l_\tau} - i\frac{\partial}{\partial n_\tau}, \quad 2\frac{\partial}{\partial\overline{\lambda}_\tau} = \frac{\partial}{\partial l_\tau} + i\frac{\partial}{\partial n_\tau}, \quad \frac{\partial}{\partial l_\tau} = \frac{\partial}{\partial\lambda_\tau} + \frac{\partial}{\partial\overline{\lambda}_\tau}, \quad \frac{\partial}{\partial n_\tau} = i\left(\frac{\partial}{\partial\lambda_\tau} - \frac{\partial}{\partial\overline{\lambda}_\tau}\right).$$

Пусть в точках $\zeta_0 = \{\zeta_{01},\zeta_{02},\ldots,\zeta_{0n}\}$ кривой L' располагается система дискретных источников течения, которые моделируем сингулярностями (изолированными особыми точками) функции $f(\zeta)$, причём в этих точках функция $f(\zeta)$ должна удовлетворять условию интегрируемости

$$f(\zeta) = O(|\zeta-\zeta_0|^{-\varepsilon}), \quad \varepsilon\in(0,1) \quad \text{при} \quad \zeta\to\zeta_0, \quad \zeta,\zeta_0\in L',$$

которое необходимо для существования (сходимости) интеграла (4.1).

Полагаем, что фундаментальные решения $F_1(\zeta,\tau)$ и $F_2(\zeta,\tau)$ удовлетворяют на сингулярных линиях σ_{01}' и σ_{01}' условиям

$$\left[\frac{\operatorname{Re}(P'(\zeta)F_1(\zeta,\tau))}{\operatorname{Re}P'(\zeta)}\right]^+ = 0, \quad \zeta\in\sigma_{01}', \quad \left[\frac{|P'(\zeta)|^2\operatorname{Im}F_2(\zeta,\tau)}{\operatorname{Re}P'(\zeta)}\right]^+ = 0, \quad \zeta\in\sigma_{02}', \quad \zeta\neq\zeta_0.$$

Тогда комплексный потенциал (4.1) будет удовлетворять условиям (2.14).

Поскольку комплексный потенциал (4.1) определяется обобщённым интегралом типа Коши, то согласно [10, с. 185; 12, с. 144] он удовлетворяет условию

$$W(\zeta) = O(|\zeta|^{-1}) \quad \text{при} \quad |\zeta|\to\infty.$$

Пусть $f(\zeta)$, $\zeta\in L'$, – функция класса Гёльдера всюду на L', кроме точек $\zeta_0\in L'$ сингулярности этой функции. Непрерывно продолжив комплексный потенциал (4.1) на кривую L', получим его предельные значения

$$W^\pm(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L'} [\Omega_1^0(\zeta,\tau)f(\tau) - \Omega_2^0(\zeta,\tau)\overline{f}(\tau)]\,dl_\tau \pm \frac{f(\zeta)}{2}, \quad \zeta\in L', \quad \zeta\neq\zeta_0, \tag{4.3}$$

где интеграл понимается в смысле главного значения по Коши. Из представления (4.3) следуют эквивалентные ему равенства

$$W^+(\zeta) + W^-(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L'} [\Omega_1^0(\zeta,\tau)f(\tau) - \Omega_2^0(\zeta,\tau)\overline{f}(\tau)]\,dl_\tau,$$

$$W^+(\zeta) + W^-(\zeta) = f(\zeta), \quad \zeta\in L', \quad \zeta\neq\zeta_0. \tag{4.4}$$

Полагая непрерывность проводимости $P'(\zeta)$ на кривой L' и учитывая предельные выражения комплексного потенциала

$$W^{\pm}(\zeta) = \varphi^{\pm}(\zeta) + i\frac{\psi^{\pm}(\zeta)}{P'(\zeta)}, \quad \zeta \in L', \quad \zeta \neq \zeta_0,$$

находим из равенств (4.4) разности предельных значений функций:

$$\varphi^{+}(\zeta) - \varphi^{-}(\zeta) = \frac{\mathrm{Re}\,[P'(\zeta)f(\zeta)]}{\mathrm{Re}\,P'(\zeta)},$$

$$\psi^{+}(\zeta) - \psi^{-}(\zeta) = \frac{|P'(\zeta)|^2\,\mathrm{Im}\,f(\zeta)}{\mathrm{Re}\,P'(\zeta)}, \quad \zeta \in L', \quad \zeta \neq \zeta_0. \tag{4.5}$$

Рассмотрим два возможных, физически обоснованных, случая равенств (4.5). В первом из них непрерывен в точках $\zeta \neq \zeta_0 \in L'$ кривой L' поток жидкости, т.е. непрерывна функция тока $\psi^{+}(\zeta) = \psi^{-}(\zeta)$, $\zeta \in L'$, $\zeta \neq \zeta_0$. Тогда имеем $\mathrm{Im}\,f(\zeta) = 0$ и, следовательно, $f(\zeta) = G(\zeta)$, $\zeta \in L'$, $\zeta \neq \zeta_0$. Вещественная функция $G(\zeta)$ определяет разрыв на кривой L' обобщённого потенциала (давления):

$$\varphi^{+}(\zeta) - \varphi^{-}(\zeta) = G(\zeta), \quad \zeta \in L', \quad \zeta \neq \zeta_0.$$

В этом случае комплексный потенциал (4.1) и его предельные значения (4.3) с учётом ядер (4.2) принимают вид

$$W(\zeta) = \int\limits_{L'} \Omega(\zeta,\tau)G(\tau)\,dl_\tau, \quad \zeta \neq L', \tag{4.6}$$

$$W^{\pm}(\zeta) = \int\limits_{L'} \Omega(\zeta,\tau)G(\tau)\,dl_\tau \pm \frac{G(\zeta)}{2}, \quad \zeta \in L', \quad \zeta \neq \zeta_0, \tag{4.7}$$

где

$$\Omega(\zeta,\tau) = P_1'(\tau)\frac{\partial F_1(\zeta,\tau)}{\partial n_\tau} - P_2'(\tau)\frac{\partial F_2(\zeta,\tau)}{\partial l_\tau} = -\frac{\partial F_2(\zeta,\tau)}{\partial l_\tau}.$$

Во втором случае полагаем, что в точках $\zeta \neq \zeta_0 \in L'$ кривой L' непрерывен обобщённый потенциал (давление): $\varphi^{+}(\zeta) = \varphi^{-}(\zeta)$, $\zeta \in L'$, $\zeta \neq \zeta_0$. Тогда имеем $\mathrm{Re}\,[P'(\zeta)f(\zeta)] = 0$ и, следовательно, $P'(\zeta)f(\zeta) = iH(\zeta)$, откуда $f(\zeta) = iH(\zeta)/P'(\zeta)$, $\zeta \in L'$, $\zeta \neq \zeta_0$. Вещественная функция $H(\zeta)$ определяет разрыв на кривой L' функции тока (разрыв потока жидкости):

$$\psi^{+}(\zeta) - \psi^{-}(\zeta) = H(\zeta), \quad \zeta \in L', \quad \zeta \neq \zeta_0.$$

В этом случае комплексный потенциал (4.1) и его предельные значения (4.3) запишем в виде

$$W(\zeta) = \int\limits_{L'} \Omega_*(\zeta,\tau)H(\tau)\,dl_\tau, \quad \zeta \neq L', \tag{4.8}$$

$$W^{\pm}(\zeta) = \int\limits_{L'} \Omega_*(\zeta,\tau)H(\tau)\,dl_\tau \pm i\frac{H(\zeta)}{2P'(\zeta)}, \quad \zeta \in L', \quad \zeta \neq \zeta_0, \tag{4.9}$$

где

$$\Omega_*(\zeta,\tau) = -\frac{\partial F_1(\zeta,\tau)}{\partial l_\tau} = -\frac{1}{|P'(\zeta)|^2}\left(P_1'(\tau)\frac{\partial F_2(\zeta,\tau)}{\partial n_\tau} + P_2'(\tau)\frac{\partial F_2(\zeta,\tau)}{\partial l_\tau}\right).$$

Применим обобщённый интеграл типа Коши для решения поставленной задачи сопряжения и второй краевой задачи. Рассмотрим сначала задачу сопряжения, когда произвольный гладкий замкнутый контур L' моделирует граничную кривую Γ' $(L = \Gamma')$. Справедлива

Теорема 3 (сопряжения на произвольной гладкой кривой). *Пусть заданные источники течения в слое проводимости* $P = HK$ *характеризует в плоскости* ζ *комплексный потенциал*

$$W_0(\zeta) = f_0(\zeta) + f(\zeta), \tag{4.10}$$

в котором сингулярности функции $f_0(\zeta)$ *расположены в точках* $\zeta_0 = \{\zeta_{01}, \zeta_{02}, \ldots, \zeta_{0n}\}$ *кривой* Γ', *а сингулярности функции* $f(\zeta)$ *– вне этой кривой, причём функция* $f_0(\zeta)$ *удовлетворяет условию*

$$|f_0(\zeta)| = O(|\zeta - \zeta_0|^{-\varepsilon}), \quad \varepsilon \in (0,1) \quad \textit{при} \quad \zeta \to \zeta_0, \quad \zeta, \zeta_0 \in \Gamma'. \tag{4.11}$$

Тогда течение в областях D_1' *и* D_2', *проводимости слоя в которых соответственно* $\widetilde{P}_1'$ *и* $\widetilde{P}_2'$ $(\widetilde{P}_\nu = k_\nu P'(\zeta),\ \ k_\nu = \mathrm{const} > 0,\ \ \nu = 1,2)$, *характеризуют комплексные потенциалы* $W_1(\zeta)$ *и* $W_2(\zeta)$:

$$W_\nu(\zeta) = f_0(\zeta) + f(\zeta) + \int\limits_{\Gamma'} \Omega(\zeta,\tau)[2\lambda u_0(\tau) + g(\tau)]\, dl_\tau, \quad z \in D_\nu', \quad \nu = 1,2, \tag{4.12}$$

если функция $g(\zeta)$ *удовлетворяет интегральному уравнению*

$$g(\zeta) - 2\lambda \int\limits_{\Gamma'} \mathcal{K}(\zeta,\tau) g(\tau)\, dl_\tau + 4\lambda^2 \int\limits_{\Gamma'} \mathcal{K}(\zeta,\tau) u_0(\tau)\, dl_\tau = 2\lambda u(\zeta), \quad \zeta \in \Gamma', \quad \zeta \neq \zeta_0. \tag{4.13}$$

Здесь

$$\Omega(\zeta,\tau) = P_1'(\tau)\frac{\partial F_1(\zeta,\tau)}{\partial n_\tau} - P_2'(\tau)\frac{\partial F_1(\zeta,\tau)}{\partial l_\tau} = -\frac{\partial F_2}{\partial l_\tau},$$

$$\mathcal{K}(\zeta,\tau) = P_1'(\tau)\frac{\partial \Phi_1(\zeta,\tau)}{\partial n_\tau} - P_2'(\tau)\frac{\partial \Phi_1(\zeta,\tau)}{\partial l_\tau} = -\frac{\partial \Phi_2}{\partial l_\tau},$$

$$u(\zeta) = \frac{\operatorname{Re}[P'(\zeta) f(\zeta)]}{P_1'(\zeta)}, \quad u_0(\zeta) = \frac{\operatorname{Re}[P'(\zeta) f_0(\zeta)]}{P_1'(\zeta)},$$

орт нормали $n_\tau \in \Gamma'$ *направлен в область* D_1', $\lambda = (k_1 - k_2)/(k_1 + k_2)$, $\lambda \in (-1, 1)$.

Доказательство. Учтём, что функция тока непрерывна всюду на кривой Γ', кроме точек $\zeta_0 \in \Gamma'$, где заданы источники течения. Согласно представлениям (2.9) и (4.6) комплексный потенциал возмущений $W_*(\zeta)$ ищем в виде

$$W_*(\zeta) = \int\limits_{\Gamma'} \Omega(\zeta,\tau) G(\tau)\, dl_\tau, \quad \zeta \in D_\nu', \quad \nu = 1,2, \tag{4.14}$$

где $G(\tau) = g_0(\tau) + g(\tau)$ – вещественная функция $\tau \in \Gamma'$. Функция $g_0(\tau)$ имеет в соответствии с условием (4.11) интегрируемые особенности в тех же точках $\tau = \zeta_0 \in \Gamma'$, что и функция $f_0(\tau)$, а функция $g(\tau)$ непрерывна на всей кривой Γ'.

Комплексный потенциал (4.14) – обобщённая аналитическая функция, которая удовлетворяет уравнению (2.3) и условиям (2.14) и (2.15), а также и условию (2.13) на кривой Γ'.

Пусть функция $g_0(\tau)$, $\tau \in \Gamma'$, – класса Гёльдера, за исключением точек $\tau = \zeta_0 \in \Gamma'$ сингулярности функции, а функция $g(\tau)$, $\tau \in \Gamma'$, – класса Гёльдера всюду на кривой Γ'. Тогда согласно представлению (4.7) имеем предельные значения комплексного потенциала (4.14):

$$W_*^{\pm}(\zeta) = \int\limits_{\Gamma'} \Omega(\zeta,\tau) G(\tau)\, dl_\tau \pm \frac{G(\zeta)}{2}, \quad \zeta \in \Gamma', \quad \zeta \neq \zeta_0,$$

где интеграл понимается в смысле главного значения по Коши. Подставив значения $W_*^{\pm}(\zeta)$ в условия (2.13), получим равенство

$$P_1(\zeta)G(\zeta) - \lambda \int\limits_{\Gamma'} [P'(\zeta)\Omega(\zeta,\tau) + \overline{P'}(\zeta)\overline{\Omega}(\zeta,\tau)]G(\tau)\,dl_\tau =$$

$$= \lambda[P'(\zeta)W_0(\zeta) + \overline{P'}(\zeta)\overline{W_0}(\zeta)], \quad \zeta \in \Gamma', \quad \zeta \neq \zeta_0,$$

которое с учётом выражения

$$P'(\zeta)\Omega(\zeta,\tau) + \overline{P'}(\zeta)\overline{\Omega}(\zeta,\tau) = P_1'(\zeta)\mathcal{K}(\zeta,\tau)$$

и представлений в заданном комплексном потенциале (4.10) функций

$$f(\zeta) = u(\zeta) + i\frac{v(\zeta)}{P'(\zeta)}, \quad f_0(\zeta) = u_0(\zeta) + i\frac{v_0(\zeta)}{P'(\zeta)}$$

обращается в тождество, если функция $G(\zeta)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$G(\zeta) - 2\lambda \int\limits_{\Gamma'} \mathcal{K}(\zeta,\tau)G(\tau)\,dl_\tau = 2\lambda[u_0(\zeta) + u(\zeta)], \quad \zeta \in \Gamma', \quad \zeta \neq \zeta_0. \tag{4.15}$$

Здесь $G(\zeta) = g_0(\zeta) + g(\zeta)$, $\mathcal{K}(\zeta,\tau)$ – ядро уравнения, имеющее такой же вид, как и в уравнении (4.13).

Уравнение (4.13) принципиально усложнено тем, что функции $g_0(\zeta)$ и $u_0(\zeta)$ имеют в точках $\zeta = \zeta_0 \in \Gamma'$ сингулярности. Упростим его. Пусть функции $g_0(\zeta)$ и $u_0(\zeta)$ имеют в точках $\zeta = \zeta_0 \in \Gamma'$ сингулярности одного и того же типа (порядка). Положим $g_0(\zeta) = 2\lambda u_0(\zeta)$, $\zeta \in \Gamma'$. Тогда, учитывая $G(\zeta) = 2\lambda u_0(\zeta) + g(\zeta)$, $\zeta \in \Gamma'$, и представление (2.9), имеем искомые комплексные потенциалы (4.12) и интегральное уравнение (4.13). Теорема доказана.

Исследуем интегральное уравнение (4.13), полагая, что кривая Γ' класса Ляпунова. Оценим его ядро

$$\mathcal{K}(\zeta,\tau) = P_1'(\tau)\frac{\partial\Phi_1(\zeta,\tau)}{\partial n_\tau} - P_2'(\tau)\frac{\partial\Phi_1(\zeta,\tau)}{\partial l_\tau}.$$

Согласно асимптотике [10, с. 112]

$$\Phi_1(\zeta,\tau) \sim \frac{1}{2\pi P_1'(\tau)} \ln\frac{1}{|\zeta-\tau|} \quad \text{при} \quad \tau \to \zeta,$$

представим функцию $\Phi_1(\zeta,\tau)$ в следующем виде:

$$\Phi_1(\zeta,\tau) = \frac{a_1(\zeta,\tau)}{2\pi P_1'(\tau)} \ln\frac{1}{|\zeta-\tau|} + b_1(\zeta,\tau).$$

Здесь $a_1(\zeta,\tau)$, $b_1(\zeta,\tau)$ – гладкие функции от ζ и τ, причём $a_1(\zeta,\zeta) = 1$. Находим производные по ортам $\vec{n}_\tau$ и $\vec{l}_\tau$, $\tau \in \Gamma'$:

$$\frac{\partial\Phi_1(\zeta,\tau)}{\partial n_\tau} = \nabla_\tau\Phi_1(\zeta,\tau)\cdot\vec{n}_\tau = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{a_1(\zeta,\tau)}{P_1'(\tau)}\frac{\cos(\widehat{\vec{R},\vec{n}_\tau})}{R} + \frac{\partial}{\partial n_\tau}\left(\frac{a_1(\zeta,\tau)}{P_1'(\tau)}\right)\ln\frac{1}{R} + \frac{\partial b_1(\zeta,\tau)}{\partial n_\tau}\right],$$

$$\frac{\partial\Phi_1(\zeta,\tau)}{\partial l_\tau} = \nabla_\tau\Phi_1(\zeta,\tau)\cdot\vec{l}_\tau = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{a_1(\zeta,\tau)}{P_1'(\tau)}\frac{\cos(\widehat{\vec{R},\vec{l}_\tau})}{R} + \frac{\partial}{\partial l_\tau}\left(\frac{a_1(\zeta,\tau)}{P_1'(\tau)}\right)\ln\frac{1}{R} + \frac{\partial b_1(\zeta,\tau)}{\partial l_\tau}\right].$$

Здесь $R = |\zeta - \tau|$ – модуль вектора $\vec{R} = \vec{\zeta\tau}$ с направляющими косинусами $\cos(\widehat{\vec{R},\vec{l}_\tau})$ и $\cos(\widehat{\vec{R},\vec{n}_\tau})$ $(\cos^2(\widehat{\vec{R},\vec{l}_\tau}) + \cos^2(\widehat{\vec{R},\vec{n}_\tau}) = 1)$ относительно ортогонального базиса ортов $\vec{l}_\tau$ и $\vec{n}_\tau$. Поскольку [10, с. 409]

$$|\cos(\widehat{\vec{R},\vec{n}_\tau})| \leqslant AR^\mu \quad \text{и} \quad |\cos(\widehat{\vec{R},\vec{l}_\tau})| \leqslant 1 - \frac{A^2R^{2\mu}}{2}, \quad \mu \in (0,1], \quad A = \mathrm{const} > 0,$$

то имеем неравенства

$$\left|\frac{\partial\Phi_1(\zeta,\tau)}{\partial n_\tau}\right| \leqslant \frac{A}{2\pi P_1'(\tau)R^{1-\mu}}, \quad \left|\frac{\partial\Phi_2(\zeta,\tau)}{\partial l_\tau}\right| \leqslant \frac{1}{2\pi P_1'(\tau)R} \quad \text{при} \quad \tau \to \zeta \quad (R \to 0).$$

Тогда для ядра $\mathcal{K}(\zeta,\tau)$ справедлива оценка

$$|\mathcal{K}(\zeta,\tau)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\left[\frac{A}{R^{1-\mu}} + \frac{|P_2'(\tau)|}{P_1'(\tau)R}\right] \quad \text{при} \quad \tau \to \zeta \quad (R \to 0),$$

где $R = |\zeta - \tau|$, $\mu \in (0,1]$.

Отсюда в общем случае анизотропного неоднородного слоя следует, что ядро $\mathcal{K}(\zeta,\tau)$ имеет в точке $\tau = \zeta \in \Gamma'$ особенность $1/R$. Тогда с учётом, что $g(\tau)$ – функция Гёльдера, стоящий первым в уравнении (4.13) интеграл существует в смысле главного значения по Коши. В частности, когда анизотропный слой ортотропный ($P_{12} = P_{21}$, следовательно, $P_2' = 0$), то ядро имеет слабую (интегрируемую) особенность $1/R^{1-\mu}$ и указанный интеграл существует.

Согласно условию (4.11)

$$u_0(\tau) = O(|\tau - \zeta_0|^{-\varepsilon}), \quad \varepsilon \in (0,1) \quad \text{при} \quad \tau \to \zeta_0 \in \Gamma'.$$

Тогда, учитывая оценку (4.15) ядра $\mathcal{K}(\zeta,\tau)$, находим

$$|\mathcal{K}(\zeta,\tau)u_0(\tau)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\left[\frac{A}{R^{1-\mu+\varepsilon}} + \frac{|P_2'(\tau)|}{P_1'(\tau)R^{1+\varepsilon}}\right] \quad \text{при} \quad \tau \to \zeta = \zeta_0 \quad (R \to 0).$$

Поэтому стоящий вторым в уравнении (4.13) интеграл существует (сходится), исключая точки $\tau = \zeta_0 \in \Gamma'$. В случае ортотропного слоя ($P_2' = 0$) этот интеграл существует всюду на границе Γ', если $\varepsilon < \mu$.

Таким образом, исследование задачи сопряжения редуцируется к граничному сингулярному интегральному уравнению второго рода с заданной гладкой правой частью $u(\zeta)$, $\zeta \in \Gamma'$.

Представление (4.12) задачи сопряжения получено в общем случае произвольно заданной системы источников течения. В частности, когда источники на границе Γ' отсутствуют ($f_0(\zeta) = 0$), то [10, с. 241]

$$W_0(\zeta) = f(\zeta) + \int\limits_{\Gamma'} \Omega(\zeta,\tau)g(\tau)\,dl_\tau, \quad z \in D_\nu', \quad \nu = 1,2,$$

если функция $g(\zeta)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$g(\zeta) - 2\lambda\int\limits_{\Gamma'} \mathcal{K}(\zeta,\tau)g(\tau)\,dl_\tau = 2\lambda u(\zeta), \quad \zeta \in \Gamma'.$$

Когда источники имеются только на границе Γ', а вне её отсутствуют ($f(\zeta) = 0$), то находим

$$W_\nu(\zeta) = f_0(\zeta) + \int\limits_{\Gamma'} \Omega(\zeta,\tau)[2\lambda u_0(\tau) + g(\tau)]\,dl_\tau, \quad \zeta \in D_\nu', \quad \nu = 1,2,$$

если функция $g(\zeta)$ – решение интегрального уравнения

$$g(\zeta) - 2\lambda \int\limits_{\Gamma'} \mathcal{K}(\zeta,\tau) g(\tau)\, dl_\tau + 4\lambda^2 \int\limits_{\Gamma'} \mathcal{K}(\zeta,\tau) u_0(\tau)\, dl_\tau = 0, \quad \zeta \in \Gamma', \quad \zeta \neq \zeta_0.$$

Это уравнение неоднородное, поскольку его последнее слагаемое содержит только заданные функции.

Согласно условию (4.11) полученное представление (4.12) задачи сопряжения справедливо, когда заданные источники на границе Γ' моделируются изолированными особыми точками логарифмического типа. К таковым относится сток мощности $\Pi_0 > 0$ (источник мощности $\Pi_0 < 0$) и вихрь интенсивности Γ_0, комплексные потенциалы которых соответственно $\Pi_0 F_1(\zeta,\tau)$ и $\Gamma_0 F_2(\zeta,\tau)$ ($F_1(\zeta,\tau)$ и $F_2(\zeta,\tau)$ – первое и второе фундаментальные решения), а также их наложение $\Pi_0 F_1(\zeta,\tau) + \Gamma_0 F_2(\zeta,\tau)$ – вихреисточник.

Перейдём теперь к исследованию второй краевой задачи, когда произвольная гладкая (кусочно-гладкая) замкнутая кривая L' моделирует контур σ_2' непроницаемой границы ($L' = \sigma_2'$). Решение второй (внешней и внутренней) краевой задачи выражает

Теорема 4. *Пусть течение в слое проводимости $P = HK$ характеризует в плоскости ζ комплексный потенциал*

$$W_0(\zeta) = f_0(\zeta) + f(\zeta). \tag{4.16}$$

Здесь сингулярности функции $f_0(\zeta)$ моделируют систему заданных источников течения, которые расположены в точках $\zeta_0 = \{\zeta_{01}, \zeta_{02}, \ldots, \zeta_{0n}\}$ контура σ_2', а сингулярности функции $f(\zeta)$ моделируют источники, не лежащие на σ_2', причём функция $f_0(\zeta)$ удовлетворяет условию

$$|f_0(\zeta)| = O(|\zeta - \zeta_0|^{-\varepsilon}), \quad \varepsilon \in (0,1) \quad \text{при} \quad \zeta \to \zeta_0, \quad \zeta, \zeta_0 \in \sigma_2'. \tag{4.17}$$

Кроме того, функции $f_0(\zeta)$ и $f(\zeta)$ должны удовлетворять также условию (2.16) в случае второй внутренней краевой задачи.

Если контур σ_2' непроницаемый для жидкости, то течение в области D' (вне или внутри контура σ_2') характеризует комплексный потенциал

$$W(\zeta) = f_0(\zeta) + f(\zeta) + \int\limits_{\sigma_2'} \Omega_*(\zeta,\tau)[h(\tau) - 2v_0(\tau)]\, dl_\tau, \quad \zeta \in D', \tag{4.18}$$

если функция $h(\zeta)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$h(\zeta) + 2\int\limits_{\sigma_2'} \mathcal{K}_*(\zeta,\tau) h(\tau)\, dl_\tau - 4\int\limits_{\sigma_2'} \mathcal{K}_*(\zeta,\tau) v_0(\tau)\, dl_\tau = 2[\alpha_2 - v(\zeta)], \quad \zeta \in \sigma_2', \quad \zeta \neq \zeta_0. \tag{4.19}$$

Здесь

$$\Omega_*(\zeta,\tau) = \frac{\partial F_1(\zeta,\tau)}{\partial l_\tau} = -\frac{1}{|P'(\tau)|^2}\left[P_1'(\tau)\frac{\partial F_2(\zeta,\tau)}{\partial n_\tau} + P_2'(\tau)\frac{\partial F_2(\zeta,\tau)}{\partial l_\tau}\right],$$

$$\mathcal{K}_*(\zeta,\tau) = \frac{\partial \Psi_1(\zeta,\tau)}{\partial l_\tau} = \frac{1}{|P'(\tau)|^2}\left[P_1'(\tau)\frac{\partial \Psi_2(\zeta,\tau)}{\partial n_\tau} + P_2'(\tau)\frac{\partial \Psi_2(\zeta,\tau)}{\partial l_\tau}\right],$$

$$v(\zeta) = \frac{|P'(\zeta)|^2 \operatorname{Im} f(\zeta)}{P_1'(\zeta)}, \quad v_0(\zeta) = \frac{|P'(\zeta)|^2 \operatorname{Im} f_0(\zeta)}{P_1'(\zeta)},$$

орт нормали $\vec{n}_\tau \in \sigma_2'$ направлен внутрь области D' и остаётся слева при обходе контура σ_2'.

Доказательство. Учтём, что контур σ_2' – линия тока и на нём заданы источники течения. Согласно представлениям (2.7) и (4.8) комплексный потенциал возмущений $W_*(\zeta)$ ищем в виде

$$W_*(\zeta) = \int\limits_{\sigma_2'} \Omega_*(\zeta,\tau) H(\tau)\, dl_\tau, \quad \zeta \in D'. \tag{4.20}$$

Здесь $H(\tau) = h_0(\tau) + h(\tau)$ – вещественная функция $\tau \in \sigma_2'$, причём функция $h_0(\tau)$ имеет согласно условию (4.17) интегрируемые особенности в тех же точках $\tau = \zeta_0 \in \sigma_2'$, что и функция $f_0(\tau)$, а функция $h(\tau)$ непрерывна на всём контуре σ_2'.

Комплексный потенциал (4.20) – обобщённая аналитическая функция в области D'. Он удовлетворяет уравнению (2.3) и условиям (2.14) и (2.15). Удовлетворим его условию (2.12) на контуре σ_2'.

Пусть $h_0(\zeta)$, $\zeta \in \sigma_2'$, – функция Гёльдера, кроме её точек $\zeta = \zeta_0 \in \sigma_2'$ сингулярности, а $h(\zeta)$, $\zeta \in \sigma_2'$, – функция Гёльдера на всём контуре σ_2'. Согласно представлению (4.9) имеем предельные значения комплексного потенциала (4.20):

$$W_*^{\pm}(\zeta) = \int\limits_{\sigma_2'} \Omega_*(\zeta, \tau) H(\tau)\, dl_\tau \pm i \frac{H(\zeta)}{2P'(\zeta)}, \quad \zeta \in \sigma_2', \quad \zeta \neq \zeta_0,$$

где интеграл понимается в случае главного значения по Коши. Подставим $W_*^{+}(\zeta)$ в условие (2.12) и учтём в заданном комплексном потенциале (4.16) представления функций

$$f_0(\zeta) = u_0\zeta) + i\frac{v_0(\zeta)}{P'(\zeta)}, \quad f(\zeta) = u\zeta) + i\frac{v(\zeta)}{P'(\zeta)}.$$

Получим равенство

$$\frac{P_1'(\zeta)}{|P'(\zeta)|^2}\left[\frac{H(\zeta)}{2} + \int\limits_{\sigma_2'} \mathcal{K}_*(\zeta, \tau) H(\tau)\, dl_\tau + v_0(\zeta) + v(\zeta) - \alpha_2\right] = 0, \quad \zeta \in \sigma_2', \quad \zeta \neq \zeta_0,$$

которое обращается в тождество, если функция $H(\zeta)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$H(\zeta) + 2\int\limits_{\sigma_2'} \mathcal{K}_*(\zeta, \tau) H(\tau)\, dl_\tau = 2(\alpha_2 - v_0(\zeta) - v(\zeta)), \quad \zeta \in \sigma_2', \quad \zeta \neq \zeta_0.$$

Здесь $H(\zeta) = h_0(\zeta) + h(\zeta)$, $\mathcal{K}_*(\zeta, \tau)$ – ядро уравнения, которое имеет такой же вид, что и в уравнении (4.19). Это уравнение усложнено тем, что функции $h_0(\zeta)$ и $v_0(\zeta)$ имеют в точках $\zeta = \zeta_0 \in \sigma_2'$ сингулярности. Упростим уравнение. Пусть функции $h_0(\zeta)$ и $v_0(\zeta)$ обладают в указанных точках сингулярностями одного и того же типа (порядка) и положим $h_0(\zeta) = -2v_0(\zeta)$, $\zeta \in \sigma_2'$. Тогда, учитывая $H(\zeta) = h(\zeta) - 2v_0(\zeta)$, $\zeta \in \sigma_2'$, и представления (2.7), (4.20), имеем искомый комплексный потенциал (4.18) и интегральное уравнение (4.19).

Поскольку согласно теореме функции $f_0(\zeta)$ и $f(\zeta)$ должны удовлетворять условию (2.16), то вторая внутренняя краевая задача разрешима (уравнение (4.19) имеет решение). Теорема доказана.

Исследуем интегральное уравнение (4.19). Оценим его ядро

$$\mathcal{K}_*(\zeta, \tau) = \frac{1}{|P'(\tau)|^2}\left[P_1'(\tau)\frac{\partial \Psi_2(\zeta, \tau)}{\partial n_\tau} + P_2'(\tau)\frac{\partial \Psi_2(\zeta, \tau)}{\partial l_\tau}\right].$$

Учитывая асимптотику [10, с. 114]

$$\Psi_2(\zeta, \tau) \sim \frac{|P'(\tau)|^2}{2\pi P_1'(\tau)} \ln\frac{1}{|\zeta - \tau|} \quad \text{при} \quad \tau \to \zeta,$$

представим функцию $\Psi_2(\zeta, \tau)$ в следующем виде:

$$\Psi_2(\zeta, \tau) = \frac{|P'(\tau)|^2 a_2(\zeta, \tau)}{2\pi P_1'(\tau)} \ln\frac{1}{|\zeta - \tau|} + b_2(\zeta, \tau).$$

Здесь $a_2(\zeta, \tau)$, $b_2(\zeta, \tau)$ – гладкие функции ζ и τ, причём $a_2(\zeta, \zeta) = 1$.

Замечаем, что ядро $\mathcal{K}_*(\zeta,\tau)$ аналогично ядру $\mathcal{K}(\zeta,\tau)$ уравнения (4.13). Поэтому, проведя оценку подобно тому как это сделано выше для ядра $\mathcal{K}(\zeta,\tau)$, находим

$$|\mathcal{K}_*(\zeta,\tau)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\left[\frac{B}{R^{1-\mu}} + \frac{P_2'(\tau)}{P_1'(\tau)R}\right] \quad \text{при} \quad \tau\to\zeta \quad (R\to 0),$$

где $B = \text{const} > 0$, $R = |\zeta-\tau|$, $\mu\in(0,1]$.

Согласно условию (4.17)

$$v_0(\tau) = O(|\tau-\zeta_0|^{-\varepsilon}), \quad \varepsilon\in(0,1) \quad \text{при} \quad \tau\to\zeta_0\in\sigma_2',$$

и, следовательно,

$$|\mathcal{K}_*(\zeta,\tau)v_0(\tau)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\left[\frac{B}{R^{1-\mu+\varepsilon}} + \frac{P_2'(\tau)}{P_1'(\tau)R^{1+\varepsilon}}\right] \quad \text{при} \quad \tau\to\zeta=\zeta_0 \quad (R\to 0).$$

Учитывая найденные оценки, видим, что стоящий первым в уравнении (4.19) интеграл существует в смысле главного значения по Коши, а второй интеграл существует, исключая точки $\zeta_0\in\bar{\sigma}_2'$.

Таким образом, исследование второй внешней и внутренней краевых задач редуцируется к граничному сингулярному интегральному уравнению (4.19), правая часть которого моделируется заданной гладкой функцией $v(\zeta)$.

Рассмотрим частные случаи представления (4.18) второй краевой задачи. Когда на границе σ_2' нет источников $(f_0(\zeta)=0)$, то имеем [10, с. 239]

$$W(\zeta) = f(\zeta) + \int\limits_{\sigma_2'} \Omega_*(\zeta,\tau)h(\tau)\,dl_\tau, \quad \zeta\in D',$$

если функция $h(\zeta)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$h(\zeta) + 2\int\limits_{\sigma_2'} \mathcal{K}_*(\zeta,\tau)h(\tau)\,dl_\tau = 2(\alpha_2 - v(\zeta)), \quad \zeta\in\sigma_2.$$

Когда только на границе σ_2' имеются источники, а вне σ_2' они отсутствуют $(f(\zeta)=0)$, то находим

$$W(\zeta) = f_0(\zeta) + \int\limits_{\sigma_2'} \Omega_*(\zeta,\tau)[h(\tau) - 2v_0(\zeta)]\,dl_\tau, \quad \zeta\in D',$$

если функция $h(\zeta)$ – решение интегрального уравнения

$$h(\zeta) + 2\int\limits_{\sigma_2'} \mathcal{K}_*(\zeta,\tau)h(\tau)\,dl_\tau - 4\int\limits_{\sigma_2'} \mathcal{K}_*(\zeta,\tau)v_0(\tau)\,dl_\tau = 2\alpha_2, \quad \zeta\in\sigma_2.$$

В этом случае имеем, например, течение – сток мощности $\Pi_0 > 0$ (источник мощности $\Pi_0 < 0$), который расположен в точке $\zeta_0\in\sigma_2$ и характеризуется заданным комплексным потенциалом $W_0(\zeta) = f_0(\zeta) = \Pi_0 F_1(\zeta,\zeta_0)$, $F_1(\zeta,\zeta_0)$ – первое фундаментальное решение.

Заключение. Подводя итоги, отметим, что решения первой и второй краевых задач и задачи сопряжения с произвольно заданной системой дискретных источников в анизотропном однородном слое представлены в конечном виде в случае границ, моделируемых прямой линией. В общем случае, когда слой анизотропный неоднородный, а границы моделируются произвольными гладкими (кусочно-гладкими) замкнутыми кривыми, вторая краевая задача и задача сопряжения редуцированы к граничным сингулярным интегральным уравнениям.

Эти уравнения могут быть решены, например, численными методами дискретных особенностей [1, с. 433]. Изученные задачи являются обобщением исследованных в монографии [13, с. 247] граничных задач фильтрации в изотропном слое, не имеющем источников на границах.

Исследованные граничные задачи – математические модели фильтрационных процессов, встречающихся при добыче флюидов (воды, нефти) из природных пластов грунта сложной геологической структуры. Предложенный метод решения задач может быть использован для исследования процессов иной физической природы (теплопроводность, электропроводность, электро- и магнитостатика), которые характеризуются законами, математически аналогичными законам фильтрации (1.1) и (1.2).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лифанов И.К.* Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. М., 1995.
2. *Dimitroglo M.G., Setukha A.V., Lifanov I.K.* On numerical modelling of a three-dimensional flow past a wing with external flow suction and on the effect of flow suction on trailing vortices // Rus. J. of Numer. Anal. and Math. Model. 2004. V. 19. № 2. P. 109–129.
3. *Лифанов И.К., Сетуха А.В.* О сингулярных решениях некоторых краевых задач и сингулярных интегральных уравнений // Дифференц. уравнения. 1999. Т. 35. № 9. С. 1227–1241.
4. *Полубаринова-Кочина П.Я.* Теория движения грунтовых вод. М., 1977.
5. *Пивень В.Ф., Костин О.В.* Фильтрационные течения с источниками на непроницаемых канонических границах // Тр. Междунар. школ-семинаров “Методы дискретных особенностей в задачах математической физики”. Вып. 7. Орёл, 2009. С. 92–98.
6. *Деткова Ю.В., Никольский Д.Н.* Исследование работы водозабора вблизи источника загрязнения, расположенного на окружности // Тр. Междунар. школ-семинаров “Методы дискретных особенностей в задачах математической физики”. Вып. 7. Орёл, 2009. С. 46–51.
7. *Пивень В.Ф.* Задачи о плоскопараллельных фильтрационных течениях с источниками на границах // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 9. С. 1214–1225.
8. *Пивень В.Ф.* Исследование трёхмерных задач фильтрации жидкости с источниками на границах // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 9. С. 1238–1254.
9. *Пивень В.Ф.* Двумерные граничные задачи фильтрационных течений с произвольно расположенными источниками в неоднородном пористом слое // Дифференц. уравнения. 2022. Т. 58. № 8. С. 1132–1147.
10. *Пивень В.Ф.* Математические модели фильтрации жидкости. Орёл, 2015.
11. *Радыгин В.М., Голубева О.В.* Применение функций комплексного переменного в задачах физики и техники. М., 1983.
12. *Векуа И.А.* Обобщённые аналитические функции. М., 1988.
13. *Пивень В.Ф.* Теория и приложения математических моделей фильтрационных течений жидкости. Орёл, 2006.

Орловский государственный университет
имени И.С. Тургенева

Поступила в редакцию 04.03.2023 г.
После доработки 23.03.2023 г.
Принята к публикации 18.04.2023 г.