

УДК 519.633

ЯВНО-НЕЯВНЫЕ СХЕМЫ РАСЧЁТА ДИНАМИКИ УПРУГОВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКИХ СРЕД С МАЛЫМ ВРЕМЕНЕМ РЕЛАКСАЦИИ

© 2023 г. В. И. Голубев, И. С. Никитин,
Н. Г. Бурого, Ю. А. Голубева

Рассматривается динамическое поведение упруговязкопластических сред под действием внешней нагрузки. Для общего случая нелинейной функции вязкости, описывающей скоростное упрочнение, строится явно- неявная расчётная схема второго порядка аппроксимации, позволяющая получать численное решение исходной полулинейной гиперболической задачи. Отличительной особенностью данного подхода является не использование метода расщепления по физическим процессам. Несмотря на это, был получен явный вычислительный алгоритм, допускающий эффективную реализацию на современных вычислительных системах.

DOI: 10.31857/S0374064123060109, EDN: FHXWZC

Введение. Дифференциальная часть систем уравнений, описывающих динамику упруговязкопластических сред [1–4], совпадает с системой уравнений динамической теории упругости, однако в эти системы входят уравнения (для девиаторных или касательных напряжений, соответственно), содержащие сильно нелинейный свободный член с характерным временем релаксации τ в знаменателе.

В нестационарных (и тем более квазистатических) процессах с характерным временем много большим чем τ упруговязкопластические (УВП) среды ведут себя как упругопластические (УП), т.е. при $\tau \rightarrow 0$ УВП системы уравнений переходят в системы типа Прандтля–Рейса [5–7]. Этот факт отмечается во многих работах на физико-механическом [6, 7] или математическом [8, 9] уровне строгости.

Однако для сильно динамических процессов с характерными временами ($\leq \tau$) эффекты скоростного упрочнения и резкого роста динамического предела текучести проявляют себя в полной мере [4, 7]. Для их описания требуется использовать полную УВП систему того или иного типа. Кроме того, УВП системы по своей дифференциальной части заведомо являются гиперболическими, приводимыми к дивергентному виду, и допускают численное решение сеточно-характеристическими [10] или конечно-объёмными [11] методами. В то же время УП системы, к которым сводятся теории пластического течения, не являются дивергентными и для построения решений, допускающих сильные разрывы, приходится расширять формулировки и классы решений [9, 12], в частности, использовать предельные переходы от УВП к УП обобщённому решению, при этом результат зависит от выбора “переходной” УВП модели [12, 13]. Таким образом, УВП системы уравнений, с одной стороны, отражают физику динамических процессов деформирования, а с другой – обеспечивают регуляризацию недивергентных УП систем уравнений.

Устойчивое интегрирование определяющих соотношений связи напряжений и деформаций в УВП системах уравнений по явной схеме для малых времен релаксации τ требует более сильного ограничения величины временного шага, чем обычное курантовское ограничение. Устранить это дополнительное ограничение можно с помощью неявных схем расчёта определяющих соотношений (“жёсткой” части общей УВП системы уравнений). Важно, что описываемые ниже неявные схемы расчёта определяющих уравнений для УВП сред не требуют решения систем алгебраических уравнений, и расчёт каждого шага по времени проводится явно с обычным курантовским шагом по времени.

1. Изотропные и анизотропные модели упруговязкопластических сплошных сред.

1.1. Система уравнений изотропной упруговязкопластической среды. В декартовой прямоугольной системе координат x_i , $i = 1, 2, 3$, система уравнений изотропной УВП среды при малых деформациях имеет вид [1, 4]

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} &= \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial t} = \left(\lambda + \frac{2}{3} \mu \right) \frac{\partial v_k}{\partial x_k}, \quad \frac{\partial s_{ij}}{\partial t} = 2\mu e'_{ij} - 2\mu \frac{s_{ij}}{\sqrt{s_{kl}s_{kl}}} \left\langle F \left(\frac{\sqrt{s_{kl}s_{kl}}}{\sigma_s} - 1 \right) \right\rangle \frac{1}{\tau}, \\ e_{ij} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), \quad e'_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) - \frac{1}{3} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ij}, \\ s_{ij} &= \sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}, \quad \sigma = \sigma_{kk}/3, \quad i, j = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (1)$$

v_i – компоненты вектора скорости, σ_{ij} – компоненты тензора напряжений, s_{ij} – компоненты девиатора напряжений, σ – среднее напряжение, e_{ij} – компоненты тензора скорости деформации, e'_{ij} – компоненты девиатора скорости деформации, $\sqrt{s_{kl}s_{kl}}$ – второй инвариант девиатора напряжений, σ_s – предел текучести, $F(\sqrt{s_{kl}s_{kl}}/\sigma_s - 1)$ – нелинейная функция вязкости, описывающая скоростное упрочнение, $F \geq 0$, $F(0) = 0$, $\langle F \rangle = FH(F)$, $H(F)$ – функция Хевисайда, τ – характерное время релаксации компонент девиатора напряжений на поверхность текучести, ρ – плотность среды, λ и μ – модули упругости Ламе. По повторяющимся индексам проводится суммирование.

1.2. Система уравнений анизотропной упруговязкопластической среды. Система уравнений анизотропной УВП среды, описывающая динамику слоистой среды с вязкопластическими условиями скольжения на межслойных контактных границах, перпендикулярных оси x_3 , имеет вид [2, 3]

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} &= \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}, \quad \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial t} = \lambda \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ij} + 2\mu e_{ij}, \quad i, j \neq 3, \quad \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial t} = \lambda \frac{\partial v_k}{\partial x_k} + 2\mu \frac{\partial v_3}{\partial x_3}, \\ \frac{\partial \sigma_{3j}}{\partial t} &= 2\mu e_{3j} - 2\mu \frac{\sigma_{3j}}{\sqrt{\sigma_{3k}\sigma_{3k}}} \left\langle F \left(\frac{\sqrt{\sigma_{3k}\sigma_{3k}}}{\sigma_s} - 1 \right) \right\rangle \frac{1}{\tau}, \quad j \neq 3, \quad k = 1, 2. \end{aligned} \quad (2)$$

Обе УВП системы уравнений (1) и (2) являются полулинейными гиперболическими системами первого порядка дивергентного вида. Вся характерного вида нелинейность сосредоточена в свободных не дифференциальных членах уравнений для компонент девиаторов или касательных напряжений.

2. Общие построения неявных аппроксимаций второго порядка для полулинейных уравнений. Обоснуем аппроксимации второго порядка для полулинейных уравнений систем, описывающих динамику изотропной и анизотропной упруговязкопластической сред и содержащих нелинейные свободные члены. В обоих случаях эти выделенные уравнения из общей системы в векторной записи имеют следующий вид:

$$\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t} = L_x \mathbf{V} - \mathbf{S}F(|\mathbf{S}|), \quad (3)$$

где \mathbf{S} – вектор-столбец неизвестных девиаторных или касательных компонент напряжений S_k и $|\mathbf{S}| = \sqrt{S_k S_k}$, \mathbf{V} – вектор скорости, L_x – линейный матричный оператор пространственного дифференцирования, соответствующий закону Гука для упругой среды. В дальнейшем также понадобится эта совокупность уравнений, продифференцированная по времени:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{S}}{\partial t^2} = L_x \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} - \frac{\partial (\mathbf{S}F(|\mathbf{S}|))}{\partial t}.$$

Индексами $n+1$ и n будем помечать значения искомым величин на верхнем и нижнем слоях разбиения по времени, Δt – шаг по времени. Запишем неявную разностную аппроксимацию вида

$$\frac{\mathbf{S}^{n+1} - \mathbf{S}^n}{\Delta t} = \frac{1}{2}L_h(\mathbf{V}^{n+1} + \mathbf{V}^n) - \frac{1}{2}(\mathbf{S}^{n+1}F^{n+1} + \mathbf{S}^nF^n)$$

или

$$\mathbf{S}^{n+1} - \mathbf{S}^n = \frac{1}{2}L_h(\mathbf{V}^{n+1} + \mathbf{V}^n)\Delta t - \frac{1}{2}(\mathbf{S}^{n+1}F^{n+1} + \mathbf{S}^nF^n)\Delta t. \tag{4}$$

Утверждение 1. *Разностная задача (4) аппроксимирует исходную дифференциальную задачу (3) со вторым порядком малости по временному шагу.*

Доказательство. Пусть оператор пространственного дифференцирования L_x аппроксимирован со вторым порядком по пространственному шагу разностным оператором L_h , не уточняя конкретный вид этой аппроксимации и оставляя для неё свободу выбора, т.е.

$$L_h\mathbf{V}^n = L_x\mathbf{V}^n + O(\Delta x^2).$$

Для решений исходной дифференциальной системы уравнений на $(n+1)$ -м шаге по времени справедливы разложения

$$\mathbf{S}^{n+1} = \mathbf{S}^n + \left. \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t} \right|_{t_n} \Delta t + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 \mathbf{S}}{\partial t^2} \right|_{t_n} \Delta t^2 + O(\Delta t^3),$$

$$\mathbf{V}^{n+1} = \mathbf{V}^n + \left. \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} \right|_{t_n} \Delta t + O(\Delta t^2), \quad F^{n+1} = F^n + \left. \frac{\partial F}{\partial t} \right|_{t_n} \Delta t + O(\Delta t^2).$$

Подставив эти разложения в разностные уравнения с неявной аппроксимацией, получим

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t} \right|_{t_n} \Delta t + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 \mathbf{S}}{\partial t^2} \right|_{t_n} \Delta t^2 + O(\Delta t^3) &= \frac{1}{2}L_h \left(\mathbf{V}^n + \left. \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} \right|_{t_n} \Delta t + O(\Delta t^2) + \mathbf{V}^n \right) \Delta t - \\ &- \frac{1}{2} \left(\left(\mathbf{S}^n + \left. \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t} \right|_{t_n} \Delta t + O(\Delta t^2) \right) \left(F^n + \left. \frac{\partial F}{\partial t} \right|_{t_n} \Delta t + O(\Delta t^2) \right) + \mathbf{S}^n F^n \right) \Delta t. \end{aligned}$$

Применяя формулу для разностного оператора пространственного дифференцирования

$$L_h\mathbf{V}^n = L_x\mathbf{V}^n + O(\Delta x^2),$$

после выкладок и приведения подобных слагаемых получим равенство

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t} \right|_{t_n} + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 \mathbf{S}}{\partial t^2} \right|_{t_n} \Delta t + O(\Delta t^2) &= \\ &= L_x\mathbf{V}^n + \frac{1}{2}L_x \left. \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} \right|_{t_n} \Delta t + O(\Delta x^2) - \mathbf{S}^n F^n - \frac{1}{2} \left. \frac{\partial(\mathbf{S}F)}{\partial t} \right|_{t_n} \Delta t + O(\Delta t^2). \end{aligned}$$

С учётом исходной полулинейной системы и её продифференцированного по времени следствия получаем, что рассмотренная неявная разностная схема выполняется на решении этой системы со вторым порядком аппроксимации. Утверждение доказано.

3. Неявная схема второго порядка аппроксимации для определяющих уравнений упруговязкопластической среды с нелинейными свободными членами. Поскольку системы (1) и (2), по существу, аналогичны друг другу, будем вести построение численной схемы на примере изотропной УВП системы (1). Особый интерес представляет схема расчёта части системы уравнений для девиаторов с нелинейным свободным членом и возможным малым параметром в его знаменателе. Что касается остальных уравнений системы (1) – линейных уравнений движения для компонент скорости и уравнений для среднего напряжения,

то их численная аппроксимация по какой-либо явной схеме требуемого (второго) порядка не вызывает затруднений [14]. Будем считать, что такая аппроксимация проведена, значения скоростей и среднего напряжения на верхнем временном слое определены с учётом необходимых по постановке начальных и граничных условий.

Построим неявную аппроксимацию второго порядка уравнения для девиаторов тензора напряжений с нелинейным свободным членом из УВП системы (1) указанного выше типа:

$$\frac{s_{ij}^{n+1} - s_{ij}^n}{\Delta t} = 2\mu \frac{e'_{ij}{}^{n+1} + e'_{ij}{}^n}{2} - \frac{2\mu}{\tau} \left(\frac{s_{ij}^{n+1}}{\sqrt{s_{kl}^{n+1} s_{kl}^{n+1}}} \left\langle F \left(\frac{\sqrt{s_{kl}^{n+1} s_{kl}^{n+1}}}{\sigma_s} - 1 \right) \right\rangle + \frac{s_{ij}^n}{\sqrt{s_{kl}^n s_{kl}^n}} \left\langle F \left(\frac{\sqrt{s_{kl}^n s_{kl}^n}}{\sigma_s} - 1 \right) \right\rangle \right) \frac{1}{2}.$$

Эту нелинейную систему уравнений для s_{ij}^{n+1} можно записать в виде

$$\bar{s}_{ij}^{n+1} = \bar{s}_{ije}^{n+1} - \frac{1}{\delta} \left(\frac{\bar{s}_{ij}^{n+1}}{\sqrt{\bar{s}_{kl}^{n+1} \bar{s}_{kl}^{n+1}}} \left\langle F \left(\sqrt{\bar{s}_{kl}^{n+1} \bar{s}_{kl}^{n+1}} - 1 \right) \right\rangle + \frac{\bar{s}_{ij}^n}{\sqrt{\bar{s}_{kl}^n \bar{s}_{kl}^n}} \left\langle F \left(\sqrt{\bar{s}_{kl}^n \bar{s}_{kl}^n} - 1 \right) \right\rangle \right).$$

Здесь введены безразмерные компоненты $\bar{s}_{ij}^{n+1} = s_{ij}^{n+1}/\sigma_s$, $\bar{s}_{ij}^n = s_{ij}^n/\sigma_s$, $\bar{s}_{ije}^{n+1} = s_{ije}^{n+1}/\sigma_s$, где $s_{ije}^{n+1} = s_{ij}^n + \mu(e'_{ij}{}^{n+1} + e'_{ij}{}^n)\Delta t$ – компоненты девиатора после “упругого” шага по времени, $\delta = \tau\sigma_s/(\mu\Delta t)$ – безразмерный малый параметр системы уравнений.

Отметим, что с учётом проведённого ранее расчёта значений компонент скорости на верхнем временном слое компоненты “упругого” девиатора \bar{s}_{ije}^{n+1} также можно считать известными, как и значения \bar{s}_{ij}^n на n -м слое.

Нелинейную систему, из которой необходимо найти неизвестные компоненты девиатора на верхнем слое \bar{s}_{ij}^{n+1} , можно записать следующим образом:

$$\bar{s}_{ij}^{n+1} \left(\delta + \frac{1}{\sqrt{\bar{s}_{kl}^{n+1} \bar{s}_{kl}^{n+1}}} \left\langle F \left(\sqrt{\bar{s}_{kl}^{n+1} \bar{s}_{kl}^{n+1}} - 1 \right) \right\rangle \right) + \bar{s}_{ij}^n \frac{\left\langle F \left(\sqrt{\bar{s}_{kl}^n \bar{s}_{kl}^n} - 1 \right) \right\rangle}{\sqrt{\bar{s}_{kl}^n \bar{s}_{kl}^n}} = \delta \bar{s}_{ije}^{n+1}. \tag{5}$$

Свернём эти уравнения последовательно с \bar{s}_{ij}^{n+1} , \bar{s}_{ij}^n , \bar{s}_{ije}^{n+1} и введём обозначения для возникающих сверток с неизвестными значениями

$$X = \sqrt{\bar{s}_{kl}^{n+1} \bar{s}_{kl}^{n+1}}, \quad Y = \sqrt{\bar{s}_{kl}^{n+1} \bar{s}_{kl}^n}, \quad Z = \sqrt{\bar{s}_{kl}^{n+1} \bar{s}_{kl}^n}$$

и с уже вычисленными значениями

$$T = \sqrt{\bar{s}_{kl}^n \bar{s}_{kl}^n}, \quad S = \sqrt{\bar{s}_{kl}^n \bar{s}_{kl}^{n+1}}, \quad \Sigma = \sqrt{\bar{s}_{kle}^{n+1} \bar{s}_{kle}^{n+1}}.$$

Получим нелинейную систему трёх уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{aligned} X^2 \left(\delta + \frac{\langle F(X-1) \rangle}{X} \right) + Y^2 \frac{\langle F(T-1) \rangle}{T} &= \delta Z^2, \\ Y^2 \left(\delta + \frac{\langle F(X-1) \rangle}{X} \right) + T^2 \frac{\langle F(T-1) \rangle}{T} &= \delta S^2, \\ Z^2 \left(\delta + \frac{\langle F(X-1) \rangle}{X} \right) + S^2 \frac{\langle F(T-1) \rangle}{T} &= \delta \Sigma^2. \end{aligned}$$

Исключив неизвестные Y и Z , запишем уравнение для X^2 :

$$X^2 \left(\delta + \frac{\langle F(X-1) \rangle}{X} \right)^2 = \Delta P^2,$$

где

$$\Delta P^2 = \delta^2 \bar{s}_{ije}^{n+1} \tilde{s}_{ije}^{n+1} - 2\delta \bar{s}_{ije}^{n+1} \bar{s}_{ij}^n \frac{\langle F(T-1) \rangle}{T} + \bar{s}_{ij}^n \bar{s}_{ij}^n \left(\frac{\langle F(T-1) \rangle}{T} \right)^2 = \delta^2 \tilde{S}^2 \geq 0,$$

$$\tilde{S}^2 = \tilde{s}_{ij}^{n+1} \tilde{s}_{ij}^{n+1}, \quad \tilde{s}_{ij}^{n+1} = \bar{s}_{ije}^{n+1} - \frac{\bar{s}_{ij}^n \langle F(T-1) \rangle}{T \delta}, \quad T = \sqrt{\bar{s}_{kl}^n \bar{s}_{kl}^n}.$$

Нетрудно видеть, что промежуточный девиатор \bar{s}_{ij}^{n+1} и его свёртка \tilde{S} вычисляются по результатам “упругого” шага по времени.

Поскольку для свёртки \tilde{S}^2 всегда выполняется $\tilde{S}^2 \geq 0$, получаем окончательное уравнение для неизвестной свёртки X :

$$\delta X + \langle F(X-1) \rangle = \delta \tilde{S}. \tag{6}$$

Отметим, что из (5) следует формула для искомым компонент девиатора на верхнем временном слое в следующем виде:

$$\bar{s}_{ij}^{n+1} = \delta \bar{s}_{ij}^{n+1} \left(\delta + \frac{\langle F(X-1) \rangle}{X} \right)^{-1} = \frac{\delta \tilde{s}_{ij}^{n+1} X}{\delta X + \langle F(X-1) \rangle} = \tilde{s}_{ij}^{n+1} \frac{X}{\tilde{S}}. \tag{7}$$

Таким образом, для полного определения величин \bar{s}_{ij}^{n+1} следует решить уравнение (6) и подставить результат в (7). Уточним диапазоны допустимых значений для X . При $X < 1$ решение (6) тривиально: $X = \tilde{S}$. Следовательно, $\bar{s}_{ij}^{n+1} = \tilde{s}_{ij}^{n+1}$ с критерием применимости $\tilde{S} < 1$ после “упругого” шага. При $X \geq 1$ следует решить уравнение

$$\delta X + F(X-1) = \delta \tilde{S}. \tag{8}$$

Для этого нужно конкретизировать функцию вязкости с учётом её упомянутых выше свойств $F \geq 0$, $F(0) = 0$, $\langle F \rangle = FH(F)$.

4. Неявная схема второго порядка аппроксимации для определяющих уравнений УВП среды с нелинейными свободными членами. Как правило, для функции вязкости используются степенные или полиномиальные аппроксимации, построенные по результатам экспериментальных исследований [4, 7, 15].

Утверждение 2. Для случая линейной функции вязкости $F(x) = x$ уравнение (8) имеет точное аналитическое решение.

В этом случае решение уравнения (8), условие $X \geq 1$ и искомые компоненты девиатора соответственно имеют вид

$$X = \frac{1 + \delta \tilde{S}}{1 + \delta}, \quad \tilde{S} \geq 1, \quad \bar{s}_{ij}^{n+1} = \frac{\tilde{s}_{ij}^{n+1}}{\tilde{S}} \frac{1 + \delta \tilde{S}}{1 + \delta}.$$

При малых δ

$$\bar{s}_{ij}^{n+1} \approx \frac{\tilde{s}_{ij}^{n+1}}{\tilde{S}} (1 + \delta(\tilde{S} - 1)). \tag{9}$$

Утверждение 3. Для случая квадратичной функции вязкости $F(x) = x^2$ уравнение (8) имеет точное аналитическое решение.

Уравнение (8) выглядит следующим образом:

$$\delta X + (X-1)^2 = \delta \tilde{S}.$$

Его решение, дополнительное условие и девиатор напряжения на верхнем слое определяются соотношениями

$$X = 1 - \frac{\delta}{2} + \sqrt{\delta(\tilde{S} - 1) + \frac{\delta^2}{4}}, \quad \tilde{S} \geq 1, \quad \bar{s}_{ij}^{n+1} = \frac{\tilde{s}_{ij}^{n+1}}{\tilde{S}} \left(1 - \frac{\delta}{2} + \sqrt{\delta(\tilde{S} - 1) + \frac{\delta^2}{4}} \right).$$

При малых δ

$$\bar{s}_{ij}^{n+1} \approx \frac{\tilde{s}_{ij}^{n+1}}{\tilde{S}} \left(1 + \sqrt{\delta(\tilde{S} - 1)} \right). \tag{10}$$

Утверждение 4. Для случая корневой функции вязкости $F(x) = \sqrt{x}$ уравнение (8) имеет точное аналитическое решение.

Решим уравнение $\delta X + \sqrt{X - 1} = \delta \tilde{S}$ с дополнительными условиями $\tilde{S} \geq X \geq 1$. Опуская выкладки и проверку условий, запишем результат:

$$X = \frac{2(1 + \delta^2 + \tilde{S}^2)}{1 + 2\delta^2\tilde{S} + \sqrt{1 + 4\delta^2(\tilde{S} - 1)}}, \quad \tilde{S} \geq 1, \quad \bar{s}_{ij}^{n+1} = \frac{\tilde{s}_{ij}^{n+1}}{\tilde{S}} \frac{2(1 + \delta^2 + \tilde{S}^2)}{1 + 2\delta^2\tilde{S} + \sqrt{1 + 4\delta^2(\tilde{S} - 1)}}.$$

При малых δ справедливо

$$\bar{s}_{ij}^{n+1} \approx \frac{\tilde{s}_{ij}^{n+1}}{\tilde{S}} (1 + \delta^2(\tilde{S} - 1)^2). \tag{11}$$

Если уравнение (4) не имеет аналитического решения, то его можно решить в предположении, что параметр δ является малым ($\delta \ll 1$), и воспользовавшись методом разложения по малому параметру. Достаточно общим примером может служить степенное представление функции $F(x) = x^q$. Необходимо при $\delta \ll 1$ решить уравнение

$$\delta X + (X - 1)^q = \delta \tilde{S}, \quad X \geq 1, \quad q > 0.$$

Будем искать решение в виде асимптотического ряда по степеням $\delta^{1/q}$ с точностью до первого малого члена: $X = 1 + C_1\delta^{1/q} + \dots$. Подставляя это разложение и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях q , получаем значение неизвестного коэффициента разложения

$$C_1 = (\tilde{S} - 1)^{1/q}, \quad X \approx 1 + (\tilde{S} - 1)^{1/q}, \quad \tilde{S} \geq 1.$$

Отсюда следует решение для девиаторов при произвольном положительном q :

$$\bar{s}_{ij}^{n+1} \approx \frac{\tilde{s}_{ij}^{n+1}}{\tilde{S}} (1 + \delta^{1/q}(\tilde{S} - 1)^{1/q}). \tag{12}$$

Легко видеть, что рассмотренные выше частные точные решения δ совпадают с полученным приближённым решением. Обсудим также вопрос предельного перехода при $\delta \rightarrow 0$, поскольку формула для промежуточного девиатора \tilde{s}_{ij}^{n+1} содержит малый параметр в знаменателе:

$$\tilde{s}_{ij}^{n+1} = \bar{s}_{ije}^{n+1} - \frac{\bar{s}_{ij}^n \langle F(T - 1) \rangle}{T \delta}. \tag{13}$$

Утверждение 5. Корректировочная формула (13) при $\delta \rightarrow 0$ допускает представление в форме, не содержащей в явном виде параметр δ .

Доказательство. Уравнение (8), справедливое на $(n + 1)$ -м слое по времени, запишем для n -го слоя:

$$\delta T + \langle F(T - 1) \rangle = \delta \sqrt{\bar{s}_{ij}^n \bar{s}_{ij}^n}.$$

Отсюда имеем

$$\langle F(T - 1) \rangle = \delta \left\langle \sqrt{\bar{s}_{ij}^n \bar{s}_{ij}^n} - \sqrt{\bar{s}_{kl}^n \bar{s}_{kl}^n} \right\rangle,$$

и в формуле для промежуточного девиатора удаётся снять особенность при $\delta \rightarrow 0$:

$$\tilde{s}_{ij}^{n+1} = \bar{s}_{ije}^{n+1} - \frac{\bar{s}_{ij}^n}{\sqrt{\bar{s}_{kl}^n \bar{s}_{kl}^n}} \left\langle \sqrt{\tilde{s}_{ij}^n \tilde{s}_{ij}^n} - \sqrt{\bar{s}_{kl}^n \bar{s}_{kl}^n} \right\rangle, \quad \bar{s}_{ij}^{n+1} = \frac{\tilde{s}_{ij}^{n+1}}{\tilde{S}}. \quad (14)$$

Утверждение доказано.

Что касается системы уравнений (2) для анизотропной УВП среды, описывающей динамику слоистой среды с вязкопластическими условиями скольжения на межслойных контактных границах, то для её численного решения корректировку касательных напряжений, например, аналог формулы (12), можем записать следующим образом:

$$\bar{\sigma}_{3j}^{n+1} \approx \frac{\tilde{\sigma}_{3j}^{n+1}}{\sqrt{\tilde{\sigma}_{3k}^{n+1} \tilde{\sigma}_{3k}^{n+1}}} \left(1 + \left(\sqrt{\tilde{\sigma}_{3k}^{n+1} \tilde{\sigma}_{3k}^{n+1}} \right)^{1/q} \delta^{1/q} \right), \quad \tilde{\sigma}_{3j}^{n+1} = \bar{\sigma}_{3je}^{n+1} - \frac{\bar{\sigma}_{3j}^n}{\sqrt{\bar{\sigma}_{3k}^n \bar{\sigma}_{3k}^n}} \frac{\langle F(\sqrt{\bar{\sigma}_{3k}^n \bar{\sigma}_{3k}^n} - 1) \rangle}{\delta}.$$

Аналогичные замены следует произвести и для всех остальных рассмотренных случаев (9)–(11) и (14).

Таким образом, показано, что полученные решения неявной аппроксимации второго порядка для девиаторов напряжений УВП системы уравнений допускают предельный переход при малом времени релаксации. Следовательно, формулы (9)–(12) для различных представлений функций вязкости при малых δ можно трактовать как регуляризаторы численных решений УП систем. Сами эти формулы представляют собой алгебраические корректировки компонент девиаторов напряжений, полученных в результате расчёта “упругого” шага по времени.

Этот приём, предложенный в работах [16, 17], широко использовался в вычислительной практике (см., например, [18–20]), но трактовался как корректировка первого порядка в процессе физического расщепления упругопластического процесса на упругий шаг и приведение девиаторов напряжений на круг текучести, которая имеет вид

$$\bar{s}_{ij}^{n+1} = \frac{\tilde{s}_{ije}^{n+1}}{\sqrt{\tilde{s}_{kle}^{n+1} \tilde{s}_{kle}^{n+1}}}.$$

В данной статье специфические корректировки девиаторов напряжений за пределом текучести второго порядка возникают как обоснованный результат построения явно-неявной схемы второго порядка для УВП системы уравнений, а корректировка (14) – для УП системы уравнений.

5. Численная схема для нестационарной упругой системы. В прямоугольной системе координат (x, y, z) система уравнений линейной изотропной теории упругости является гиперболической и может быть записана в каноническом виде

$$\mathbf{q}_t + A_x \mathbf{q}_x + A_y \mathbf{q}_y + A_z \mathbf{q}_z = \mathbf{f}.$$

Здесь вектор $\mathbf{q} = (v_x, v_y, v_z, \sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{yz}, \sigma_{xz}, \sigma_{xy})^T$ содержит компоненты тензора напряжений и вектора скорости смещений точек среды, \mathbf{f} – вектор внешних сил. Матрицы A_x , A_y и A_z разреженные и зависят от параметров среды λ , μ и ρ . С помощью метода расщепления по физическим процессам решение исходной задачи сводится к последовательному решению однородной линейной гиперболической системы уравнений и последующему решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Дальнейшее применение метода расщепления по пространственным направлениям приводит к набору из трёх одномерных гиперболических систем уравнений [21]

$$\mathbf{q}_t + A_x \mathbf{q}_x = \mathbf{0}, \quad \mathbf{q}_t + A_y \mathbf{q}_y = \mathbf{0}, \quad \mathbf{q}_t + A_z \mathbf{q}_z = \mathbf{0}.$$

Для определённости рассмотрим первую из них. Ввиду гиперболичности матрицы A_x , она может быть представлена в виде

$$A_x = \Omega_x^{-1} \Lambda \Omega_x,$$

где матрица Ω_x^{-1} состоит из правых собственных векторов, матрица Ω_x – обратная к ней, а матрица Λ – диагональная, состоящая из собственных значений матрицы A_x . Опустим далее индекс x и введём обозначение $\omega = \Omega \mathbf{q}$. Умножение одномерной системы уравнений на матрицу Ω и внесение её под операторы дифференцирования по времени и по координате приводит к набору независимых линейных уравнений переноса с постоянными коэффициентами

$$\omega_t + \Lambda \omega_x = \mathbf{0}. \quad (15)$$

Для каждой компоненты вектора ω справедливы соотношения

$$\omega_i(t + \Delta t, x, y, z) = \omega_i(t, x - \lambda_i \Delta t, y, z).$$

С использованием пространственной интерполяции заданного порядка на выбранном сеточном шаблоне получается восстановить значения $\omega_i(t, x - \lambda_i \Delta t, y, z)$. В дальнейшем, с учётом невырожденности матрицы Ω , восстанавливаются значения искомым функций задачи на следующем временном слое $\mathbf{q}^{n+1} = \Omega^{-1} \omega^{n+1}$.

При использовании пространственного шаблона $(x_{m-2}, x_{m-1}, x_m, x_{m+1})$ для решения линейного одномерного уравнения переноса возможно построить схему третьего порядка аппроксимации по времени и по пространству. Однако, как известно, невозможно построить линейную монотонную схему выше первого порядка аппроксимации. Преимуществом применяемой в работе схемы является её квазимонотонность. В статье [22] показано, что её близость к области монотонных по Фридрихсу схем в пространстве неопределённых коэффициентов приводит к наименьшему развитию осцилляций на разрывных решениях. Таким образом, для решения уравнения (15) на компоненте ω_i использовалось выражение

$$\begin{aligned} \omega_m^{n+1} = & \omega_m^n - \frac{\sigma}{2}(\omega_{m+1}^n - \omega_{m-1}^n) + \frac{\sigma^2}{2}(\omega_{m-1}^n - 2\omega_m^n + \omega_{m+1}^n) + \\ & + \frac{\sigma(\sigma^2 - 1)}{6}(\omega_{m-2}^n - 3\omega_{m-1}^n + 3\omega_m^n - \omega_{m+1}^n), \end{aligned}$$

где $\sigma = \lambda_i \Delta t / h < 1$ – число Куранта, h – пространственный шаг расчётной сетки. Отметим, что сеточно-характеристический метод ранее успешно применялся для решения ряда динамических задач деформируемого твёрдого тела [23–25].

6. Примеры расчётов. На примерах расчётов покажем, что полученные универсальные формулы корректировки девиаторов напряжений при различных значениях времени релаксации, сравнимых или меньших шага по времени, могут быть успешно использованы для моделирования быстропротекающих процессов в упруговязкопластической среде. Применение обычных явных схем при малых значениях времени релаксации для численного решения полунелинейных упруговязкопластических систем уравнений привело бы к неустойчивости решения.

В настоящей работе был проведён расчёт процесса нагружения изотропной упруговязкопластической среды. Рассматривалась полная трёхмерная постановка. Область интегрирования имела размеры $50 \times 50 \times 10000$ м и покрывалась кубической расчётной сеткой с шагом 5 м. Для задания упругих констант среды использовались следующие физические параметры: скорость продольных волн $C_p = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho} = 4500$ м/с, $C_s = \sqrt{\mu/\rho} = 2250$ м/с, плотность $\rho = 2500$ кг/м³, $\sigma_s = 112\,500$ Па. Исходя из условия устойчивости Куранта для сеточно-характеристической схемы, используемой для решения линейной упругой задачи, шаг по времени задавался равным 1 мс. При этом общее время расчёта составляло 2 с. К нижней части области равномерно по всей поверхности прикладывалось постоянное внешнее давление в 337 500 Па. Согласно аналитическому исследованию исходных определяющих уравнений, в среде при данном типе нагружения распространяются упругая волна сжатия со скоростью C_p и пластическая волна со скоростью

$$C_f = \sqrt{\rho^{-1}(\lambda + 2\mu/3)} \approx 3674 \text{ м/с}.$$

Аналитически значение напряжения σ_1^* на полке между волнами сильных разрывов можно вычислить из условия текучести Мизеса при определённом соотношении между компонентами напряжений $\sigma_2 = \sigma_3 = \lambda(\lambda + 2\mu)^{-1}\sigma_1$:

$$\left(\sigma_1 - \frac{\sigma}{3}\right)^2 + \left(\sigma_2 - \frac{\sigma}{3}\right)^2 + \left(\sigma_3 - \frac{\sigma}{3}\right)^2 = \sigma_s^2, \quad \sigma = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu}\sigma_1.$$

После алгебраических преобразований получаем:

$$\sigma_1^* = \frac{\lambda + 2\mu}{\mu} \frac{\sqrt{6}}{4} \sigma_s.$$

На рис. 1 представлены численные решения, полученные для линейной упругой среды (сплошная линия), а также для изотропной упругопластической среды по схеме Wilkins [17] (штриховая линия) и по предложенной в работе явно-неявной схеме (пунктирная линия). Его анализ показывает, что во всех трёх случаях корректно воспроизводится процесс распространения продольной волны нагружения. Расчётная скорость распространения этой волны в среде совпадает с аналитическими оценками. Отметим также, что не возникают численные осцилляции на разрывах решения. На обоих численных решениях для упругопластической среды чётко прослеживается пластическая волна. Скорость её распространения, измеренная по точке перегиба на фронте, совпадает с аналитическими оценками. При этом предложенная в настоящей работе схема гораздо точнее разрешает сам волновой фронт (разрыв решения).

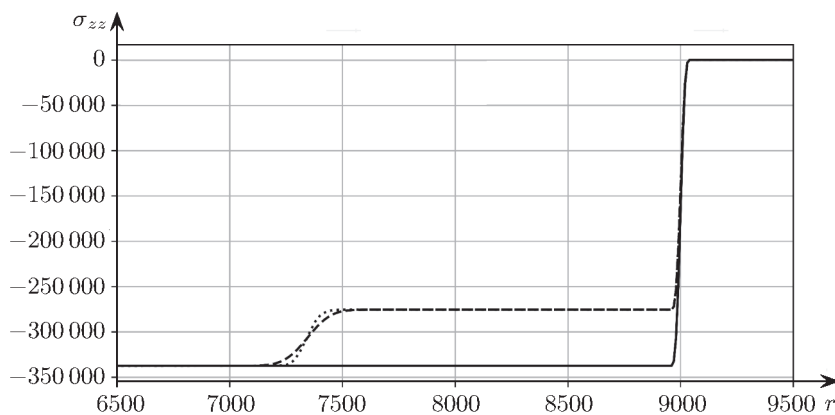


Рис. 1. Пространственное распределение вертикальной компоненты тензора напряжений σ_{zz} в момент времени $t = 2$ с (r – расстояние вдоль оси Oz).

На рис. 2 приведены численные решения, полученные для линейной упругой среды с линейной функцией вязкости при различных значениях параметра $\delta \in [0.01, 10]$. Все остальные значения характеристик рассматриваемой среды и параметры вычислительного алгоритма оставались без изменений. Видно, что увеличение характерного времени релаксации компонент девиатора напряжений на поверхность текучести размывает фронт пластической волны.

Заключение. Для устойчивого численного решения определяющей системы упруговязкопластической модели сплошной среды предложена явно-неявная схема второго порядка с явной аппроксимацией уравнений движения и неявной аппроксимацией определяющих соотношений, содержащих малый параметр в знаменателе нелинейных свободных членов. Для согласования порядков аппроксимации явного упругого и неявного корректировочного шагов построена неявная аппроксимация второго порядка для изотропной и анизотропной моделей упруговязкопластической модели сплошной среды. Получены уточнённые корректировочные формулы после “упругого” шага расчёта.

Найденные решения неявной аппроксимации второго порядка для девиаторов напряжений упруговязкопластической системы уравнений допускают предельный переход при стремлении

времени релаксации к нулю. Корректировочные формулы, полученные таким предельным переходом, можно трактовать как регуляризаторы численных решений упругопластических систем. Поскольку упруговязкопластические системы уравнений по своей дифференциальной части заведомо являются гиперболическими, приводимыми к дивергентному виду, предложенный численный алгоритм в указанном выше смысле обеспечивает консервативность сеточно-характеристических и конечно-объемных методов при расчёте разрывных решений, в том числе и недивергентных упругопластических систем уравнений.

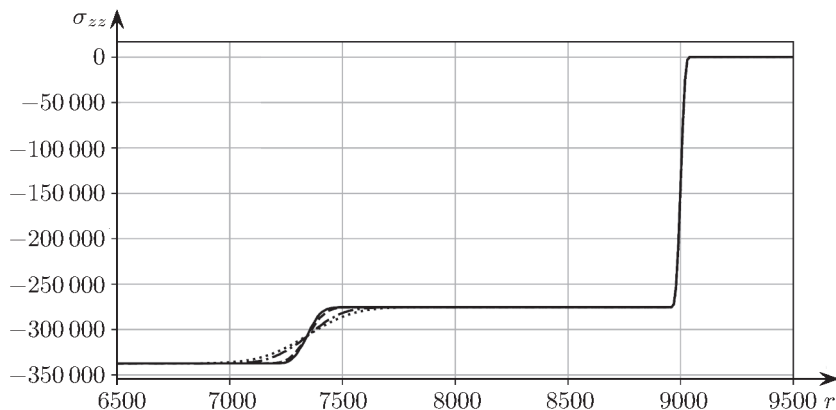


Рис. 2. Пространственное распределение вертикальной компоненты тензора напряжений σ_{zz} в момент времени $t = 2$ с при $\delta = 10$ (пунктирная линия), $\delta = 1$ (штрихпунктирная), $\delta = 0.1$ (штриховая) и $\delta = 0.01$ (сплошная).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 19-71-10060).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кукуджанов В.Н.* Вычислительная механика сплошных сред. М., 2008.
2. *Никитин И.С.* Динамические модели слоистых и блочных сред с проскальзыванием, трением и отслоением // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2008. № 4. С. 154–165.
3. *Никитин И.С.* Теория неупругих слоистых и блочных сред. М., 2019.
4. *Новацкий В.К.* Волновые задачи теории пластичности. М., 1978.
5. *Фрейденталь А., Гейрингер Х.* Математические теории неупругой сплошной среды. М., 1962.
6. *Кукуджанов В.Н.* Распространение волн в упруговязкопластических материалах с диаграммой общего вида // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2001. № 5. С. 96–111.
7. *Коларов Д., Балтов А., Бончева Н.* Механика пластических сред. М., 1979.
8. *Дюво Г., Лионс Н.* Неравенства в механике и физике. М., 1980.
9. *Садовский В.М.* Разрывные решения в задачах динамики упругопластических сред. М., 1997.
10. *Golubev V.I., Shevchenko A.V., Khokhlov N.I., Petrov I.B., Malovichko M.S.* Compact grid-characteristic scheme for the acoustic system with the piece-wise constant coefficients // Int. J. of Appl. Mech. 2022. P. 2250002.
11. *LeVeque R.J.* Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems. Cambridge, 2002.
12. *Dal Maso G., LeFloch P.G., Murat F.* Definition and weak stability of nonconservative products // J. de Math. Pur. et Appl. 1995. V. 74. № 6. P. 483–548.
13. *Pares C.* Numerical methods for nonconservative hyperbolic systems: a theoretical framework // SIAM J. on Numer. Anal. 2006. V. 44. № 1. P. 300–321.
14. *Куликковский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю.* Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М., 2001.
15. *Кукуджанов В.Н.* Численное моделирование динамических процессов деформирования и разрушения упругопластических сред // Успехи механики. 1985. Т. 8. № 4. С. 21–65.
16. *Уилкинс М.Л.* Расчет упругопластических течений. Вычислительные методы в гидродинамике. М., 1967.

17. *Wilkins M.L.* Computer Simulation of Dynamic Phenomena. Berlin; Heidelberg; New York, 1999.
18. *Кужуджанов В.Н.* Метод расщепления упругопластических уравнений // Механика твердого тела. 2004. № 1. С. 98–108.
19. *Абузьяров М.Х., Баженов В.Г., Котов В.Л. и др.* Метод распада разрывов в динамике упругопластических сред // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2000. Т. 40. № 6. С. 940–953.
20. *Бураго Н.Г.* Моделирование разрушения упругопластических тел // Вычислит. механика сплошных сред. 2008. Т. 1. № 4. С. 5–20.
21. *Golubev V.I., Shevchenko A.V., Petrov I.B.* Raising convergence order of grid-characteristic schemes for 2D linear elasticity problems using operator splitting // Computer Research and Modeling. 2022. V. 14. № 4. P. 899–910.
22. *Kholodov A.S., Kholodov Ya.A.* Monotonicity criteria for difference schemes designed for hyperbolic equations // Comput. Math. Math. Phys. 2006. V. 46. С. 1560–1588.
23. *Golubev V.I., Nikitin I.S., Vasyukov A.V., Nikitin A.D.* Fractured inclusion localization and characterization based on deep convolutional neural networks // Procedia Structural Integrity. 2023. V. 43. P. 29–34.
24. *Golubev V., Vasyukov A., Nikitin I. et al.* Continuum model of fractured media in direct and inverse seismic problems // Continuum Mech. Thermodyn. 2022. <https://doi.org/10.1007/s00161-022-01149-w>.
25. *Guseva E.K., Beklemysheva K.A., Golubev V.I., Epifanov V.P., Petrov I.B.* Investigation of ice rheology based on computer simulation of low-speed impact // Mathematical Modeling and Supercomputer Technologies. MMST 2022. Communications in Computer and Information Science / Eds. D. Balandin, K. Barkalov, I. Meyerov. Cham, 2022. V. 1750. P. 176–184.

Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет),
Институт автоматизации проектирования РАН, г. Москва,
Институт проблем механики
имени А.Ю. Ишлинского РАН, г. Москва

Поступила в редакцию 16.02.2023 г.
После доработки 27.03.2023 г.
Принята к публикации 18.04.2023 г.