

УДК 519.622.2+681.5.015

АЛГОРИТМ ПОДВИЖНОГО ОКНА ДЛЯ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ПРЯМОУГОЛЬНЫМИ И ЭЛЛИпсоИДНЫМИ ОБЛАСТЯМИ НЕОПРЕДЕЛЁННОСТИ ПАРАМЕТРОВ

© 2023 г. А. Ю. Морозов, Д. Л. Ревизников

Решена задача параметрической идентификации динамических систем с прямоугольными и эллипсоидными областями неопределённости параметров для случая, когда экспериментальные данные заданы в виде интервалов. Состояние рассматриваемых динамических систем в каждый момент времени является параметрическим множеством. Построена целевая функция в пространстве областей неопределённости параметров, характеризующая степень отклонения параметрических множеств состояний от экспериментальных интервальных оценок. Для минимизации целевой функции разработан алгоритм подвижного окна, относящийся к градиентным методам. В его основе лежит алгоритм адаптивной интерполяции, позволяющий в рамках заданной области неопределённости параметров (окна) в явном виде получать параметрические множества состояний динамической системы. Продемонстрирована эффективность и работоспособность предлагаемого алгоритма.

DOI: 10.31857/S0374064123060110, EDN: FIELWZ

Введение. Как правило, для получаемых экспериментальных данных характерно наличие разброса в значениях [1, 2]. В основном это связано с погрешностями проводимых измерений или с внешними факторами, влияние которых нельзя исключить. Обычно эксперимент повторяется несколько раз с целью получения дополнительной информации относительно неоднозначности в данных. Наиболее простым описанием неопределённости является интервальная оценка возможных значений.

Задача параметрической идентификации возникает, когда математическая модель исследуемого процесса уже определена, но неизвестными остаются параметры, которые подбираются таким образом, чтобы модель наилучшим образом воспроизводила эксперимент. Традиционно здесь применяются методы, минимизирующие среднеквадратическое отклонение модельной кривой от экспериментальных точек.

Применение интервального аппарата [3–6] в задачах параметрической идентификации связано с предположением, что параметры модели могут быть интервальными. Преимущество в использовании интервальных моделей заключается в том, что они дают ограничения на интересующие величины, в отличие от классических моделей, которые аппроксимируют их. В работе [7] представлен итеративный интервальный метод для прогнозирования границ параметров заданной модели в условиях неопределённости измеренных данных. В исследовании [8] предлагается структурно-параметрическая идентификация линейных, либо допускающих линеаризацию, динамических объектов по интервальным исходным данным. Статья [9] посвящена развитию методов параметрической идентификации на основе нейронных сетей, применяемых для решения обратных задач теплофизики в условиях интервальной неопределённости параметров.

Ранее авторами был разработан интерполяционный подход к решению задачи интервальной параметрической идентификации для случая точечных экспериментальных данных [10]. В данной работе выполнено обобщение подхода на случай интервальных экспериментальных данных и различных форм области неопределённости параметров динамической системы; рассмотрены динамические системы с прямоугольными и эллипсоидными областями неопределённости параметров. Будет показано, что данные системы можно представить как системы с интервальными параметрами. Состояние такой динамической системы в каждый момент времени

является параметрическим множеством. Задача параметрической идентификации заключается в нахождении такой области неопределённости параметров, в которой параметрические множества состояний будут содержать соответствующие экспериментальные интервальные оценки или минимизировать отклонение от них.

Как и при обычной параметрической идентификации, здесь составляется целевая функция в пространстве областей неопределённости параметров, характеризующая степень отклонения модельных множеств от экспериментальных данных. Для минимизации целевой функции разработан алгоритм подвижного окна, относящийся к градиентным методам. В его основе лежит алгоритм адаптивной интерполяции [11, 12], позволяющий в рамках заданной области неопределённости параметров (окна) в явном виде получать параметрические множества состояний динамической системы. Ключевое преимущество алгоритма подвижного окна заключается в том, что он стремится получить область неопределённости параметров как можно меньшего объёма, что является важным на практике.

В п. 1 работы рассматривается прямая задача моделирования динамической системы с прямоугольными и эллипсоидными областями неопределённости параметров. Наиболее часто математические модели динамических систем задаются в виде систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), поэтому рассматриваются именно они. В п. 2 формулируется задача параметрической идентификации для случая, когда экспериментальные данные заданы в виде интервалов, и в общем виде строится целевая функция. В следующем пункте анализируется целевая функция и доказывается утверждение о том, что при определённых свойствах параметрического множества состояний вместо экспериментальных интервальных оценок можно рассматривать только их крайние точки. Описанию алгоритма подвижного окна посвящён п. 4. В процессе работы алгоритма на каждой итерации необходимо решать задачу построения эллипсоида или прямоугольного параллелепипеда, включающего заданное множество точек. Данный вопрос рассматривается в п. 5. Результаты применения разработанного алгоритма для нескольких задач параметрической идентификации приведены в п. 6.

1. Прямая задача. Рассматривается задача Коши для системы ОДУ, состоящей из n уравнений с m -мерной областью неопределённости Ω в начальных условиях:

$$\begin{aligned} \frac{dy_i(t)}{dt} &= f_i(y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)), \quad i = \overline{1, n}, \quad t \in [t_0, t_N], \\ (y_1(t_0), y_2(t_0), \dots, y_m(t_0))^T &\in \Omega, \quad y_i(t_0) = y_i^0, \quad i = \overline{m+1, n}, \end{aligned} \quad (1)$$

где t_0 – начальный момент времени; t_N – конечный момент времени; вектор-функция $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T$ удовлетворяет всем условиям, обеспечивающим единственность и существование решения при всех $(y_1(t_0), y_2(t_0), \dots, y_m(t_0))^T \in \Omega$. Любую неавтономную систему ОДУ с параметрами можно преобразовать к виду (1) путём добавления фиктивных уравнений.

В качестве области неопределённости Ω рассматривается или прямоугольный параллелепипед, или эллипсоид, которые могут быть сориентированы определённым образом в пространстве. Область Ω задаётся в параметрическом виде

$$\Omega = \left\{ \mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_m)^T : \mathbf{z} = \mathbf{z}^c + \prod_{i=1}^m \prod_{j=i+1}^m \mathbf{R}_{\varphi_{i,j}} \mathbf{S} \mathbf{g}(\boldsymbol{\xi}), \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathbf{E} \right\}, \quad (2)$$

где $\mathbf{z}^c = (z_1^c, z_2^c, \dots, z_m^c)^T$ – центр области; $\mathbf{R}_{\varphi_{i,j}}$ – матрица поворота на угол $\varphi_{i,j}$ относительно плоскости, образованной осями i и j ; $\mathbf{S} = \text{diag}\{s_1, s_2, \dots, s_m\}$ – диагональная матрица масштабирования; $\mathbf{E} = \{\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)^T : \xi_i \in [0, 1]\}$ – единичный куб; $\mathbf{g}(\boldsymbol{\xi}) = (g_1(\boldsymbol{\xi}), g_2(\boldsymbol{\xi}), \dots, g_m(\boldsymbol{\xi}))^T$ – отображение единичного куба в куб с центром в начале координат и длиной стороны 2 (тогда $g_i(\boldsymbol{\xi}) = 2\xi_i - 1$, $i = \overline{1, m}$) или в единичный шар. В последнем случае в качестве $\mathbf{g}(\boldsymbol{\xi})$ удобно использовать переход из сферической системы координат в декартову систему координат [13]:

$$g_1(\boldsymbol{\xi}) = \xi_1 \cos(2\pi\xi_2) \prod_{j=3}^m \sin(\pi\xi_j), \quad g_2(\boldsymbol{\xi}) = \xi_1 \sin(2\pi\xi_2) \prod_{j=3}^m \sin(\pi\xi_j),$$

$$g_i(\boldsymbol{\xi}) = -\xi_1 \cos(\pi \xi_i) \prod_{j=i+1}^m \sin(\pi \xi_j), \quad i = \overline{3, m}.$$

Систему (1) можно записать в виде системы ОДУ с интервальными параметрами

$$\begin{aligned} \frac{dy_i(t)}{dt} &= f_i(y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)), \quad i = \overline{1, n}, \quad t \in [t_0, t_N], \\ y_i(t_0) &= z_i(\mathbf{z}^c, \mathbf{s}, \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\xi}), \quad i = \overline{1, m}, \\ y_i(t_0) &= y_i^0, \quad i = \overline{m+1, n}, \end{aligned} \quad (3)$$

где $\boldsymbol{\xi} \in [0, 1]^m$; $\mathbf{z}(\mathbf{z}^c, \mathbf{s}, \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\xi}) = (z_1(\mathbf{z}^c, \mathbf{s}, \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\xi}), \dots, z_m(\mathbf{z}^c, \mathbf{s}, \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\xi}))^T = \mathbf{z}^c + \prod_{i=1}^m \prod_{j=i+1}^m \mathbf{R}_{\varphi_{i,j}} \mathbf{S} \times \mathbf{g}(\boldsymbol{\xi})$ – преобразование единичного куба в область определённой формы; $\mathbf{z}^c = (z_1^c, z_2^c, \dots, z_m^c)^T$, $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \dots, s_m)^T$, $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_{1,2}, \dots, \varphi_{i,j}, \dots, \varphi_{m-1,m})$, $i < j$, – параметры, полностью задающие область неопределённости. Для сокращения записи обозначим наборы параметров \mathbf{z}^c , \mathbf{s} и $\boldsymbol{\varphi}$ через $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n_p})^T$, $n_p = 2m + (m-1)m/2$.

Решение системы (3) в каждый момент времени t_k является параметрическим множеством

$$Y^k = \{\mathbf{y}^k(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m) : \xi_i \in [0, 1], \quad i = \overline{1, m}\}. \quad (4)$$

Отметим, что на практике часто используется внешняя интервальная оценка множества (4), которую можно рассматривать как одномерные проекции Y^k на каждое фазовое измерение:

$$\begin{aligned} W^k &= [\underline{w}_1^k, \overline{w}_1^k] \times [\underline{w}_2^k, \overline{w}_2^k] \times \dots \times [\underline{w}_n^k, \overline{w}_n^k], \quad \underline{w}_i^k = \min_{\boldsymbol{\xi} \in [0, 1]^m} [y_i^k(\boldsymbol{\xi})], \\ \overline{w}_i^k &= \max_{\boldsymbol{\xi} \in [0, 1]^m} [y_i^k(\boldsymbol{\xi})], \quad i = \overline{1, n}. \end{aligned}$$

Обратим внимание, что Y^k в общем случае зависит от параметров $\boldsymbol{\theta}$:

$$Y^k(\boldsymbol{\theta}) = \{\mathbf{y}^k(\mathbf{z}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\xi})) : \boldsymbol{\xi} \in [0, 1]^m\}.$$

В дальнейшем эти параметры могут опускаться.

Цель алгоритма адаптивной интерполяции заключается в построении для каждого момента времени t_k вектор-функции $\mathbf{P}^k(\boldsymbol{\xi})$, интерполирующей $\mathbf{y}^k(\mathbf{z}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\xi}))$, $\boldsymbol{\xi} \in [0, 1]^m$. В начальный момент времени \mathbf{P}^0 определяется явным образом:

$$\mathbf{P}^0(\boldsymbol{\xi}) = (z_1(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\xi}), z_2(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\xi}), \dots, z_m(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\xi}), y_{m+1}^0, \dots, y_n^0)^T.$$

Построение \mathbf{P}^{k+1} по \mathbf{P}^k сводится к интерполяции неявной функции

$$\mathbf{F}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m) = (y_1(t_{k+1}), y_2(t_{k+1}), \dots, y_n(t_{k+1}))^T,$$

заданной в виде системы ОДУ

$$\begin{aligned} \frac{dy_i(t)}{dt} &= f_i(y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)), \quad t \in [t_k, t_{k+1}], \\ y_i(t_k) &= P_i^k(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m), \quad i = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (5)$$

Интерполяционный полином строится по некоторому набору узлов, образующих интерполяционную сетку. При построении \mathbf{P}^{k+1} сначала выполняется перенос решений, находящихся в узлах сетки, с k -го слоя на $(k+1)$ -й слой. Далее в зависимости от погрешности интерполяции происходит адаптация сетки путём добавления или удаления узлов. Интерполяционный полином \mathbf{P} может быть любым, только необходимо, чтобы была возможность контролировать погрешность интерполяции. В приведённых далее численных примерах использовалась

интерполяция на адаптивных разреженных сетках с нелинейным базисом [14–16] (подробное описание см. в работах [17–19]).

Задание области неопределённости Ω в параметрическом виде (2) необходимо для удобства применения алгоритма адаптивной интерполяции, так как в этом случае интерполяционная сетка всегда строится над единичным кубом.

Отметим, что так как $P^k(\xi)$ является явной функцией, то можно аналитически вычислить производные решения по ξ , а также по z и θ . Для определения $dy_i^k(z(\theta, \xi))/dz_j$, $j = \overline{1, m}$, $i = \overline{1, n}$, необходимо решить n систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с одинаковой матрицей коэффициентов, которая является матрицей Якоби преобразования $z(\theta, \xi)$ относительно ξ :

$$\frac{dP_i^k(\xi)}{d\xi_j} = \sum_{l=1}^m \frac{dy_i^k(z(\theta, \xi))}{dz_l} \frac{dz_l(\theta, \xi)}{d\xi_j}, \quad j = \overline{1, m}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (6)$$

а производные по θ уже вычисляются через $dy_i^k(z(\theta, \xi))/dz_j$:

$$\frac{dy_i^k(z(\theta, \xi))}{d\theta_j} = \sum_{l=1}^m \frac{dy_i^k(z(\theta, \xi))}{dz_l} \frac{dz_l(\theta, \xi)}{d\theta_j}, \quad j = \overline{1, n_p}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (7)$$

Выражения для производных являются явными функциями, что позволяет выполнять анализ исходной системы (3) в области неопределённости без дополнительного интегрирования систем ОДУ для вычисления градиента.

2. Интервальная задача параметрической идентификации. Пусть известны N экспериментальных оценок фазовых переменных для различных моментов времени t_k , $k = \overline{1, N}$:

$$\hat{Y}^k = [\hat{y}_1^k, \overline{\hat{y}_1^k}] \times [\hat{y}_2^k, \overline{\hat{y}_2^k}] \times \dots \times [\hat{y}_n^k, \overline{\hat{y}_n^k}].$$

С геометрической точки зрения множество \hat{Y}^k является n -мерным прямоугольным параллелепипедом (или, по-другому, бруском). Интервальная задача параметрической идентификации заключается в определении таких параметров θ области неопределённости Ω начальных условий системы (3), чтобы $\hat{Y}^k \subset Y^k$, $k = \overline{1, N}$, или чтобы степень непересечения множеств \hat{Y}^k и Y^k , $k = \overline{1, N}$, была минимальна. Если экспериментальная информация о диапазонах значений известна не для всех фазовых переменных, то при поиске неизвестных параметров такие фазовые переменные не учитываются.

Сформулируем задачу минимизации отклонения модельного решения от экспериментальных данных. Минимизируется следующая целевая функция:

$$J(\theta) = \sum_{k=1}^N \rho(Y^k(\theta), \hat{Y}^k),$$

где $\rho(Y^k, \hat{Y}^k)$ характеризует степень непересечения множеств \hat{Y}^k и Y^k , и если $\hat{Y}^k \subset Y^k$, то $\rho(Y^k, \hat{Y}^k) = 0$. В частности, $\rho(Y^k, \hat{Y}^k)$ может соответствовать квадрату расстояния между множеством Y^k и самой удалённой от него точкой множества \hat{Y}^k

$$\rho(Y^k, \hat{Y}^k) = \max_{\hat{y}^k \in \hat{Y}^k} \rho_{\text{sp}}(Y^k, \hat{y}^k) \quad (8)$$

или, например, являться интегральной характеристикой

$$\rho(Y^k, \hat{Y}^k) = \int_{\hat{y}_1^k}^{\overline{\hat{y}_1^k}} \int_{\hat{y}_2^k}^{\overline{\hat{y}_2^k}} \dots \int_{\hat{y}_n^k}^{\overline{\hat{y}_n^k}} \rho_{\text{sp}}(Y^k, \hat{y}^k) d\hat{y}_n^k d\hat{y}_{n-1}^k \dots d\hat{y}_1^k, \quad (9)$$

где $\hat{\mathbf{y}}^k = (\hat{y}_1^k, \hat{y}_2^k, \dots, \hat{y}_n^k)^\top$, $\rho_{\text{sp}}(Y^k, \hat{\mathbf{y}}^k) = \min_{\mathbf{y}^k \in Y^k} \|\mathbf{y}^k - \hat{\mathbf{y}}^k\|^2$ – квадрат расстояния между множеством Y^k и точкой $\hat{\mathbf{y}}^k$. Традиционно в качестве нормы $\|\cdot\|$ используется взвешенная евклидова норма

$$\|\mathbf{a}\|^2 = \sum_{i=1}^n p_i a_i^2,$$

где p_i – веса, которые позволяют учесть разную природу фазовых переменных (для удобства изложения будем полагать $p_i = 1$). С учётом этого ρ_{sp} можно записать следующим образом:

$$\rho_{\text{sp}}(Y^k(\boldsymbol{\theta}), \hat{\mathbf{y}}^k) = \min_{\boldsymbol{\xi} \in [0,1]^m} \sum_{i=1}^n [y_i^k(\mathbf{z}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\xi})) - \hat{y}_i^k]^2. \quad (10)$$

Отметим, что в данной постановке задачи не требуется, чтобы получающаяся область неопределённости Ω была минимальной. Тем не менее если очевидным образом Ω можно уменьшить, то эта процедура будет выполняться.

3. Построение целевой функции. Рассмотрим вопрос вычисления $\rho(Y^k(\boldsymbol{\theta}), \hat{Y}^k)$. В случае с (8) необходимо решать максиминную задачу:

$$\rho(Y^k(\boldsymbol{\theta}), \hat{Y}^k) = \max_{\hat{\mathbf{y}}^k \in \hat{Y}^k} \min_{\boldsymbol{\xi} \in [0,1]^m} \sum_{i=1}^n [y_i^k(\mathbf{z}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\xi})) - \hat{y}_i^k]^2. \quad (11)$$

Решение подобных задач требует применения специального математического аппарата [20, 21]. Однако за счёт того, что Y^k и \hat{Y}^k могут обладать определёнными свойствами, задачу (11) можно упростить.

Теорема. Если множество Y^k является выпуклым, то максимум по $\hat{\mathbf{y}}^k$ в задаче (11) будет достигаться в одной из вершин прямоугольного параллелепипеда \hat{Y}^k :

$$V(\hat{Y}^k) = \{(\underline{\hat{y}}_1^k + (\overline{\hat{y}}_1^k - \underline{\hat{y}}_1^k)j_1, \underline{\hat{y}}_2^k + (\overline{\hat{y}}_2^k - \underline{\hat{y}}_2^k)j_2, \dots, \underline{\hat{y}}_n^k + (\overline{\hat{y}}_n^k - \underline{\hat{y}}_n^k)j_n) : j_i \in \{0, 1\}\}. \quad (12)$$

Доказательство. От противного предположим, что максимум достигается в точке $\mathbf{a} \in \hat{Y}^k \setminus V(\hat{Y}^k)$. Возьмём две любые диаметрально противоположные точки $\mathbf{b} \in \hat{Y}^k$ и $\mathbf{c} \in \hat{Y}^k$ относительно точки \mathbf{a} : $\mathbf{a} = (\mathbf{b} + \mathbf{c})/2$, в которых максимум не достигается. Отметим частные случаи: если одна из точек \mathbf{b} или \mathbf{c} , также как и \mathbf{a} , является точкой максимума, то дальнейшие рассуждения будут аналогичными, а если абсолютно во всех диаметрально противоположных точках достигается максимум, то он будет достигаться и в граничных точках $V(\hat{Y}^k)$.

Обозначим через \mathbf{b}' и \mathbf{c}' точки множества Y^k , ближайšie к соответствующим точкам \mathbf{b} и \mathbf{c} :

$$\mathbf{b}' = \arg \min_{\mathbf{y}^k \in Y^k} \|\mathbf{y}^k - \mathbf{b}\|^2, \quad \mathbf{c}' = \arg \min_{\mathbf{y}^k \in Y^k} \|\mathbf{y}^k - \mathbf{c}\|^2,$$

а через \mathbf{a}' их линейную комбинацию $\mathbf{a}' = (\mathbf{b}' + \mathbf{c}')/2$, которая тоже принадлежит Y^k по свойству выпуклости. Так как \mathbf{a} – точка максимума, то $\|\mathbf{b}' - \mathbf{b}\|^2 < \rho_{\text{sp}}(Y^k, \mathbf{a})$ и $\|\mathbf{c}' - \mathbf{c}\|^2 < \rho_{\text{sp}}(Y^k, \mathbf{a})$; кроме того, по определению расстояния между множеством и точкой как минимального имеем дополнительное неравенство $\|\mathbf{a}' - \mathbf{a}\|^2 \geq \rho_{\text{sp}}(Y^k, \mathbf{a})$. Таким образом,

$$\|\mathbf{b}' - \mathbf{b}\| < \|\mathbf{a}' - \mathbf{a}\| \quad \text{и} \quad \|\mathbf{c}' - \mathbf{c}\| < \|\mathbf{a}' - \mathbf{a}\|.$$

Подставим выражения для \mathbf{a} и \mathbf{a}' :

$$\|\mathbf{b}' - \mathbf{b}\| < \left\| \frac{1}{2}(\mathbf{b}' + \mathbf{c}') - \frac{1}{2}(\mathbf{b} + \mathbf{c}) \right\|, \quad \|\mathbf{c}' - \mathbf{c}\| < \left\| \frac{1}{2}(\mathbf{b}' + \mathbf{c}') - \frac{1}{2}(\mathbf{b} + \mathbf{c}) \right\|,$$

далее перегруппируем слагаемые

$$\|\mathbf{b}' - \mathbf{b}\| < \frac{1}{2}\|(\mathbf{b}' - \mathbf{b}) + (\mathbf{c}' - \mathbf{c})\|, \quad \|\mathbf{c}' - \mathbf{c}\| < \frac{1}{2}\|(\mathbf{b}' - \mathbf{b}) + (\mathbf{c}' - \mathbf{c})\|$$

и сложим неравенства

$$\|\mathbf{b}' - \mathbf{b}\| + \|\mathbf{c}' - \mathbf{c}\| < \|(\mathbf{b}' - \mathbf{b}) + (\mathbf{c}' - \mathbf{c})\|.$$

В результате получаем противоречие с неравенством треугольника. Следовательно, в окрестности точки максимума \mathbf{a} не может существовать диаметрально противоположных точек \mathbf{b} и \mathbf{c} , в которых максимум не достигается. Такое может быть только в случае, если $\mathbf{a} \in V(\hat{Y}^k)$. Теорема доказана.

Количество точек в множестве $V(\hat{Y}^k)$ конечно и равно 2^n , т.е. если множество Y^k выпуклое, то вычисление (11) сводится к решению 2^n задач минимизации. Требование выпуклости Y^k не всегда может выполняться, однако если множество Ω изначально является эллипсоидом, то в большинстве практических задач это выполняется. Рассмотрим пример простого преобразования

$$y_1 = x_1(x_1^2 + x_2^2), \quad y_2 = x_2(x_1^2 + x_2^2)$$

для квадрата и круга с центром в начале координат. Образ квадрата не будет являться выпуклым, а круг преобразуется в круг другого радиуса и останется выпуклым.

В случае с (9) вычисление $\rho(Y^k, \hat{Y}^k)$ также будет сводиться к решению определённого числа задач минимизации в зависимости от схемы численного интегрирования. Поэтому в качестве $\rho(Y^k, \hat{Y}^k)$ для практических задач предлагается использовать некоторый компромисс между (8) и (9):

$$\rho(Y^k(\boldsymbol{\theta}), \hat{Y}^k) = \sum_{\hat{\mathbf{y}}^k \in V(\hat{Y}^k)} \min_{\boldsymbol{\xi} \in [0,1]^m} \sum_{i=1}^n [y_i^k(\mathbf{z}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\xi})) - \hat{y}_i^k]^2. \quad (13)$$

С учётом (12) и (13), а также замены $\mathbf{y}^k(\mathbf{z}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\xi}))$ на $\mathbf{P}^k(\boldsymbol{\xi})$, целевая функция примет вид

$$J(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{k=1}^N \sum_{\mathbf{j} \in \{0,1\}^n} \min_{\boldsymbol{\xi} \in [0,1]^m} \sum_{i=1}^n [P_i^k(\boldsymbol{\xi}) - \hat{y}_{\mathbf{j},i}^k]^2, \quad (14)$$

где $\mathbf{j} = (j_1, j_2, \dots, j_n)$ – мультииндекс, состоящий из 0 и 1, $\hat{\mathbf{y}}_{\mathbf{j}}^k = (\hat{y}_{\mathbf{j},1}^k, \hat{y}_{\mathbf{j},2}^k, \dots, \hat{y}_{\mathbf{j},n}^k)^T$ – \mathbf{j} -я вершина прямоугольного параллелепипеда \hat{Y}^k , $\hat{y}_{\mathbf{j},i}^k = (1 - j_i)\hat{y}_i^k - j_i\bar{y}_i^k$, $i = \overline{1, n}$.

4. Алгоритм подвижного окна. Рассмотрим вопрос минимизации целевой функции (14). Для вычисления её значения необходимо решить набор задач минимизации по $\boldsymbol{\xi}$ для явных функций:

$$J_{\mathbf{j}}^k(\mathbf{z}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\xi})) = \sum_{i=1}^n [P_i^k(\boldsymbol{\xi}) - \hat{y}_{\mathbf{j},i}^k]^2, \quad \mathbf{j} \in \{0,1\}^n, \quad k = \overline{1, N}. \quad (15)$$

Здесь удобно применить градиентные методы [22, 23], так как аналитически возможно построить выражение для градиента:

$$\frac{dJ_{\mathbf{j}}^k(\mathbf{z}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\xi}))}{d\xi_p} = 2 \sum_{i=1}^n [P_i^k(\boldsymbol{\xi}) - \hat{y}_{\mathbf{j},i}^k] \frac{dP_i^k(\boldsymbol{\xi})}{d\xi_p}, \quad p = \overline{1, m}.$$

Обозначим через $\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{j}}^k$ точку минимума (15):

$$\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{j}}^k = \arg \min_{\boldsymbol{\xi} \in [0,1]^m} J_{\mathbf{j}}^k(\mathbf{z}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\xi})).$$

С учётом соотношений (6) и (7) можно также построить градиент для основной целевой функции (14):

$$\frac{dJ(\boldsymbol{\theta})}{d\theta_p} = 2 \sum_{k=1}^N \sum_{j \in \{0,1\}^n} \sum_{i=1}^n [P_i^k(\boldsymbol{\xi}_j^k) - \hat{y}_{j,i}^k] \sum_{l=1}^m \frac{dy_i^k(z(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\xi}_j^k))}{dz_l} \frac{dz_l(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\xi}_j^k)}{d\theta_p}, \quad p = 1, \dots, n_p,$$

где $dy_i^k(z(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\xi}_j^k))/dz_l$, $l = \overline{1, m}$, находятся из решения СЛАУ

$$\sum_{l=1}^m \frac{dy_i^k(z(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\xi}_j^k))}{dz_l} \frac{dz_l(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\xi}_j^k)}{d\xi_p} = \frac{dP_i^k(\boldsymbol{\xi}_j^k)}{d\xi_p}, \quad p = \overline{1, m}.$$

Однако, как было отмечено ранее при постановке задачи, размер получающейся области Ω никак не учитывается в целевой функции. Применение классического метода градиентного спуска, как правило, будет приводить к постоянному увеличению Ω на каждой итерации оптимизации, что уменьшает практическую ценность найденного таким образом решения. В связи с этим предлагается алгоритм подвижного окна, который улучшает данную ситуацию и может рассматриваться как градиентный метод.

Решение задачи интервальной параметрической идентификации можно рассматривать как поиск для каждой точки $\hat{\mathbf{y}}_j^k$ прообраза в пространстве начальных условий системы (1) и нахождение множества Ω , включающего все эти прообразы. Под прообразом подразумевается такая точка в пространстве начальных условий, для которой решение соответствующей системы ОДУ будет проходить через точку $\hat{\mathbf{y}}_j^k$ или минимизировать отклонение от неё. Необходимо дополнительно отметить, что $\hat{\mathbf{y}}_j^k$ обычно содержит информацию не обо всех фазовых переменных, поэтому нельзя проинтегрировать систему ОДУ по времени в обратную сторону, чтобы найти прообразы.

Идея алгоритма подвижного окна заключается в последовательном восстановлении явной зависимости решения системы ОДУ от начальных условий в некоторой области (в окне). В рамках окна для каждой точки $\hat{\mathbf{y}}_j^k$ определяется прообраз, а также выполняется оценка, куда этот прообраз должен переместиться далее, чтобы ещё более уменьшить соответствующее отклонение. Следующее окно строится исходя так, чтобы оно включало в себя найденные прообразы и оценки, куда эти прообразы могут переместиться. Алгоритм останавливается тогда, когда окно перестаёт перемещаться.

Выполним формальное описание алгоритма. Пусть $\Omega^{(0)}$ – начальное окно, которое задаётся с помощью параметров $\mathbf{z}^{c(0)}$, $\mathbf{s}^{(0)}$ и $\boldsymbol{\varphi}^{(0)}$; h – параметр расширения окна; ε – параметр остановки; $\mathbf{s}^{\min} = (s_1^{\min}, s_2^{\min}, \dots, s_m^{\min})$, $\mathbf{s}^{\max} = (s_1^{\max}, s_2^{\max}, \dots, s_m^{\max})$ – минимальный и максимальный размеры окна. Рассмотрим один шаг алгоритма подвижного окна.

1. С помощью алгоритма адаптивной интерполяции выполняется интегрирование системы (3) с параметрами $\mathbf{z}^{c(it)}$, $\mathbf{s}^{(it)}$, $\boldsymbol{\varphi}^{(it)}$, $(\boldsymbol{\theta}^{(it)})$ и строятся соответствующие вектор-функции $\mathbf{P}^k(\boldsymbol{\xi})$.

2. Для каждой точки $\hat{\mathbf{y}}_j^k$ определяется прообраз в пространстве начальных условий $\mathbf{z}_j^k = \mathbf{z}(\boldsymbol{\theta}^{(it)}, \boldsymbol{\xi}_j^k)$, где $\boldsymbol{\xi}_j^k = \arg \min_{\boldsymbol{\xi} \in [0,1]^m} J_j^k(\mathbf{z}(\boldsymbol{\theta}^{(it)}, \boldsymbol{\xi}))$.

3. Для нахождения направления перемещения прообраза \mathbf{z}_j^k вычисляются производные $dJ_j^k(\mathbf{z}(\boldsymbol{\theta}^{(it)}, \boldsymbol{\xi}_j^k))/dz_l$, $l = \overline{1, m}$, с помощью решения СЛАУ

$$\sum_{l=1}^m \frac{dJ_j^k(\mathbf{z}(\boldsymbol{\theta}^{(it)}, \boldsymbol{\xi}_j^k))}{dz_l} \frac{dz_l(\boldsymbol{\theta}^{(it)}, \boldsymbol{\xi}_j^k)}{d\xi_p} = 2 \sum_{i=1}^n [P_i^k(\boldsymbol{\xi}_j^k) - \hat{y}_{j,i}^k] \frac{dP_i^k(\boldsymbol{\xi}_j^k)}{d\xi_p}, \quad p = \overline{1, m}.$$

4. Определяются точки $\mathbf{z}\mathbf{n}_j^k$, в направлении которых могут переместиться прообразы:

$$\mathbf{z}\mathbf{n}_j^k = \mathbf{z}_j^k + h\Delta\mathbf{z}_j^k \begin{cases} \|\Delta\mathbf{z}_j^k\|^{-1}, & \text{если } \|\Delta\mathbf{z}_j^k\| > \varepsilon, \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases}$$

где

$$\Delta z_j^k = \left(-\frac{dJ_j^k(z(\theta^{(it)}, \xi_j^k))}{dz_1}, -\frac{dJ_j^k(z(\theta^{(it)}, \xi_j^k))}{dz_2}, \dots, -\frac{dJ_j^k(z(\theta^{(it)}, \xi_j^k))}{dz_m} \right)^T.$$

5. Определяются параметры $z^{c(it+1)}$, s^{next} и $\varphi^{(it+1)}$ окна, которое содержит все точки z_j^k и zn_j^k , $j \in \{0, 1\}^n$, $k = \overline{1, N}$.
6. Применяются ограничения на размер окна:

$$s^{(it+1)} = \min(s^{\text{max}}, \max(s^{\text{min}}, s^{\text{next}})),$$

где \min , \max – поэлементные операции. Получается новое окно $\Omega^{(it+1)}$.

7. Алгоритм останавливается, когда $\Omega^{(it+1)} = \Omega^{(it)}$.

Отметим несколько важных практических моментов в алгоритме.

1. Если для нахождения ξ_j^k применяются итерационные методы, то в качестве стартового значения поиска на новом шаге алгоритма можно использовать точку, в которой поиск завершился на предыдущем шаге: $\xi_{\text{start}}^{(it+1)} = z^{-1}(\theta^{(it+1)}, z_j^{k(it)})$, где $z^{-1}(\theta, z)$ – обратная функция к $z(\theta, \xi)$.

2. Окна, полученные на двух подряд идущих итерациях, имеют не пустое пересечение: $\Omega^{(it+1)} \cap \Omega^{(it)} \neq \emptyset$. Для уменьшения вычислительных затрат при построении $P^{k(it+1)}$, вместо интегрирования системы ОДУ (5) в точках, которые попадают в пересечение, можно использовать $P^{k(it)}$.

3. Модуль антиградиента $\|\Delta z_j^k\|$ отличен от нуля только для точек, находящихся на границе окна, при этом антиградиент всегда будет направлен от окна, перпендикулярно границе.

4. Параметр s^{min} отвечает за то, чтобы окно не становилось вырожденным, а параметр s^{max} , в большей степени, требуется для контроля вычислительных ресурсов в рамках одного шага алгоритма.

5. Использование окна в форме эллипсоида связано с дополнительными вычислительными затратами. Поэтому алгоритм можно применять следующим образом: сначала ищется окно прямоугольной формы, а на последнем шаге найденные прообразы заключаются в окно уже эллипсоидной формы.

6. Если решение задачи $\arg \min_{\xi \in [0,1]^m} J_j^k(z(\theta^{(it)}, \xi))$ не единственное, то в качестве ξ_j^k имеет смысл брать точку, находящуюся ближе к центру области: $(0.5, 0.5, \dots, 0.5)^T$, что позволит дополнительно уменьшить размер окна. Однако такая ситуация приводит к некоторой неоднозначности при построении Ω , и в этом случае критерием остановки алгоритма может выступать ограничение на модули градиентов: $\|\Delta z_j^k\| \leq \varepsilon$, $j \in \{0, 1\}^n$, $k = \overline{1, N}$.

Основной интерес с позиции размера получающегося окна Ω представляют результаты п. 5.

5. Построение окна. Рассмотрим задачу построения эллипсоида или бруса, содержащего заданное множество точек. Известны постановки такой задачи с условием минимальности объёма соответствующей фигуры: задача Сильвестра [24] (найти наименьший по объёму шар), задача о минимальном эллипсоиде, задача о минимальном прямоугольном параллелепипеде [25] и т.д. Алгоритмы их решения (см. [26, 27]) зачастую обладают высокой вычислительной сложностью и носят итеративный характер.

В качестве альтернативны решения экстремальной задачи предлагается подход, основанный на статистическом анализе исходного множества точек, который даёт приемлемые результаты и при этом не является ресурсоёмким в плане вычислительных затрат.

Пусть исходное множество состоит из N точек $z^k = (z_1^k, z_2^k, \dots, z_m^k)^T$, $k = \overline{1, N}$. Построим выборочную матрицу ковариации

$$\Sigma = \frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^N (z^k - \mu)(z^k - \mu)^T,$$

где $\mu = N^{-1} \sum_{k=1}^N z^k$ – выборочное математическое ожидание.

Обозначим через $U = (u_1, u_2, \dots, u_m)$ матрицу, составленную из нормированных собственных векторов матрицы ковариации Σ . Для определения углов φ выполняется последовательное обнуление недиагональных элементов матрицы $U^{-1} = U^T$:

$$\begin{aligned} V &= U^{-1}, \\ \text{for } i &= \overline{1, m}: \\ \text{for } j &= (i + 1), \dots, m: \\ \varphi_{i,j} &= \text{arctg}(v_{i,j}/v_{i,i}), \\ V &= VR_{\varphi_{i,j}}, \end{aligned}$$

где $R_{\varphi_{i,j}}$ – матрица поворота.

Масштабные коэффициенты s и центр области z^c вычисляются по следующим формулам:

$$s = \frac{1}{2}(d^{\max} - d^{\min}), \quad z^c = \mu + \frac{1}{2}U(d^{\min} + d^{\max}),$$

где $d^{\min} = \min_k[U^{-1}(z^k - \mu)]$ и $d^{\max} = \max_k[U^{-1}(z^k - \mu)]$ – предельные отклонения централизованных точек исходного множества от начала координат в базисе U ; \min и \max – поэлементные операции.

В случае с эллипсоидом масштабные коэффициенты дополнительно умножаются на корректирующее значение η , равное максимальному среди всех точек расстоянию от центра координат в базисе U с учётом уже найденных s и z^c :

$$\eta = \max_k \|\text{diag}\{s\}^{-1}U^{-1}(z^k - z^c)\|,$$

где $\text{diag}\{s\}$ – диагональная матрица, $\|\cdot\|$ – евклидова норма.

Данный подход можно использовать на промежуточных шагах алгоритма подвижного окна, а на последнем шаге – решать непосредственно экстремальную задачу с требованием минимальности объёма. Это позволит уменьшить вычислительные затраты.

Важно отметить, что если для каждой экспериментальной точки существует единственный прообраз в пространстве начальных условий и параметров, то верно утверждение о том, что решение, полученное с помощью алгоритма подвижного окна, будет наилучшим с точки зрения объёма полученной области неопределённости. Кроме того, алгоритм даёт некоторые вероятностные оценки неопределённых величин.

6. Результаты. Приведём результаты решения нескольких задач параметрической идентификации динамических систем с помощью представленного алгоритма подвижного окна. Вместо экспериментальных интервальных оценок фазовых переменных использовались квазиэкспериментальные: задавались параметры области неопределённости z^c , s , φ и решалась прямая задача; в каждый заданный момент времени из полученного параметрического множества решений Y^k брался случайный прямоугольный параллелепипед \hat{Y}^k . Для всех вершин \hat{Y}^k , $k = \overline{1, N}$, вычислялись прообразы в пространстве начальных условий и определялись эталонные (исходные) значения параметров z^c , s и φ . Во всех примерах значение параметра остановки $\varepsilon = 10^{-10}$.

Рассмотрим систему ОДУ с двумя неизвестными параметрами, которая соответствует модели Лотки–Вольтерры:

$$u' = \alpha u - 2uv, \quad v' = -v + \beta uv, \quad u(0) = 1, \quad v(0) = 3,$$

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_\alpha g_1(\xi_1, \xi_2) \\ s_\beta g_2(\xi_1, \xi_2) \end{pmatrix}, \quad \xi_1 \in [0, 1], \quad \xi_2 \in [0, 1], \quad t \in [0, 2.5], \quad (16)$$

где g_1, g_2 определяют преобразование единичного квадрата или в квадрат с длиной стороны 2 и центром в начале координат: $g_1(\xi_1, \xi_2) = 2\xi_1 - 1$, $g_2(\xi_1, \xi_2) = 2\xi_2 - 1$, или в единичный круг: $g_1(\xi_1, \xi_2) = \xi_1 \cos(2\pi\xi_2)$, $g_2(\xi_1, \xi_2) = \xi_1 \sin(2\pi\xi_2)$. Параметры области неопределённости: $\alpha_0, \beta_0, s_\alpha, s_\beta, \varphi$.

На рис. 1 показаны сгенерированные квазиэкспериментальные интервальные оценки фазовых переменных \hat{Y}^k , $k = \overline{1, 20}$, в равномерно расположенных точках на интервале интегрирования: $t_k = k/8$. Исходные значения параметров в случае с прямоугольным параллелепипедом: $\alpha_0 = 2.00$, $\beta_0 = 0.98$, $s_\alpha = 0.21$, $s_\beta = 0.39$, $\varphi = -0.67$, в случае с эллипсоидом: $\alpha_0 = 2.00$, $\beta_0 = 0.98$, $s_\alpha = 0.28$, $s_\beta = 0.52$, $\varphi = -0.67$. Заметим, что площадь соответствующего прямоугольника ($S = 4s_\alpha s_\beta = 0.33$) меньше, чем площадь эллипса ($S = \pi s_\alpha s_\beta = 0.46$), это связано с тем, что при генерации изначально использовалась прямоугольная область Ω .

Выполняется решение задачи параметрической идентификации. Шаг расширения окна $h = 0.2$; начальные значения параметров: $\alpha_0^{(0)} = 2.50$, $\beta_0^{(0)} = 0.50$, $s_\alpha^{(0)} = 0.05$, $s_\beta^{(0)} = 0.05$, $\varphi^{(0)} = 0.00$; ограничения на размер окна s^{\min} и s^{\max} не задаются. На рис. 2 и 3 проиллюстрирован процесс работы алгоритма в случаях прямоугольной и эллипсоидной областей Ω .

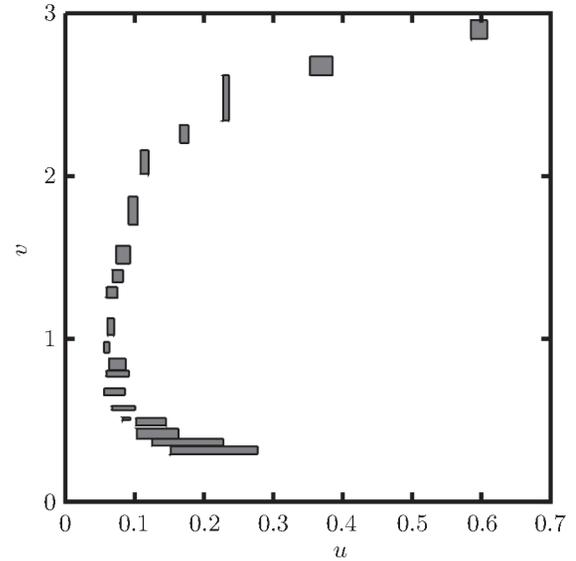


Рис. 1. Квазиэкспериментальные интервальные оценки фазовых переменных системы (16) в различные моменты времени.

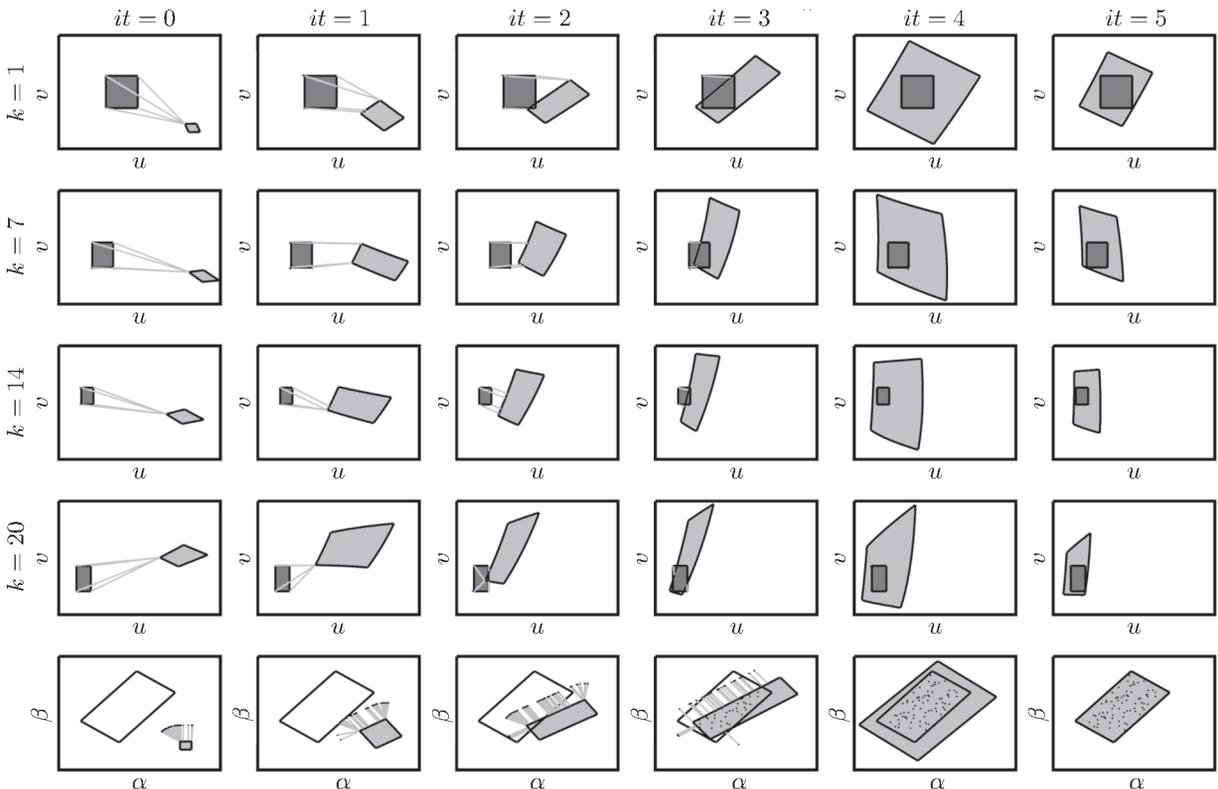


Рис. 2. Иллюстрация решения задачи параметрической идентификации системы (16) в случае прямоугольной области Ω .

В верхних четырёх строках на рис. 2 и 3 показаны квазиэкспериментальные оценки фазовых переменных \hat{Y}^k (темно-серый цвет) для $k = 1, 7, 14, 20$ и соответствующие модельные множества Y^k (светло-серый цвет) на всех итерациях алгоритма подвижного окна. Серые ли-

нии соединяют каждую вершину \hat{Y}^k с ближайшей точкой в Y^k . Сумма квадратов длин этих линий по всем k фактически определяет значение целевой функции (14).

В нижней строке на рис. 2 и 3 демонстрируется движение окна $\Omega^{(it)}$ (закрашенная фигура) в пространстве параметров $\alpha \times \beta$. Исходное множество показано незакрашенной фигурой (точное решение). Серые линии соединяют точки z_j^k и zn_j^k . Каждое окно покрывает линии, полученные на предыдущем шаге. Со 2-й итерации линии начинают вырождаться, это говорит о том, что для соответствующей экспериментальной точки найдены значения α и β , при которых отклонение от модельного решения будет минимальным (в данном примере равно нулю). На 4-й итерации все z_j^k стали равны zn_j^k , и после 5-й итерации окно более не будет перемещаться.

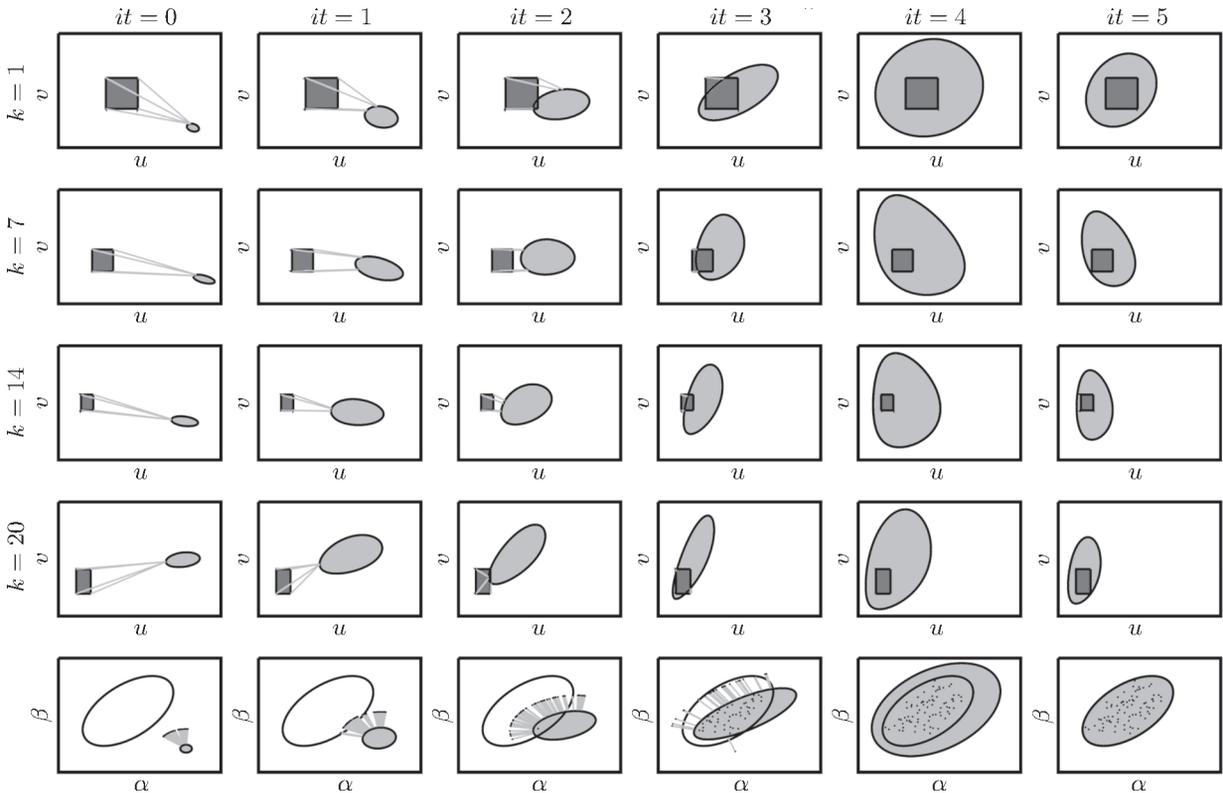


Рис. 3. Иллюстрация решения задачи параметрической идентификации системы (16) в случае эллипсоидной области Ω .

Найденные значения $\alpha_0, \beta_0, s_\alpha, s_\beta, \varphi$ на последней итерации алгоритма совпадают с исходными значениями. Модельные множества полностью содержат в себе интервальные оценки фазовых переменных. Отметим, что полученные множества Y^k в случае прямоугольной формы окна не являются выпуклыми (левая сторона множеств имеет вогнутость), таким образом, в конкретных примерах выпуклость может быть не обязательной.

Далее рассмотрим задачу с трёхмерной областью неопределённости:

$$u' = \alpha u - \frac{5}{4}uv + \frac{1}{10}u^2, \quad v' = -2v + \frac{1}{2}uv + \frac{1}{10}v^2,$$

$$\begin{pmatrix} u(0) \\ v(0) \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ \alpha_0 \end{pmatrix} + \mathbf{R}_{\varphi_{1,2}} \mathbf{R}_{\varphi_{1,3}} \mathbf{R}_{\varphi_{2,3}} \begin{pmatrix} s_u g_1(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \\ s_v g_2(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \\ s_\alpha g_3(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 4], \quad (17)$$

где $\xi_1 \in [0, 1], \xi_2 \in [0, 1], \xi_3 \in [0, 1]$; $\mathbf{R}_{\varphi_{1,2}}, \mathbf{R}_{\varphi_{1,3}}, \mathbf{R}_{\varphi_{2,3}}$ – 3×3 -матрицы поворота; g_1, g_2, g_3 задают преобразование единичного куба в куб с длиной стороны 2 и центром в начале

координат или в шар единичного радиуса. Параметры области неопределённости: $u_0, v_0, \alpha_0, \alpha_0, s_v, s_\alpha, \varphi_{1,2}, \varphi_{1,3}, \varphi_{2,3}$.

На рис. 4 тёмно-серым цветом показаны сгенерированные квазиэкспериментальные интервальные оценки фазовых переменных $\hat{Y}^k, k = \overline{1, 20}$, в равномерно расположенных точках $t_k = k/5$ на интервале интегрирования. При генерации использовалась прямоугольная область неопределённости со следующими значениями параметров: $u_0 = 4.5, v_0 = 3.0, \alpha_0 = 4.0, s_u = 0.1, s_v = 0.1, s_\alpha = 0.1, \varphi_{1,2} = -\pi/6, \varphi_{1,3} = \pi/3, \varphi_{2,3} = \pi/4$.

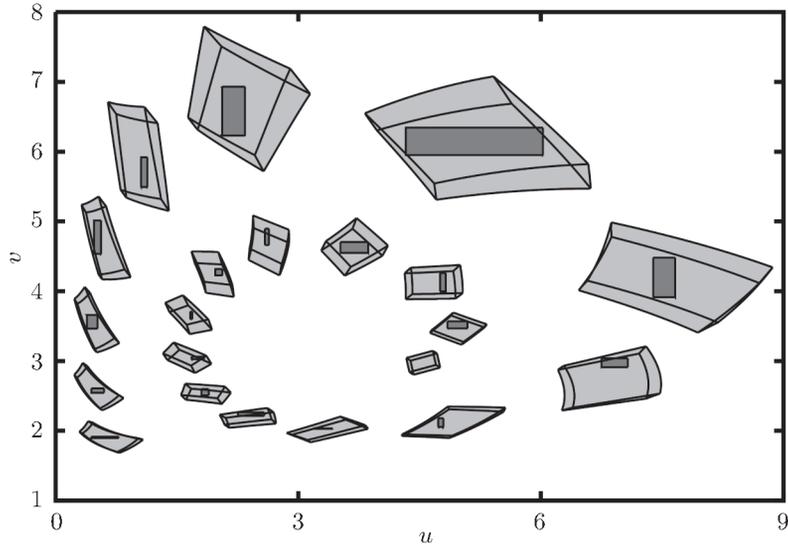


Рис. 4. Квазиэкспериментальные интервальные оценки фазовых переменных системы (17) в различные моменты времени (темно-серый цвет) и полученные множества Y^k на последней итерации алгоритма в случае области неопределённости в форме прямоугольного параллелепипеда (светло-серый цвет).

Выполняется решение задачи параметрической идентификации с помощью алгоритма подвижного окна. Шаг расширения $h = 0.1$; начальные значения параметров: $u_0^{(0)} = 3.5, v_0^{(0)} = 4.0, \alpha_0^{(0)} = 3.5, s_u^{(0)} = 0.1, s_v^{(0)} = 0.1, s_\alpha^{(0)} = 0.1, \varphi_{1,2}^{(0)} = 0, \varphi_{1,3}^{(0)} = 0, \varphi_{2,3}^{(0)} = 0$; ограничения на размер окна: $s_u^{\max} = 0.2, s_v^{\max} = 0.2, s_\alpha^{\max} = 0.2$. Алгоритм завершил работу за 20 итераций. На рис. 5 показаны получающиеся окна в процессе работы алгоритма для каждой 4-й итерации.

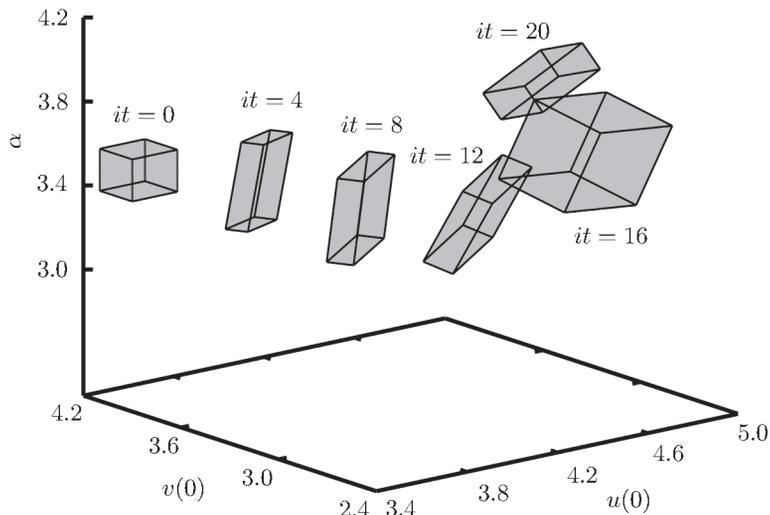


Рис. 5. Иллюстрация перемещения окна в процессе работы алгоритма при решении задачи параметрической идентификации системы (17).

Получены значения для прямоугольной области неопределённости: $u_0^{(20)} = 4.55$, $v_0^{(20)} = 2.98$, $\alpha_0^{(20)} = 3.94$, $s_u^{(20)} = 0.11$, $s_v^{(20)} = 0.11$, $s_\alpha^{(20)} = 0.07$, $\varphi_{1,2}^{(20)} = 0.30$, $\varphi_{1,3}^{(20)} = 0.29$, $\varphi_{2,3}^{(20)} = -0.37$. Они не совпадают со значениями, используемыми при генерации.

Ключевое отличие данного примера от предыдущего заключается в том, что здесь каждой точке на фазовой плоскости соответствует множество точек в пространстве $u(0) \times v(0) \times \alpha$. В связи с этим решение задачи параметрической идентификации является не единственным. На рис. 4 показана фазовая плоскость на последней итерации алгоритма: все модельные множества Y^k (светло-серый цвет) полностью содержат в себе квазиэкспериментальные интервальные оценки \hat{Y}^k (темно-серый цвет). Множества Y^k являются проекцией трёхмерного деформирующегося прямоугольного параллелепипеда. Каждая точка на такой проекции будет соответствовать кривой в пространстве $u(0) \times v(0) \times \alpha$.

На последней итерации алгоритма была построена также область неопределённости в форме эллипсоида: $u_0^{(20)} = 4.55$, $v_0^{(20)} = 2.98$, $\alpha_0^{(20)} = 3.94$, $s_u^{(20)} = 0.25$, $s_v^{(20)} = 0.15$, $s_\alpha^{(20)} = 0.1$, $\varphi_{1,2}^{(20)} = 0.30$, $\varphi_{1,3}^{(20)} = 0.29$, $\varphi_{2,3}^{(20)} = -0.37$. В этом случае все множества Y^k будут являться выпуклыми, в отличие от множеств на рис. 4.

Представленный в работе алгоритм успешно справился с данными задачами: во всех случаях найдены такие параметры области неопределённости, при которых соответствующее решение системы ОДУ полностью содержит интервальные оценки фазовых переменных.

Заключение. В работе рассмотрена задача параметрической идентификации динамических систем с прямоугольными и эллипсоидными областями неопределённости параметров в случае, когда результаты экспериментов заданы в виде интервалов. Решение данной задачи сводится к минимизации целевой функции, которая характеризует суммарное отклонение между параметрическими множествами состояний системы и экспериментальными данными. Сформулировано и доказано утверждение о том, что если модельные множества являются выпуклыми, то вместо экспериментальных интервальных оценок можно рассматривать только крайние точки этих оценок. Для эффективной минимизации целевой функции разработан алгоритм подвижного окна, относящийся к градиентным методам. В его основе лежит алгоритм адаптивной интерполяции, который позволяет в рамках определённого окна в пространстве неизвестных параметров для каждого момента времени построить полином, интерполирующий зависимость состояния динамической системы от параметров. Выполнена апробация предложенного алгоритма на нескольких задачах, содержащих разное количество неизвестных величин. Для всех задач успешно получены области значений неизвестных параметров, при которых параметрические множества состояний системы полностью содержат интервальные экспериментальные данные, что демонстрирует эффективность разработанного алгоритма.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шенк Х. Теория инженерного эксперимента. М., 1972.
2. Martyshov M.N., Emelyanov A.V., Demin V.A. et al. Multifilamentary character of anticorrelated capacitive and resistive switching in memristive structures based on (Co-Fe-B)x(LiNbO3)100-x nanocomposite // Phys. Rev. Appl. 2020. V. 14. № 3. P. 034016.
3. Moore R. Interval Analysis. Englewood Cliffs, 1966.
4. Moore R.E., Kearfott R.B., Cloud M.J. Introduction to Interval Analysis. Philadelphia, 2009.
5. Шарый С.П. Конечномерный интервальный анализ. Новосибирск, 2019.
6. Добравец Б.С. Интервальная математика. Красноярск, 2007.
7. Xiao N., Fedele F., Muhanna R.L. Inverse problems under uncertainties-an interval solution for the beam finite element // 11th Intern. Conf. on Structural Safety & Reliability. New York, 2013. P 1–8.
8. Петрикевич Я.И. Структурно-параметрическая идентификация динамических объектов по интервальным исходным данным: дис. ... канд. техн. наук. М., 2006.
9. Диллигенская А.Н., Самокиш А.В. Параметрическая идентификация в обратных задачах теплопроводности в условиях интервальной неопределённости на основе нейронных сетей // Вестн. Самарского гос. техн. ун-та. 2020. Т. 28. № 4 (68). С. 6–18.

10. Морозов А.Ю., Ревизников Д.Л. Интервальный подход к решению задач параметрической идентификации динамических систем // Дифференц. уравнения. 2022. Т. 58. № 7. С. 962–976.
11. Морозов А.Ю., Ревизников Д.Л. Алгоритм адаптивной интерполяции на основе kd-дерева для численного интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений с интервальными начальными условиями // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54. № 7. С. 963–974.
12. Морозов А.Ю., Ревизников Д.Л., Гудаснов В.Ю. Алгоритм адаптивной интерполяции на основе kd-дерева для решения задач химической кинетики с интервальными параметрами // Мат. моделирование. 2018. Т. 30. № 12. С. 129–144.
13. Морозов А.Ю. Интерполяционный подход в задачах моделирования динамических систем с эллипсоидными оценками параметров // Тр. МАИ. 2022. № 124. С. 1–24.
14. Смоляк С.А. Квадратурные и интерполяционные формулы на тензорных произведениях некоторых классов функций // Докл. АН СССР. 1963. Т. 148. № 5. С. 1042–1045.
15. Bungartz H.-J., Griebel M. Sparse grids // Acta Numerica. 2004. V. 13. № 1. P. 147–269.
16. Gerstner T., Griebel M. Sparse grids // Encyclopedia of Quantitative Finance / Ed. R. Cont. New York, 2010.
17. Morozov A.Yu., Zhuravlev A.A., Reviznikov D.L. Sparse grid adaptive interpolation in problems of modeling dynamic systems with interval parameters // Mathematics. 2021. V. 9. P. 298.
18. Морозов А.Ю., Ревизников Д.Л. Алгоритм адаптивной интерполяции на разреженных сетках для численного интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений с интервальными неопределённостями // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 7. С. 976–987.
19. Морозов А.Ю. Параллельный алгоритм адаптивной интерполяции на основе разреженных сеток для моделирования динамических систем с интервальными параметрами // Программная инженерия. 2021. Т. 12. № 8. С. 395–403.
20. Демьянов В.Ф., Малоземов В.Н. Введение в минимакс. М., 1972.
21. Евтушенко Ю.Г. Некоторые локальные свойства минимаксных задач // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1974. Т. 14. № 3. С. 669–679.
22. Гилл Ф., Мюррей У., Райт М. Практическая оптимизация. М., 1985.
23. Пантелеев А.В., Летова Т.А. Методы оптимизации в примерах и задачах. М., 2005.
24. Sylvester J. J. A question in the geometry of situation // Quarterly J. of Math. 1857. V. 1. P. 79.
25. Васильев Н.С. О численном решении экстремальных задач построения эллипсоидов и параллелепипедов // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1987. Т. 27. № 3. С. 340–348.
26. Шор Н.З., Стеценко С.И. Алгоритм последовательного сжатия пространства для построения описанного эллипсоида минимального объёма // Исследование методов решения экстремальных задач. Киев, 1990. С. 25–29.
27. Khachiyan L.G. Rounding of polytopes in the real number model of computation // Math. of Operations Research. 1996. V. 21. № 2. P. 307–320.

Федеральный исследовательский центр
 “Информатика и управление” РАН, г. Москва,
 Московский авиационный институт
 (национальный исследовательский университет)

Поступила в редакцию 20.02.2023 г.
 После доработки 20.02.2023 г.
 Принята к публикации 18.04.2023 г.