ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 6, с. 843–846

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.913

НЕАНАЛИТИЧЕСКИЕ ПЕРВЫЕ ИНТЕГРАЛЫ АНАЛИТИЧЕСКИХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ОКРЕСТНОСТИ УСТОЙЧИВЫХ ПОЛОЖЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ

© 2023 г. В. В. Козлов

Приведены примеры аналитических систем дифференциальных уравнений в чётномерных фазовых пространствах с изолированными положениями равновесия, которые допускают неаналитические первые интегралы. Эти интегралы положительно определены в окрестности равновесий, что доказывает их устойчивость (на всей оси времени). Однако такие системы дифференциальных уравнений вообще не допускают нетривиальных первых интегралов в виде формальных степенных рядов. В частности, из устойчивости по Ляпунову равновесий аналитических систем не вытекает их формальная устойчивость. В случае нечётной размерности фазового пространства все изолированные состояния равновесия, по-видимому, неустойчивы.

DOI: 10.31857/S0374064123060134, EDN: FIKMPW

1. Теорема Ляпунова. Напомним классический результат Ляпунова в проблеме центра для аналитических систем дифференциальных уравнений на плоскости. Если система

$$\dot{x} = \omega y + \ldots, \quad \dot{y} = -\omega x + \ldots, \quad \omega \neq 0 \tag{1}$$

(многоточие обозначает совокупность слагаемых по x, y степени не меньшей двух) с аналитическими правыми частями допускает интеграл в виде формального степенного ряда

$$H = x^2 + y^2 + \ldots,$$

то этот ряд сходится при малых x, y и положение равновесия $x = y = 0$ будет *центром* (в частности, оно устойчиво на всей оси времени). Доказательство и обсуждение можно найти в монографиях [1, п. 38; 2, § 27].

В частности, в рассматриваемой задаче *формальная устойчивость* положения равновесия совпадает с устойчивостью по Ляпунову. Однако для сильно нелинейных систем (когда в (1) $\omega = 0$) это не так. Вот пример системы из [3, с. 131]:

$$\dot{x} = y[2x^2 + y^2 + (x^2 + y^2)^2], \quad \dot{y} = -x[2x^2 + y^2 + 2(x^2 + y^2)^2], \tag{2}$$

которая допускает *неаналитический* первый интеграл

$$H = (2x^2 + y^2)e^{-1/(x^2+y^2)}, \tag{3}$$

и изолированное равновесие системы (2) также будет центром.

Если функцию H доопределить нулём в начале координат, то она будет бесконечно дифференцируемой функцией на фазовой плоскости и её можно принять за функцию Ляпунова. Её ряд Маклорена будет нулевым; он сходится, но не к функции (3). Таким образом, мы имеем пример аналитической системы дифференциальных уравнений с устойчивым, но не формально устойчивым положением равновесия.

В следующем пункте этот пример будет распространён на фазовые пространства любой *чётной* размерности $n \geqslant 2$. Там же будут указаны условия отсутствия нетривиальных интегралов в виде формальных степенных рядов. Всё это показывает, что интерес к сходимости формальных рядов для первых интегралов в проблеме устойчивости равновесных состояний является несколько преувеличенным (поучительное обсуждение см. в [2, гл. III]). Что касается аналитических систем в нечётномерном фазовом пространстве, то, по-видимому, все их *изолированные* равновесия неустойчивы на всей оси времени. Для $n=1$ это очевидно. При $n=3$ неустойчивость доказана в работе [4]. Статьи [5, 6] содержат некоторые результаты в подтверждение этой гипотезы для нечётных $n \geqslant 5$. Интересно отметить, что в гладком (бесконечно дифференцируемом) случае гипотеза неверна: в [5] приведён пример гладкой системы в трёхмерном пространстве с устойчивым изолированным равновесием.

2. Неаналитические функции Ляпунова. Пусть $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ – декартовы координаты фазового пространства $\mathbb{R}^{2n}$. Рассмотрим две функции f и g, аналитические в окрестности U начала координат $x=y=0$ и положительные в области $U\setminus\{0,0\}$. Предположим, что ряд Маклорена функции g начинается с положительно определённой однородной формы степени $2s$ $(s \geqslant 1)$. Для нас наиболее важен случай $s=1$.

Сопоставим этим функциям следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\dot{x}_k = f\frac{\partial g}{\partial y_k} + g^2\frac{\partial f}{\partial y_k}, \quad \dot{y}_k = -f\frac{\partial g}{\partial x_k} - g^2\frac{\partial f}{\partial x_k}, \quad 1 \leqslant k \leqslant n. \tag{4}$$

Начало координат – положение равновесия. Правые части (4) аналитичны в U-окрестности этой точки.

Если, например, $f \equiv 1$, то (4) – каноническая гамильтонова система с гамильтонианом g. Таким образом, систему вида (4) можно рассматривать как некоторое расширение гамильтоновых систем дифференциальных уравнений.

Введём функцию

$$H(x,y) = fe^{-1/g}, \quad H(0,0) = 0.$$

Несложно проверить, что эта функция бесконечно дифференцируема в начале координат и все её производные в этой точке равны нулю. Следовательно, её ряд Маклорена *нулевой*. Функция

$$F(x,y) = g^2 e^{-1/g}, \quad F(0,0) = 0,$$

обладает тем же свойством.

Теорема 1. *Справедливы следующие заключения:*

1) функция H – первый интеграл системы (4);

2) она положительно определена в окрестности начала координат;

3) замена времени $d\tau = F(x,y)\,dt$ переводит систему (4) в каноническую гамильтонову систему

$$\frac{dx_k}{d\tau} = \frac{\partial H}{\partial y_k}, \quad \frac{dy_k}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial x_k}, \quad 1 \leqslant k \leqslant n. \tag{5}$$

В частности, равновесие $x=y=0$ устойчиво: в качестве функции Ляпунова можно принять H. Гамильтонова система (5) гладкая и аналитическая в проколотой окрестности начала координат.

Заключение 2) очевидно, а заключения 1) и 3) проверяются прямыми вычислениями.

3. Формальные интегралы. Пусть теперь f и g – две квадратичные формы:

$$\sum(x_j^2 + y_j^2)/2 \quad \text{и} \quad \sum(\mu_j x_j^2 + y_j^2)/2,$$

где $\mu_1, \ldots, \mu_n$ – положительные числа, не равные единице. В этом случае систему (4) следует отнести к строго нелинейным системам дифференциальных уравнений: матрица её линеаризации в положении равновесия будет нулевой. Положим $\mu_j = \omega_j^2$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$.

Теорема 2. *Если числа $\omega_1, \ldots, \omega_n$ линейно независимы над полем $\mathbb{Q}$, то система (4) не имеет нетривиальных формальных интегралов.*

Другими словами, любой первый интеграл в виде формального степенного ряда относительно $x_1, \ldots, y_n$ сводится к свободному члену (т.е. к константе). Таким образом, мы имеем пример полиномиальной системы дифференциальных уравнений в $\mathbb{R}^{2n}$, $n \geqslant 1$, с изолированным и устойчивым по Ляпунову равновесием, которое формально неустойчиво. В противном случае существовал бы формальный интеграл такой, что конечное число его однородных форм наименьшей степени представляло бы определённо положительную функцию от $x_1, \ldots, x_n$, $y_1, \ldots, y_n$. Ранее высказывалось мнение, что из устойчивости по Ляпунову обязательно вытекает формальная устойчивость (см., например, [7, с. 91]).

Доказательство теоремы 2. Пусть

$$H_k + H_{k+1} + \ldots, \quad k \geqslant 1, \tag{6}$$

– формальный первый интеграл системы (4); H_s – однородный многочлен относительно $x_1, \ldots$ $\ldots, x_n$, $y_1, \ldots, y_n$ степени s (его коэффициенты могут быть комплексными числами).

Лемма 1. *Если k нечётно, то $H_k = 0$; если $k = 2l$ (l целое и $l \geqslant 1$), то*

$$H_{2l} = \sum_{\substack{l_1,\ldots,l_n \geqslant 0 \\ l_1+\ldots+l_n=l}} h_{l_1\ldots l_n}(\mu_1 x_1^2 + y_1^2)^{l_1} \ldots (\mu_n x_n^2 + y_n^2)^{l_n}. \tag{7}$$

Доказательство. Так как $f \neq 0$ в проколотой окрестности начала координат, то первая форма H_k из (6) является первым интегралом линейной гамильтоновой системы

$$\dot{x}_k = y_k, \quad \dot{y}_k = -\omega_k^2 x_k, \quad 1 \leqslant k \leqslant n. \tag{8}$$

Введём новые переменные

$$u_k = x_k + iy_k/\omega_k, \quad v_k = x_k - iy_k/\omega_k, \quad i^2 = -1.$$

В этих переменных уравнения (8) примут вид

$$\dot{u}_k = -i\omega_k u_k, \quad \dot{v}_k = i\omega_k v_k, \quad 1 \leqslant k \leqslant n.$$

Пусть

$$H_k = \sum \widetilde{h}_{k_1\ldots k_n\ l_1\ldots l_n} u_1^{k_1} \ldots u_n^{k_n}\ v_1^{l_1} \ldots v_n^{l_n}.$$

Тогда

$$\dot{H}_k = \sum \widetilde{h}_{k_1\ldots l_n}[(l_1 - k_1)\omega_1 + \ldots + (l_n - k_n)\omega_n] u_1^{k_1} \ldots v_n^{l_n} = 0.$$

Следовательно, если $\widetilde{h}_{k_1\ldots l_n} \neq 0$, то $k_1 = l_1, \ldots, k_n = l_n$ (ввиду предположения о независимости $\omega_1, \ldots, \omega_n$). Так как

$$u_j v_j = x_j^2 + y_j^2/\omega_j^2,$$

то степень H_k чётная и эта форма имеет вид (7). Лемма доказана.

Итак, формальный интеграл имеет вид

$$H_{2l} + H_{2l+1} + H_{2l+2} + \ldots$$

Лемма 2. *Справедливо равенство $H_{2l+1} = 0$.*

Действительно, согласно лемме 1, производная H_{2l} в силу системы (4) будет однородной формой степени $2l+4$. С другой стороны, производная от H_{2l+1} в силу той же системы будет суммой двух однородных форм со степенями $2l+3$ и $2l+5$ соответственно. Значит, H_{2l+1} – первый интеграл линейной системы (8). Но тогда (по лемме 1) $H_{2l+1} = 0$.

Далее производная от $H_{2l} + H_{2l+2} + \ldots$ в силу системы (4) представляет собой формальный степенной ряд, начинающийся с однородной формы степени $2l+4$. Приравнивая её к нулю (с учётом формулы (7)), приходим к равенству

$$2g^2 \sum_{l_j \neq 0} \sum h_{l_1\ldots l_n} l_j (\mu_1 x_1^2 + y_1^2)^{l_1} \ldots (\mu_j x_j^2 + y_j^2)^{l_j - 1} \ldots$$

$$\ldots(\mu_n x_n^2 + y_n^2)^{l_n}(\mu_j - 1)x_j y_j + f\sum\left[\frac{\partial H_{2l+2}}{\partial x_j}y_j - \frac{\partial H_{2l+2}}{\partial y_j}\mu_j x_j\right] = 0. \qquad (9)$$

Полагаем теперь, что

$$y_k = ix_k, \quad 1 \leqslant k \leqslant n.$$

Тогда, очевидно, $f = 0$, но

$$g = \sum(\mu_j - 1)x_j^2/2. \qquad (10)$$

Согласно предположению, все μ_j отличны от единицы. Следовательно, форма (10) ненулевая. Поскольку в кольце многочленов нет делителей нуля, то из (9) вытекает равенство

$$\sum_{l_j \neq 0}\sum h_{l_1\ldots l_n} l_j(\mu_1 - 1)^{l_1}\ldots(\mu_n - 1)^{l_n} x_1^{2l_1}\ldots x_n^{2l_n} \equiv 0$$

для всех $x_1, \ldots, x_n$. Так как $\mu_1 \neq 1, \ldots, \mu_n \neq 1$, то все коэффициенты

$$(l_1 + \ldots + l_n)h_{l_1\ldots l_n} = lh_{l_1\ldots l_n}$$

равны нулю, и поэтому $H_{2l} = 0$. Значит, формальный ряд (6) нулевой. Теорема 2 доказана.

Замечание. Теорема 2 справедлива и в более общем случае, когда к квадратичным формам f и g добавляются степенные ряды, начинающиеся с членов степени не меньшей пяти.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения. М.; Л., 1950.
2. *Зигель К., Мозер Ю.* Лекции по небесной механике. М.; Ижевск, 2001.
3. *Немыцкий В.В., Степанов В.В.* Качественная теория дифференциальных уравнений. М.; Л., 1949.
4. *Brunella M.* Instability of equilibria in dimension three // Ann. Inst. Fourier (Grenoble). 1998. V. 48. № 5. P. 1345–1357.
5. *Козлов В.В., Трещёв Д.В.* О неустойчивости изолированных равновесий динамических систем с инвариантной мерой в нечётномерном пространстве // Мат. заметки. 1999. Т. 65. Вып. 5. С. 674–680.
6. *Козлов В.В.* Первые интегралы и асимптотические траектории // Мат. сб. 2020. Т. 211. № 1. С. 32–59.
7. *Маркеев А.П.* Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М., 1978.

Математический институт
имени В.А. Стеклова РАН, г. Москва

Поступила в редакцию 30.03.2023 г.
После доработки 30.03.2023 г.
Принята к публикации 18.04.2023 г.