ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 7, с. 867–880

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.929

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ОТОБРАЖЕНИЯ СДВИГА НА БЕСКОНЕЧНОМЕРНОМ ТОРЕ

© 2023 г. С. Д. Глызин, А. Ю. Колесов

Исследуется классический в теории динамических систем вопрос о минимальности отображения сдвига на бесконечномерном торе, а точнее, решается проблема отыскания достаточных условий, гарантирующих отсутствие свойства минимальности.

DOI: 10.31857/S0374064123070014, EDN: GTARSE

1. Постановка задачи и описание результатов.

1.1. Основные определения. История развития современной теории динамических систем подробно описана в обзорах [1, 2] и монографиях [3–12] (это, разумеется, далеко не полный библиографический список). Что же касается бесконечномерных динамических систем, то попытки их изучения предпринимались неоднократно в целом ряде работ (см., например, [13–17]). Упомянутые работы дополняет настоящая статья, являющаяся продолжением серии публикаций [18–22] и посвящённая изучению некоторых свойств стандартного отображения сдвига на бесконечномерном торе. Мотивацией для таких исследований является возможность последующего применения их результатов к динамическим системам с бесконечномерным фазовым пространством, возникающим в различных приложениях. Что же касается бесконечномерного тора, то он представляет собой наиболее естественный модельный пример банахова многообразия.

Поскольку нас интересует отображение сдвига на бесконечномерном торе $\mathbb{T}^\infty$, то сначала, следуя работам [18–22], дадим определение самого тора $\mathbb{T}^\infty$. С этой целью фиксируем некоторое бесконечномерное вещественное банахово пространство E с нормой $\|\cdot\|$ и в первую очередь сформулируем определение бесконечномерной целочисленной решётки $\mathbb{Z}^\infty$.

Определение 1.1. *Бесконечномерной целочисленной решёткой* (или просто *целочисленной решёткой*) назовём непустое подмножество $\mathbb{Z}^\infty \subset E$, удовлетворяющее следующим аксиомам:

1) имеет место свойство линейности: для любых $l_1, l_2 \in \mathbb{Z}^\infty$, $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ справедливо включение $k_1 l_1 + k_2 l_2 \in \mathbb{Z}^\infty$;

2) выполняется условие дискретности

$$\mu_0 \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{\substack{l_1, l_2 \in \mathbb{Z}^\infty \\ l_1 \neq l_2}} \|l_1 - l_2\| > 0; \tag{1.1}$$

3) замыкание линейной оболочки векторов из $\mathbb{Z}^\infty$ совпадает с исходным пространством E (это условие естественно назвать *условием максимальности*).

При построении конкретных примеров целочисленных решёток оказывается полезным понятие ядра, а именно *ядром* Ω решётки $\mathbb{Z}^\infty$ будем называть непустое подмножество из $\mathbb{Z}^\infty$ такое, что любой вектор $l \in \mathbb{Z}^\infty$ представляет собой конечную линейную комбинацию элементов из Ω с целочисленными коэффициентами. Очевидно, что всегда имеется так называемое максимальное ядро $\Omega = \mathbb{Z}^\infty$. Далее ядро Ω назовём *минимальным*, если оно состоит из линейно независимых векторов. Характерная особенность минимального ядра Ω заключается в том, что для любого подмножества $\Omega_0 \subset \Omega$, также являющегося ядром, выполняется равенство $\Omega_0 = \Omega$. В общем случае вопрос о существовании минимального ядра остаётся открытым, однако в некоторых конкретных ситуациях его можно записать явно.

Отдельно остановимся на связи данного нами определения минимального ядра с понятием базиса абелевой группы. Для этого напомним, что *свободная абелева группа* – это абелева группа, имеющая базис, т.е. такое подмножество B элементов группы, что для любого её элемента существует единственное его представление в виде линейной комбинации базисных элементов с целыми коэффициентами, из которых только конечное число являются ненулевыми. Очевидно, что решётка $\mathbb{Z}^\infty$ оказывается абелевой группой по отношению к операции сложения векторов из пространства E, а минимальное ядро Ω (если оно существует) автоматически будет базисом B в данной группе. Вопрос же о том, каждый ли базис B автоматически являться минимальным ядром, пока открыт. Очевидно лишь, что формально требования, наложенные на минимальное ядро Ω, сильнее, чем условия на базис B (в первом случае мы требуем отсутствия равных нулю нетривиальных конечных линейных комбинаций векторов с вещественными коэффициентами, а во втором – отсутствия таких комбинаций только лишь с целыми коэффициентами).

Примером целочисленной решётки в пространстве ℓ_p, $p \geqslant 1$, состоящем из векторов

$$\varphi = \operatorname{colon}(\varphi_{(1)}, \varphi_{(2)}, \ldots, \varphi_{(k)}, \ldots), \quad \varphi_{(k)} \in \mathbb{R}, \quad k \geqslant 1,$$

$$\|\varphi\| \stackrel{\text{def}}{=} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\varphi_{(k)}|^p\right)^{1/p} < \infty, \tag{1.2}$$

является множество

$$\mathbb{Z}^\infty = \{l = \operatorname{colon}(l_{(1)}, l_{(2)}, \ldots, l_{(k)}, \ldots) \in \ell_p : l_{(k)} \in \mathbb{Z}, \quad k \geqslant 1\}. \tag{1.3}$$

В силу сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} |l_{(k)}|^p$ (см. (1.2)) любой вектор $l \in \mathbb{Z}^\infty$ имеет лишь конечное число ненулевых координат. Что же касается ядра Ω, то в данном случае в качестве такового можно взять множество

$$\{e_k, k \in \mathbb{N}\} \tag{1.4}$$

(через e_k обозначен вектор, у которого k-я компонента равна единице, а все остальные нулевые). Заметим далее, что поскольку эти векторы линейно независимы, то ядро (1.4) минимально.

В случае пространства ℓ_∞, элементами которого являются векторы

$$\varphi = \operatorname{colon}(\varphi_{(1)}, \varphi_{(2)}, \ldots, \varphi_{(k)}, \ldots), \quad \varphi_{(k)} \in \mathbb{R}, \quad k \geqslant 1,$$

$$\|\varphi\| \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{k \geqslant 1} |\varphi_{(k)}| < \infty, \tag{1.5}$$

аналогичная (1.3) целочисленная решётка имеет вид

$$\mathbb{Z}^\infty = \{l = \operatorname{colon}(l_{(1)}, l_{(2)}, \ldots, l_{(k)}, \ldots) \in \ell_\infty : l_{(k)} \in \mathbb{Z}, \quad k \geqslant 1\}. \tag{1.6}$$

Ядром здесь будет множество $\Omega = \operatorname{Bin}(\ell_\infty)$ так называемых бинарных векторов $l \in \ell_\infty$, у которых координаты $l_{(k)}$, $k \geqslant 1$, независимо друг от друга принимают значения 0 или 1.

Действительно, возьмём произвольный вектор $l \in \mathbb{Z}^\infty$ и заметим, что поскольку последовательность $l_{(k)}$ из (1.6) ограничена, то найдётся такой конечный набор попарно различных целых чисел m_1, m_2, $\ldots$, m_s, что $l_{(k)} \in \{m_1, m_2, \ldots, m_s\}$ при всех $k \geqslant 1$. А это означает, что справедливо равенство $l = m_1 e_{m_1} + m_2 e_{m_2} + \ldots + m_s e_{m_s}$, где бинарные векторы e_{m_j}, $1 \leqslant j \leqslant s$, определяются по правилу

$$e_{m_j} = \operatorname{colon}(e^1_{m_j}, e^2_{m_j}, \ldots, e^k_{m_j}, \ldots), \quad e^k_{m_j} = \begin{cases} 0 & \text{при} \ \ l_{(k)} \neq m_j, \\ 1 & \text{при} \ \ l_{(k)} = m_j. \end{cases}$$

Отметим ещё, что множество $\operatorname{Bin}(\ell_\infty)$ заведомо не является минимальным ядром, так как ядром оказывается, например, и множество $\operatorname{Bin}(\ell_\infty) \setminus \{l_0\}$, где $l_0 = \operatorname{colon}(1, 1, \ldots, 1, \ldots)$. Вопрос существования минимального ядра здесь, как и в общем случае, открыт.

Обратимся далее к пространству c, состоящему из векторов

$$\varphi = \operatorname{colon}(\varphi_{(1)}, \varphi_{(2)}, \ldots, \varphi_{(k)}, \ldots), \quad \varphi_{(k)} \in \mathbb{R}, \quad \lim_{k\to+\infty} \varphi_{(k)} = 0, \quad k \geqslant 1, \tag{1.7}$$

и снабжённому нормой

$$\|\varphi\| \stackrel{\text{def}}{=} \max_{k\geqslant 1} |\varphi_{(k)}|. \tag{1.8}$$

Как и в двух предыдущих случаях, целочисленная решётка в c задаётся аналогичным (1.3) и (1.6) равенством

$$\mathbb{Z}^\infty = \{l = \operatorname{colon}(l_{(1)}, l_{(2)}, \ldots, l_{(k)}, \ldots) \in c : l_{(k)} \in \mathbb{Z}, \quad k \geqslant 1\}. \tag{1.9}$$

Подчеркнём, что поскольку $l_{(k)} \to 0$ при $k \to +\infty$, то любой вектор l из (1.9) имеет лишь конечное число ненулевых компонент. Следовательно, данная решётка фактически состоит из тех же элементов, что и (1.3). Что же касается минимального ядра Ω этой решётки, то таковым здесь будет множество (1.4).

Аналог целочисленной решётки (1.6) можно определить и в лебеговом пространстве $L_\infty(0,1)$, состоящем из классов измеримых функций $x(t)$, для которых конечна норма

$$\|x\| = \operatorname*{ess\,sup}_{0\leqslant t\leqslant 1} |x(t)|.$$

Здесь целочисленной решёткой является множество вида

$$\mathbb{Z}^\infty = \{x(t) \in L_\infty(0,1) : x(t) \in \mathbb{Z} \ \text{ при почти всех } \ t \in [0,1]\}.$$

Ещё один естественный пример целочисленной решётки строится по следующему правилу. Пусть E – бесконечномерное вещественное гильбертово пространство, а $\{e_\alpha \in E : \alpha \in \Sigma\}$ – некоторая его полная ортонормированная система (индексное множество Σ заведомо состоит из бесконечного числа элементов). Тогда, как нетрудно проверить, эта система служит минимальным ядром соответствующей целочисленной решётки $\mathbb{Z}^\infty$. Элементами данной решётки являются всевозможные конечные линейные комбинации векторов e_α с целочисленными коэффициентами.

Перейдём теперь к определению тора $\mathbb{T}^\infty$. Всюду ниже считаем, что в пространстве E фиксирована некоторая целочисленная решётка $\mathbb{Z}^\infty$. Тогда с её помощью на E вводится отношение эквивалентности по следующему правилу. Будем говорить, что два вектора $x, y \in E$ эквивалентны, если существует такой элемент $l \in \mathbb{Z}^\infty$, что $x - y = 2\pi l$.

Определение 1.2. *Бесконечномерным тором* $\mathbb{T}^\infty$ назовём множество всех классов эквивалентности, порождённых описанным выше отношением.

Иными словами, справедливы равенства $\mathbb{T}^\infty = E/2\pi\mathbb{Z}^\infty = \operatorname{pr}(E)$, где отображение $\operatorname{pr}\colon E \to \mathbb{T}^\infty$ – так называемая *естественная проекция.* Эта проекция действует по правилу

$$\operatorname{pr}\colon \varphi \mapsto \{\varphi\}, \tag{1.10}$$

где φ – произвольный элемент из E, а $\{\varphi\}$ – класс эквивалентности из $\mathbb{T}^\infty$, содержащий φ. Следует также отметить, что $\mathbb{T}^\infty$ представляет собой абелеву группу относительно операции сложения, определяющейся по правилу

$$\{\varphi_1\} + \{\varphi_2\} = \{\varphi_1 + \varphi_2\} \quad \text{для любых} \ \ \varphi_1, \varphi_2 \in E. \tag{1.11}$$

В дальнейшем для краткости одной и той же буквой φ будем обозначать как вектор из E, так и соответствующий ему класс $\{\varphi\} \in \mathbb{T}^\infty$. Это не вызовет недоразумений, поскольку из контекста всегда будет очевидно о каком именно объекте идёт речь.

Метрику на торе $\mathbb{T}^\infty$ зададим равенством

$$\rho(\varphi_1, \varphi_2) = \inf_{l\in\mathbb{Z}^\infty} \|\operatorname{pr}^{-1}(\varphi_1) - \operatorname{pr}^{-1}(\varphi_2) + 2\pi l\| \quad \text{для любых} \ \ \varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{T}^\infty, \tag{1.12}$$

где, напомним, $\|\cdot\|$ – норма в E, а $\mathrm{pr}^{-1}(\varphi_1), \mathrm{pr}^{-1}(\varphi_2) \in E$ – произвольные прообразы точек $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{T}^\infty$. Так как упомянутые прообразы определяются с точностью до аддитивных добавок вида $2\pi l$, $l \in \mathbb{Z}^\infty$, то метрика (1.12) не зависит от их конкретного выбора. Отметим также, что в силу свойства дискретности (1.1) и формулы (1.12) отображение (1.10) является локальной изометрией, т.е.

$$\rho(\mathrm{pr}\,(\varphi_1), \mathrm{pr}\,(\varphi_2)) = \|\varphi_1 - \varphi_2\| \quad \text{для любых} \ \ \varphi_1, \varphi_2 \in E, \quad \|\varphi_1 - \varphi_2\| \leqslant \varepsilon_0, \tag{1.13}$$

где $\varepsilon_0 = \mathrm{const} \in (0, \pi\mu_0)$. В свою очередь, из соотношения (1.13) автоматически вытекает полнота пространства $(\mathbb{T}^\infty, \rho)$.

В связи с приведённым выше определением бесконечномерного тора следует отметить, что проблема отыскания в произвольном банаховом пространстве E хотя бы одной целочисленной решётки $\mathbb{Z}^\infty$ решается с помощью леммы Цорна и леммы Рисса об ε-почти перпендикуляре. Для того чтобы убедиться в этом, проделаем ряд построений.

Фиксируем произвольно $\varepsilon_0 \in (0,1)$ и рассматриваем всевозможные подмножества $\mathscr{B} \subset \subset E$, обладающие свойствами линейности ($k_1 b_1 + k_2 b_2 \in \mathscr{B}$ при всех $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$, $b_1, b_2 \in \in \mathscr{B}$) и дискретности ($\|b_1 - b_2\| \geqslant \varepsilon_0$ при всех $b_1, b_2 \in \mathscr{B}$, $b_1 \neq b_2$). Совокупность всех таких подмножеств обозначим через $\mathscr{Z}$ и заметим, что эта совокупность заведомо не пуста. Например, справедливо включение $\mathscr{B} = \{nb_0 : n \in \mathbb{Z}\} \in \mathscr{Z}$, где $b_0 \in E$ ($\|b_0\| \geqslant \varepsilon_0$) – фиксированный вектор.

Далее введём на $\mathscr{Z}$ отношение частичного порядка "$\prec$", полагая $\mathscr{B}_1 \prec \mathscr{B}_2$ для всех $\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2 \in \mathscr{Z}$, $\mathscr{B}_1 \subset \mathscr{B}_2$, и заметим, что здесь выполняются условия леммы Цорна. Действительно, для любой цепи (т.е. семейства $\{\mathscr{B}_\alpha \in \mathscr{Z} : \alpha \in \Upsilon\}$, где Υ – произвольное индексное множество, в котором для любых двух элементов имеем $\mathscr{B}_{\alpha_1} \prec \mathscr{B}_{\alpha_2}$ или $\mathscr{B}_{\alpha_2} \prec \mathscr{B}_{\alpha_1}$) существует точная верхняя грань $\mathscr{B}_{\sup} = \bigcup_{\alpha \in \Upsilon} \mathscr{B}_\alpha \in \mathscr{Z}$. Тогда согласно упомянутой лемме в исходном семействе $\mathscr{Z}$ найдётся максимальный элемент $\mathscr{B}_{\max}$, который характерен тем, что не существует элемента $\mathscr{B} \in \mathscr{Z}$ такого, что $\mathscr{B}_{\max} \prec \mathscr{B}$ и $\mathscr{B}_{\max} \neq \mathscr{B}$.

Обозначим через $\mathscr{V}$ замыкание линейной оболочки векторов из $\mathscr{B}_{\max}$ и покажем, что на самом деле $\mathscr{V} = E$, а значит, искомая целочисленная решётка в пространстве E задаётся равенством $\mathbb{Z}^\infty = \mathscr{B}_{\max}$.

В предположении противного в силу леммы об ε-почти перпендикуляре найдётся такой элемент $b_* \in E$, что

$$\|b_*\| = 1, \quad \rho(b_*, \mathscr{V}) \overset{\text{def}}{=} \inf_{v \in \mathscr{V}} \|b_* - v\| \geqslant \varepsilon_0.$$

Тогда, как нетрудно убедиться, множество $\mathscr{B}_* = \{kb_* + b : k \in \mathbb{Z}, \ b \in \mathscr{B}_{\max}\}$ принадлежит семейству $\mathscr{Z}$. Действительно, свойство линейности для $\mathscr{B}_*$ выполняется по построению, а дискретность вытекает из неравенств

$$\|kb_* + b\| = \begin{cases} \|b\| \geqslant \varepsilon_0 & \text{при} \ \ k = 0, \quad b \neq 0, \\ |k|\|b_* + b/k\| \geqslant |k|\rho(b_*, \mathscr{V}) \geqslant \varepsilon_0 & \text{при} \ \ k \neq 0. \end{cases}$$

Кроме того, множество $\mathscr{B}_*$ таково, что $\mathscr{B}_{\max} \prec \mathscr{B}_*$, $\mathscr{B}_{\max} \neq \mathscr{B}_*$. А поскольку в силу определения $\mathscr{B}_{\max}$ последнее невозможно, то факт существования целочисленной решётки в E полностью обоснован.

В последующем нам понадобится понятие *фундаментального множества тора* $\mathbb{T}^\infty$. Таковым будем называть множество $\mathscr{U} \subset E$, для которого $\mathrm{pr}\,(\mathscr{U}) = \mathbb{T}^\infty$ и отображение pr: $\mathscr{U} \to \mathbb{T}^\infty$ взаимно однозначно. Подчеркнём, что существование данного множества гарантирует аксиома выбора, применённая к семейству непустых попарно непересекающихся множеств $\mathrm{pr}^{-1}(\varphi)$, $\varphi \in \mathbb{T}^\infty$ (под $\mathrm{pr}^{-1}(\varphi)$ здесь понимается полный прообраз элемента $\varphi \in \mathbb{T}^\infty$).

В случае (1.2), (1.3) фундаментальной является область

$$\mathscr{U} = \{\varphi = \mathrm{colon}\,(\varphi_{(1)}, \varphi_{(2)}, \ldots, \varphi_{(k)}, \ldots) \in \ell_p : -\pi < \varphi_{(k)} \leqslant \pi, \quad k \geqslant 1\}, \tag{1.14}$$

в случае (1.5), (1.6) – область

$$\mathscr{U} = \{\varphi = \mathrm{colon}\,(\varphi_{(1)}, \varphi_{(2)}, \ldots, \varphi_{(k)}, \ldots) \in \ell_\infty : -\pi < \varphi_{(k)} \leqslant \pi, \quad k \geqslant 1\}, \tag{1.15}$$

а для (1.7)–(1.9) таковой будет область

$$\mathscr{U} = \{\varphi = \mathrm{colon}\,(\varphi_{(1)}, \varphi_{(2)}, \ldots, \varphi_{(k)}, \ldots) \in c : -\pi < \varphi_{(k)} \leqslant \pi, \quad k \geqslant 1\}. \tag{1.16}$$

Нетрудно увидеть, что множества (1.15) и (1.16) ограничены, а (1.14) этим свойством не обладает.

Необходимо отметить, что, как правило, под понятием "бесконечномерный тор" подразумевается прямое произведение счётного числа окружностей с тихоновской топологией (см., например, [16, 23–25]). В этом случае после введения на торе $\mathbb{T}^\infty$ соответствующей метрики он становится компактным метрическим пространством. Но данный вариант нас не устраивает по той причине, что указанный тор не является гладким многообразием. А поскольку теория динамических систем и, в частности, гиперболическая теория, как правило, строятся именно на таких многообразиях, то определение бесконечномерного тора нуждается в доработке.

В нашем случае тор $\mathbb{T}^\infty$ обладает требуемыми свойствами. Как показано в работах [21, 22], он представляет собой аналитическое банахово многообразие. Это многообразие всегда замкнуто (не имеет края) и некомпактно. В случае же существования у тора $\mathbb{T}^\infty$ ограниченного фундаментального множества $\mathscr{U}$ оно является ограниченным (т.е. ограничено соответствующее метрическое пространство $(\mathbb{T}^\infty, \rho)$).

Завершая пояснение необходимых в последующем основных определений, введём понятие так называемого сдвигового отображения на торе $\mathbb{T}^\infty$.

Определение 1.3. Пусть Δ – фиксированный элемент из $\mathbb{T}^\infty$. *Отображением сдвига* (или *сдвиговым отображением*) назовём преобразование вида

$$G_\Delta : \varphi \mapsto \varphi + \Delta. \tag{1.17}$$

Здесь φ – произвольная точка тора $\mathbb{T}^\infty$, а операция сложения в (1.17) определена по правилу (1.11).

Подчеркнём, что сдвиг G_Δ является гомеоморфизмом тора $\mathbb{T}^\infty$, так как обратное к нему отображение существует и имеет вид

$$G_\Delta^{-1} : \varphi \mapsto \varphi - \Delta.$$

Здесь "$-$" означает операцию, обратную к операции сложения (1.11). Более того, в силу вытекающего из (1.11) соотношения

$$n\{\varphi\} = \{n\varphi\} \quad \text{для любых} \;\; \varphi \in E, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{1.18}$$

элемент $n\Delta \in \mathbb{T}^\infty$ корректно определён при всех $n \in \mathbb{Z}$. Тем самым для любой траектории $\varphi_n = G_\Delta^n(\varphi_0)$, $\varphi_0 \in \mathbb{T}^\infty$, $n \in \mathbb{Z}$, отображения (1.17) справедливо равенство

$$\varphi_n = \varphi_0 + n\Delta, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{1.19}$$

1.2. Описание результатов. В настоящей статье нас будет интересовать наличие или отсутствие у отображения сдвига (1.17) так называемого свойства минимальности. В связи с этим напомним [4, 5], что гомеоморфизм f полного метрического пространства X называется минимальным, если у него не существует замкнутых инвариантных подмножеств, отличных от пустого множества и всего пространства X (эквивалентная формулировка – для любого $x_0 \in X$ соответствующая траектория $\{x_n = f^n(x_0), n \in \mathbb{Z}\}$ всюду плотна в X).

Приведём сначала классический результат о минимальности отображения сдвига (1.17) в конечномерном случае, т.е. на торе $\mathbb{T}^m = \mathbb{R}^m/2\pi\mathbb{Z}^m$, $m \geqslant 2$. В канонических координатах

$$(x_1, x_2, \ldots, x_m): \quad -\pi < x_k \leqslant \pi, \quad k = \overline{1, m},$$

оно записывается в виде

$$x_k \mapsto x_k + \Delta_k (\mathrm{mod}\ 2\pi), \quad k = \overline{1, m}. \tag{1.20}$$

Здесь $\Delta_k \in \mathbb{R}$ – некоторые постоянные, а операция $x(\bmod 2\pi)$ для любого $x \in \mathbb{R}$ определяется формулой

$$x(\mathrm{mod}\ 2\pi) = \pi - 2\pi\left\{-\frac{x}{2\pi} + \frac{1}{2}\right\} \in (-\pi, \pi], \tag{1.21}$$

в данном случае через $\{\cdot\}$ обозначена дробная часть вещественного числа. Как известно [4, 5], отображение (1.20), (1.21) минимально в том и только в том случае, когда величины 2π, Δ_1, Δ_2, $\ldots$, Δ_m линейно независимы над полем рациональных чисел.

В случае бесконечномерного тора $\mathbb{T}^\infty$ пока не удалось получить каких-либо достаточных условий, гарантирующих наличие у сдвига (1.17) свойства минимальности. Не очевидно даже, реализуется ли это свойство в принципе. Установлены только некоторые достаточные условия отсутствия минимальности у сдвигового отображения на торе $\mathbb{T}^\infty = \ell_p/2\pi\mathbb{Z}^\infty$, где $p \geqslant 1$, $\mathbb{Z}^\infty$ – решётка (1.3), и доказано отсутствие минимальности на торе $\mathbb{T}^\infty = E/2\pi\mathbb{Z}^\infty$ в случае несепарабельного вещественного банахова пространства E.

Обратимся сначала к тору $\mathbb{T}^\infty = \ell_p/2\pi\mathbb{Z}^\infty$, считая, что его фундаментальная область $\mathscr{U}$ задана равенством (1.14). Далее для произвольного сдвигового отображения (1.17) на торе $\mathbb{T}^\infty$ введём в рассмотрение вектор сдвига

$$\gamma = \mathrm{colon}\,(\gamma_{(1)}, \gamma_{(2)}, \ldots, \gamma_{(s)}, \ldots) \in \mathscr{U}, \quad \gamma = \mathrm{pr}^{-1}(\Delta). \tag{1.22}$$

Первые два наших результата формулируются в терминах компонент $\gamma_{(s)}$, $s \geqslant 1$, вектора (1.22).

Теорема 1.1. *Предположим, что при некоторых натуральных числах* m, $n_1 < n_2 < \ldots \ldots < n_m$ *и целых* k_0, k_1, $\ldots$, k_m $(|k_0| + |k_1| + \ldots + |k_m| > 0)$ *имеет место равенство*

$$2\pi k_0 + k_1\gamma_{(n_1)} + k_2\gamma_{(n_2)} + \ldots + k_m\gamma_{(n_m)} = 0. \tag{1.23}$$

Тогда соответствующее отображение сдвига (1.17) не является минимальным на торе $\mathbb{T}^\infty$.

Как уже отмечалось выше, аналог сформулированной теоремы справедлив и в конечномерном случае, т.е. для отображения (1.20), а именно при выполнении аналогичного (1.23) равенства

$$2\pi k_0 + k_1\Delta_1 + k_2\Delta_2 + \ldots + k_m\Delta_m = 0,$$

где $|k_0| + |k_1| + \ldots + |k_m| > 0$, оно не обладает свойством минимальности. Казалось бы, если, наоборот, потребовать отсутствия между компонентами вектора (1.22) всевозможных нетривиальных соотношений вида (1.23), то по аналогии с конечномерной ситуацией отображение сдвига (1.17) будет минимальным. Но, как показывает следующая теорема, данный факт не верен.

Теорема 1.2. *Предположим, что компоненты* $\gamma_{(s)}$ *вектора (1.22) удовлетворяют условиям*

$$\gamma_{(s)} \neq 0 \quad \text{для любого}\ \ s \geqslant 1, \quad R_* \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sup_{k\geqslant 1} \frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}} < \infty, \tag{1.24}$$

где $\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots > \lambda_k > \ldots$ *– все занумерованные в порядке убывания попарно различные значения, принимаемые последовательностью* $|\gamma_{(s)}|$, $s \geqslant 1$. *Тогда* ω*-предельное и* α*-предельное множества любой траектории (1.19) отображения (1.17) являются пустыми.*

Обратим внимание на следующее обстоятельство: в рамках теоремы 1.2 оператор сдвига (1.17) заведомо не минимален. Связано это с тем, что в данном случае любая его траектория (1.19) представляет собой непустое замкнутое инвариантное множество, отличное от $\mathbb{T}^\infty$. Таким образом, даже отсутствие всех резонансных соотношений (1.23) не гарантирует минимальности.

Заключительный результат касается сдвигового отображения (1.17) на торе $\mathbb{T}^\infty = E/2\pi\mathbb{Z}^\infty$, где E – несепарабельное вещественное банахово пространство.

Теорема 1.3. *Предположим, что исходное банахово пространство* E *несепарабельно. Тогда при любом* $\Delta \in \mathbb{T}^\infty$ *отображение сдвига (1.17) не является минимальным на торе* $\mathbb{T}^\infty$.

Отметим, что в рамках теоремы 1.3 свойство минимальности отсутствует у любого гомеоморфизма $f : \mathbb{T}^\infty \to \mathbb{T}^\infty$. Причина заключается в том, что (как будет показано ниже) из несепарабельности пространства E вытекает и несепарабельность метрического пространства $(\mathbb{T}^\infty, \rho)$. Тем самым тор $\mathbb{T}^\infty$ заведомо не может содержать ни одной всюду плотной траектории $\varphi_n = f^n(\varphi_0)$, $\varphi_0 \in \mathbb{T}^\infty$, $n \in \mathbb{Z}$.

2. Обоснование результатов.

2.1. Доказательство теоремы 1.1. Предположим, что найдутся такие натуральные m, $n_1 < n_2 < \ldots < n_m$ и целые числа k_0, k_1, $\ldots$, k_m такие, что $|k_0| + |k_1| + \ldots + |k_m| > 0$, для которых справедливо равенство (1.23). Тогда введём в рассмотрение непрерывный линейный функционал $f : \ell_p \to \mathbb{R}$, действующий на любой вектор (1.2) по правилу

$$f(\varphi) = k_1\varphi_{(n_1)} + k_2\varphi_{(n_2)} + \ldots + k_m\varphi_{(n_m)}. \tag{2.1}$$

Отметим сразу, что этот функционал нетривиален, поскольку соотношение (1.23) не может выполняться в случае $k_0 \neq 0$, $k_1 = k_2 = \ldots = k_m = 0$. Далее обозначим через $\mathbb{T}$ окружность $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ и рассмотрим отображение $F : \mathbb{T}^\infty \to \mathbb{T}$, действующее по правилу

$$F : \varphi \mapsto f(\mathrm{pr}^{-1}(\varphi)) (\mathrm{mod}\ 2\pi), \tag{2.2}$$

где $\varphi \in \mathbb{T}^\infty$, f – функционал (2.1), $*(\mathrm{mod}\ 2\pi)$ – операция (1.21) (поскольку всюду ниже мы отождествляем $\mathbb{T}$ с полуинтервалом $(-\pi, \pi]$, то эта операция задаёт естественную проекцию из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{T}$). Подчеркнём, что в силу очевидного свойства

$$f(2\pi l) = 0 (\mathrm{mod}\ 2\pi) \quad \text{для любого} \quad l \in \mathbb{Z}^\infty$$

отображение (2.2) определено корректно, т.е. не зависит от конкретного выбора прообраза $\mathrm{pr}^{-1}(\varphi) \in \ell_p$. Добавим ещё, что из формул (1.11), (1.18) и равенства (1.23) вытекают свойства

$$F(m_1\varphi_1 + m_2\varphi_2) = m_1F(\varphi_1) + m_2F(\varphi_2) \quad \text{для любых} \quad \varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{T}^\infty, \quad m_1, m_2 \in \mathbb{Z};$$

$$F(\mathrm{pr}\,(\gamma)) = 0, \tag{2.3}$$

где в зависимости от контекста “$+$” – операция сложения классов эквивалентности из $\ell_p/2\pi\mathbb{Z}^\infty$ или из $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, а символ “ 0 ” – нейтральный элемент по отношению к операции сложения в $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Кроме того, отображение (2.2) очевидным образом непрерывно.

Рассмотрим теперь подмножество $\Sigma \subset \mathbb{T}^\infty$, заданное равенством

$$\Sigma = \{\varphi \in \mathbb{T}^\infty : F(\varphi) = 0\}. \tag{2.4}$$

Объединяя соотношения (2.2), (2.3) с очевидными формулами

$$G_\Delta(\varphi) = \varphi + \mathrm{pr}\,(\gamma), \quad G_\Delta^{-1}(\varphi) = \varphi - \mathrm{pr}\,(\gamma) \quad \text{для любого} \quad \varphi \in \mathbb{T}^\infty, \tag{2.5}$$

нетрудно убедиться в том, что, во-первых, множество (2.4) не пусто (поскольку Σ всегда содержит нулевой класс эквивалентности из $\mathbb{T}^\infty$), замкнуто (в силу непрерывности F) и не совпадает со всем тором $\mathbb{T}^\infty$ (в силу нетривиальности функционала (2.1)); во-вторых, имеем $G_\Delta(\Sigma) = \Sigma$. Тем самым Σ представляет собой собственное замкнутое инвариантное множество оператора G_Δ, а значит, последний не является минимальным на торе $\mathbb{T}^\infty$. Теорема 1.1 доказана.

2.2. Доказательство теоремы 1.2. Прежде чем приступить непосредственно к обоснованию теоремы 1.2, установим в случае тора $\mathbb{T}^\infty = \ell_p/2\pi\mathbb{Z}^\infty$ некоторое специальное представление для метрики (1.12). В связи с этим для любых двух элементов $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{T}^\infty$ положим

$$\theta_k = \mathrm{pr}^{-1}(\varphi_k) \in \mathscr{U}, \quad \theta_k = \mathrm{colon}\,(\theta^k_{(1)}, \theta^k_{(2)}, \ldots, \theta^k_{(s)}, \ldots), \quad k = 1, 2, \tag{2.6}$$

где $\mathscr{U}$ – фундаментальная область (1.14). Справедливо следующее утверждение.

Лемма 2.1. *Имеет место равенство*

$$\rho(\varphi_1,\varphi_2)=\Bigl(\sum_{s=1}^{\infty}\min_{l_{(s)}\in\mathbb{Z}}|\theta^1_{(s)}-\theta^2_{(s)}+2\pi l_{(s)}|^p\Bigr)^{1/p}. \tag{2.7}$$

Кроме того, в случае

$$|\theta^1_{(s)}-\theta^2_{(s)}|<\pi \tag{2.8}$$

соответствующий минимум из (2.7) достигается только при $l_{(s)}=0$.

Доказательство. Прежде всего отметим, что поскольку при каждом $s\geqslant 1$ справедливо предельное соотношение

$$|\theta^1_{(s)}-\theta^2_{(s)}+2\pi l_{(s)}|\to+\infty\quad\text{при}\quad |l_{(s)}|\to+\infty,$$

то фигурирующие в (2.7) минимумы заведомо достигаются при некоторых

$$l_{(s)}=l^0_{(s)}\in\mathbb{Z},\quad s\geqslant 1. \tag{2.9}$$

Далее в случае (2.8) в силу очевидных неравенств

$$|\theta^1_{(s)}-\theta^2_{(s)}+2\pi l_{(s)}|\geqslant 2\pi-|\theta^1_{(s)}-\theta^2_{(s)}|\quad\text{при любых}\ \ l_{(s)}\in\mathbb{Z},\quad l_{(s)}\neq 0,\quad s\geqslant 1,$$

с необходимостью имеем $l^0_{(s)}=0$. Что же касается условия (2.8), то согласно включениям $\theta_k\in\ell_p$, $k=1,2$, и вытекающим из них предельным равенствам

$$\lim_{s\to+\infty}\theta^k_{(s)}=0,\quad k=1,2,$$

оно заведомо выполняется для всех достаточно больших номеров s. Тем самым минимизирующий вектор

$$l_0=\operatorname{colon}(l^0_{(1)},l^0_{(2)},\ldots,l^0_{(s)},\ldots)$$

с компонентами (2.9) автоматически принадлежит целочисленной решётке (1.3).

Суммируя проделанные построения, приходим к выводу, что

$$\Bigl(\sum_{s=1}^{\infty}\min_{l_{(s)}\in\mathbb{Z}}|\theta^1_{(s)}-\theta^2_{(s)}+2\pi l_{(s)}|^p\Bigr)^{1/p}=\|\theta_1-\theta_2+2\pi l_0\|,$$

где, напомним, $\|\cdot\|$ – норма в ℓ_p. А отсюда и из (1.12), (2.6), в свою очередь, следует, что

$$\rho(\varphi_1,\varphi_2)\leqslant\Bigl(\sum_{s=1}^{\infty}\min_{l_{(s)}\in\mathbb{Z}}|\theta^1_{(s)}-\theta^2_{(s)}+2\pi l_{(s)}|^p\Bigr)^{1/p}. \tag{2.10}$$

Противоположное (2.10) нестрогое неравенство получается из очевидной оценки

$$\Bigl(\sum_{s=1}^{\infty}\min_{l_{(s)}\in\mathbb{Z}}|\theta^1_{(s)}-\theta^2_{(s)}+2\pi l_{(s)}|^p\Bigr)^{1/p}\leqslant\|\theta_1-\theta_2+2\pi l\|\quad\text{для любого}\ \ l\in\mathbb{Z}^\infty$$

при переходе к инфимуму по $l\in\mathbb{Z}^\infty$. Лемма 2.1 доказана.

Обратимся теперь к произвольной траектории (1.19) отображения (1.17) и обозначим через A и B её ω-предельное и α-предельное множества соответственно. Далее, пусть A_0 и B_0 – аналогичные множества для случая $\varphi_0=0$ (“ 0 ” – нулевой класс эквивалентности из $\mathbb{T}^\infty$). Тогда, принимая во внимание вытекающее из (1.12) равенство

$$\rho(\varphi_1+\varphi_0,\varphi_2+\varphi_0)=\rho(\varphi_1,\varphi_2)\quad\text{при любых}\ \ \varphi_0,\varphi_1,\varphi_2\in\mathbb{T}^\infty,$$

имеем
$$A = \varphi_0 + A_0 = \{\varphi_0 + a_0 : a_0 \in A_0\}, \quad B = \varphi_0 + B_0 = \{\varphi_0 + b_0 : b_0 \in B_0\}.$$
Тем самым для обоснования теоремы 1.2 достаточно убедиться в пустоте множеств A_0 и B_0, а так как очевидным образом $B_0 = -A_0 = \{-a_0 : a_0 \in A_0\}$, то достаточно показать, что $A_0 = \varnothing$.

Согласно равенствам (1.18), (1.19), (2.5) интересующая нас проблема сводится к доказательству отсутствия предельных точек у последовательности
$$\varphi_n = \mathrm{pr}\,(n\gamma) \in \mathbb{T}^\infty, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2.11}$$
В связи с этим сделаем два допущения, которые не ограничивают общности рассуждений, но упрощают последующий анализ.

Первое допущение заключается в условии положительности
$$\gamma_{(s)} > 0 \quad \text{при каждом} \quad s \geqslant 1. \tag{2.12}$$
Для того чтобы добиться его справедливости, рассмотрим линейный ограниченный оператор $\Lambda_1 : \ell_p \to \ell_p$, действующий на любой вектор φ из (1.2) по правилу:
$$\Lambda_1\varphi = \mathrm{colon}\,((-1)^{r_1}\varphi_{(1)}, (-1)^{r_2}\varphi_{(2)}, \ldots, (-1)^{r_s}\varphi_{(s)}, \ldots), \tag{2.13}$$
где
$$r_s = \begin{cases} 0 & \text{при } \gamma_{(s)} > 0, \\ 1 & \text{при } \gamma_{(s)} < 0, \end{cases} \tag{2.14}$$
а $\gamma_{(s)}$ – компоненты вектора (1.22) (в силу условий (1.24) случай $\gamma_{(s)} = 0$ в (2.14) исключён). Заметим далее, что поскольку справедливо свойство инвариантности $\Lambda_1\mathbb{Z}^\infty = \mathbb{Z}^\infty$, то оператор (2.13), (2.14) порождает отображение $L_1 : \mathbb{T}^\infty \to \mathbb{T}^\infty$, корректно определённое формулой
$$L_1 : \varphi \mapsto \mathrm{pr}\,[\Lambda_1 \mathrm{pr}^{-1}(\varphi)] \tag{2.15}$$
и являющееся гомеоморфизмом тора $\mathbb{T}^\infty$. Это обстоятельство позволяет перейти от последовательности (2.11) к новой последовательности $\overline{\varphi}_n = L_1\varphi_n$, $n \geqslant 1$. Согласно (2.11), (2.13)–(2.15) элементы указанной последовательности имеют вид
$$\overline{\varphi}_n = \mathrm{pr}\,(n\overline{\gamma}), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{2.16}$$
где
$$\overline{\gamma} = \mathrm{colon}\,(\overline{\gamma}_{(1)}, \overline{\gamma}_{(2)}, \ldots, \overline{\gamma}_{(s)}, \ldots) = \Lambda_1\gamma \in \mathscr{U}. \tag{2.17}$$
Так как в силу (2.13), (2.14) компоненты вектора (2.17) удовлетворяют оценкам $\overline{\gamma}_{(s)} > 0$, $s \geqslant 1$, то, заменяя в (2.16) $\overline{\gamma}$ на γ, $\overline{\varphi}_n$ на φ_n, приходим к требуемому случаю (2.11), (2.12).

Второе допущение, которое также не ограничивает общности, состоит в условии монотонности
$$\gamma_{(s)} \geqslant \gamma_{(s+1)} \quad \text{при любом} \quad s \geqslant 1. \tag{2.18}$$
Для того чтобы обеспечить его выполнение, предпримем некоторые дополнительные построения.

Будем считать, что неравенства (2.12) уже имеют место. Далее, поскольку $\gamma_{(s)} \to 0$ при $s \to +\infty$, все принимаемые последовательностью $\gamma_{(s)}$, $s \geqslant 1$, попарно различные значения образуют строго монотонную последовательность
$$\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots > \lambda_k > \ldots, \quad \lambda_k \to 0 \quad \text{при} \quad k \to +\infty. \tag{2.19}$$
Очевидно, что величины λ_k, $k \geqslant 1$, из (2.19) те же, что и в (1.24).

Пусть последовательность $\gamma_{(s)}$, $s \geqslant 1$, любое своё значение λ_k из (2.19) принимает только на номерах $n_1^k < n_2^k < \ldots < n_{r_k}^k$, $r_k \geqslant 1$, т.е. при каждом $k \geqslant 1$ имеем

$$\gamma_{(n_r^k)} = \lambda_k \quad \text{при} \quad r = \overline{1, r_k}, \quad \gamma_{(s)} \neq \lambda_k \quad \text{при} \quad s \notin \{n_1^k, n_2^k, \ldots, n_{r_k}^k\}.$$

Учитывая это обстоятельство, введём в рассмотрение аналогичный (2.13) линейный ограниченный оператор $\Lambda_2 : \ell_p \to \ell_p$, действующий на векторы φ из (1.2) по правилу

$$\Lambda_2\varphi = \operatorname{colon}(\varphi_{(n_1^1)}, \varphi_{(n_2^1)}, \ldots, \varphi_{(n_{r_1}^1)}, \varphi_{(n_1^2)}, \varphi_{(n_2^2)}, \ldots, \varphi_{(n_{r_2}^2)}, \ldots, \varphi_{(n_1^k)}, \varphi_{(n_2^k)}, \ldots, \varphi_{(n_{r_k}^k)}, \ldots). \quad (2.20)$$

Как и в предыдущем случае, оператор (2.20) обладает свойством инвариантности $\Lambda_2\mathbb{Z}^\infty = \mathbb{Z}^\infty$ и порождает на торе $\mathbb{T}^\infty$ соответствующий гомеоморфизм

$$L_2 : \varphi \mapsto \operatorname{pr}[\Lambda_2 \operatorname{pr}^{-1}(\varphi)].$$

Таким образом, полагая

$$\overline{\varphi}_n = L_2\varphi_n, \quad n \geqslant 1, \quad \overline{\gamma} = \operatorname{colon}(\overline{\gamma}_{(1)}, \overline{\gamma}_{(2)}, \ldots, \overline{\gamma}_{(s)}, \ldots) = \Lambda_2\gamma \in \mathscr{U},$$

приходим к соотношениям (2.16). А поскольку по построению $\overline{\gamma}_{(s)} \geqslant \overline{\gamma}_{(s+1)}$ при всех $s \geqslant 1$, то после соответствующих переобозначений $\overline{\gamma} \to \gamma$, $\overline{\varphi}_n \to \varphi_n$ получаем последовательность (2.11) с вектором γ, удовлетворяющим требованиям (2.12), (2.18). Добавим ещё, что в силу условий (1.24) и неравенств (2.12), (2.18) справедлива формула

$$\sup_{s\geqslant 1} \frac{\gamma_{(s)}}{\gamma_{(s+1)}} = \sup_{k\geqslant 1} \frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}} = R_* < \infty. \quad (2.21)$$

Итак, теперь у нас есть всё необходимое для доказательства пустоты ω-предельного множества A_0 полутраектории (2.11). Само же доказательство проведём от противного.

Предположим, что существуют такой набор натуральных чисел $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$, $n_k \to +\infty$ при $k \to +\infty$, и такой элемент $\alpha \in \mathbb{T}^\infty$, что

$$\rho(\varphi_{n_k}, \alpha) \to 0, \quad k \to +\infty, \quad (2.22)$$

где ρ – метрика (1.12). Далее рассмотрим векторы

$$\operatorname{pr}^{-1}(\varphi_{n_k}) = \theta_k = \operatorname{colon}(\theta_{(1)}^k, \theta_{(2)}^k, \ldots, \theta_{(s)}^k, \ldots) \in \mathscr{U},$$

$$\operatorname{pr}^{-1}(\alpha) = \beta = \operatorname{colon}(\beta_{(1)}, \beta_{(2)}, \ldots, \beta_{(s)}, \ldots) \in \mathscr{U}, \quad (2.23)$$

где, как и ранее, $\mathscr{U}$ – множество (1.14). Нетрудно увидеть, что для компонент $\theta_{(s)}^k$ из (2.23) имеют место равенства

$$\theta_{(s)}^k = n_k\gamma_{(s)} (\operatorname{mod} 2\pi), \quad \theta_{(s)}^k = n_k\gamma_{(s)} \quad \text{при} \quad n_k\gamma_{(s)} \leqslant \pi, \quad (2.24)$$

где, напомним ещё раз, $*(\operatorname{mod} 2\pi)$ – операция (1.21).

Зафиксируем две постоянные z_1, z_2, удовлетворяющие требованиям

$$0 < z_1 < z_2 < \pi/2, \quad z_2/z_1 > R_*, \quad (2.25)$$

где R_* – величина из (1.24), (2.21), и рассмотрим серию отрезков

$$I_s = [z_1/\gamma_{(s)}, z_2/\gamma_{(s)}], \quad s \geqslant 1. \quad (2.26)$$

Заметим далее, что в силу соотношений (2.18), (2.21), (2.25) справедливы неравенства

$$\frac{z_1}{\gamma_{(s)}} \leqslant \frac{z_1}{\gamma_{(s+1)}} < \frac{z_2}{\gamma_{(s)}} \leqslant \frac{z_2}{\gamma_{(s+1)}}, \quad s \geqslant 1.$$

В свою очередь, из приведённых неравенств вытекает, что отрезки (2.26) с номерами s и $s+1$ имеют непустое пересечение, а значит,

$$[z_1/\gamma_{(1)}, +\infty) = \bigcup_{s=1}^{\infty} I_s. \tag{2.27}$$

На завершающей стадии доказательства выберем такое достаточно большое $k_* \in \mathbb{N}$, чтобы при всех $k \geqslant k_*$ выполнялось условие $n_k \geqslant z_1/\gamma_{(1)}$. В этом случае в силу равенства (2.27) при каждом $k \geqslant k_*$ существует такой номер $s = s_k$, $s_k \to +\infty$ при $k \to +\infty$, что $n_k \in I_{s_k}$ или, что то же самое,

$$z_1 \leqslant n_k \gamma_{(s_k)} \leqslant z_2 \quad \text{при любом } \ k \geqslant k_*. \tag{2.28}$$

Заметим ещё, что поскольку $\beta_{(s_k)} \to 0$ при $k \to +\infty$, то без ограничения общности можно считать выполненными неравенства

$$|\beta_{(s_k)}| < \pi/2, \quad k \geqslant k_*. \tag{2.29}$$

Объединяя соотношения (2.24), (2.25), (2.28), (2.29), приходим к выводу, что при всех номерах $k \geqslant k_*$

$$\theta^k_{(s_k)} = n_k \gamma_{(s_k)}, \quad |n_k \gamma_{(s_k)} - \beta_{(s_k)}| < \pi,$$

т.е. выполняется условие вида (2.8). Тем самым в силу (2.7), (2.22) имеем

$$|n_k \gamma_{(s_k)} - \beta_{(s_k)}| \leqslant \rho(\varphi_{n_k}, \alpha) = \Bigg(|n_k \gamma_{(s_k)} - \beta_{(s_k)}|^p + \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq s_k}}^{\infty} \min_{l_{(s)} \in \mathbb{Z}} |\theta^k_{(s)} - \beta_{(s)} + 2\pi l_{(s)}|^p\Bigg)^{1/p} \to 0$$

при $k \to +\infty$. Остаётся добавить, что отсюда с учётом уже упоминавшегося выше свойства $\beta_{(s_k)} \to 0$ при $k \to +\infty$ автоматически следует, что и $n_k \gamma_{(s_k)} \to 0$, $k \to +\infty$. Последнее же противоречит оценкам (2.28).

Итак, наше допущение о существовании у последовательности (2.11) частичного предела $\alpha \in \mathbb{T}^\infty$ не верно, а значит, $A_0 = \varnothing$. Теорема 1.2 доказана.

2.3. Доказательство теоремы 1.3. Как уже было отмечено в п. 1.2, справедливость теоремы 1.3 вытекает из следующего утверждения.

Лемма 2.2. *Пусть E – несепарабельное вещественное банахово пространство. Тогда метрическое пространство $(\mathbb{T}^\infty, \rho)$, где $\mathbb{T}^\infty = E/2\pi\mathbb{Z}^\infty$, ρ – метрика (1.12), также является несепарабельным.*

Доказательство. Как известно, для того чтобы установить несепарабельность метрического пространства X достаточно для некоторого $\varepsilon > 0$ построить в нём несчётную ε-цепь. В связи с этим напомним, что *ε-цепью* называется подмножество $\mathscr{A} \subset X$ такое, что $\rho(a_1, a_2) \geqslant \varepsilon$ при всех $a_1, a_2 \in \mathscr{A}$, $a_1 \neq a_2$.

Обратимся сначала к исходному пространству E и покажем существование хотя бы одного такого $\varepsilon_0 > 0$, что шар

$$B(0, \varepsilon_0) = \{x \in E : \|x\| \leqslant \varepsilon_0\} \tag{2.30}$$

представляет собой несепарабельное метрическое пространство (с метрикой, порождённой нормой $\|\cdot\|$ из E). В предположении противного в каждом шаре вида $B(0, n) \subset E$, $n \in \mathbb{N}$, найдётся счётное всюду плотное множество Γ_n, а их объединение $\Gamma = \bigcup_{n \geqslant 1} \Gamma_n$ будет всюду плотным в E. Последнее же противоречит предполагаемой несепарабельности пространства E. Тем самым требуемое ε_0 действительно существует. Впрочем, в силу подобия несепарабельным будет шар (2.30) любого радиуса.

Итак, зафиксируем произвольно шар (2.30) и заметим, что поскольку он несепарабелен, то в нём найдётся несчётная ε_1-цепь C при некотором $\varepsilon_1 > 0$. Что же касается метрического пространства $(\mathbb{T}^\infty, \rho)$, то (как будет показано ниже) в нём в качестве требуемой несчётной цепи можно взять множество

$$\mathscr{A} = \{\mathrm{pr}\,(\varepsilon_2 \mathrm{c}) : \mathrm{c} \in \mathrm{C}\} \subset \mathbb{T}^\infty, \tag{2.31}$$

в котором константа $\varepsilon_2 > 0$ выбрана из условия $2\varepsilon_0\varepsilon_2 < \pi\mu_0$, где μ_0 – постоянная (1.1).

Действительно, поскольку для любых $\mathrm{c}_1, \mathrm{c}_2 \in \mathrm{C}$, $\mathrm{c}_1 \neq \mathrm{c}_2$, выполняются неравенства

$$\|\varepsilon_2(\mathrm{c}_1 - \mathrm{c}_2)\| \leqslant 2\varepsilon_0\varepsilon_2 < \pi\mu_0,$$

то в силу (1.13) и того факта, что C является ε_1-цепью, справедлива оценка

$$\rho(\mathrm{pr}\,(\varepsilon_2\mathrm{c}_1), \mathrm{pr}\,(\varepsilon_2\mathrm{c}_2)) = \|\varepsilon_2(\mathrm{c}_1 - \mathrm{c}_2)\| \geqslant \varepsilon_1\varepsilon_2. \tag{2.32}$$

Следовательно, множество (2.31) представляет собой ε-цепь в пространстве $(\mathbb{T}^\infty, \rho)$ при $\varepsilon = \varepsilon_1\varepsilon_2$. Добавим ещё, что эта ε-цепь несчётна, поскольку согласно (2.31), (2.32) между элементами множеств $\mathscr{A}$ и C имеет место взаимно однозначное соответствие. Лемма 2.2 доказана.

2.4. Заключение. Подводя итог, отметим, что нами получены три варианта достаточных условий отсутствия у оператора сдвига на торе $\mathbb{T}^\infty$ свойства минимальности, причём два из них не имеют аналогов в конечномерном случае. Однако остался нерешённым вопрос о принципиальной реализуемости указанного свойства для сдвига на $\mathbb{T}^\infty$. Иными словами, проблема заключается либо в получении для отображения (1.17) на торе $\mathbb{T}^\infty$ достаточных условий минимальности, либо в доказательстве отсутствия минимальности у любого оператора сдвига на $\mathbb{T}^\infty$. Какая из этих альтернатив реализуется, пока не очевидно.

Для того чтобы подчеркнуть новизну поставленной проблемы, обратимся к тору $\widetilde{\mathbb{T}}^\infty$, понимаемому как прямое произведение счётного числа окружностей $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ с тихоновской топологией (см. [16, 23–25]). Его элементами являются бесконечномерные векторы вида

$$\widetilde{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m, \ldots), \quad \varphi_m \in \mathbb{T}, \quad m \geqslant 1,$$

а метрика на $\widetilde{\mathbb{T}}^\infty$ вводится по следующему правилу.

Сначала для любых двух элементов $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{T}$ определяем расстояние между ними по аналогичной (1.12) формуле

$$d(\varphi_1, \varphi_2) = \min_{l \in \mathbb{Z}} |\theta_1 - \theta_2 + 2\pi l|,$$

где $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$ такие, что $\varphi_k = \theta_k (\mathrm{mod}\ 2\pi)$, $k = 1, 2$. После этого для любых двух элементов

$$\widetilde{\varphi}^k = (\varphi_1^k, \varphi_2^k, \ldots, \varphi_m^k, \ldots), \quad \varphi_m^k \in \mathbb{T}, \quad k = 1, 2, \quad m \geqslant 1,$$

из $\widetilde{\mathbb{T}}^\infty$ полагаем

$$\rho(\widetilde{\varphi}^1, \widetilde{\varphi}^2) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m} \frac{d(\varphi_m^1, \varphi_m^2)}{1 + d(\varphi_m^1, \varphi_m^2)}. \tag{2.33}$$

Очевидно, что тор $\widetilde{\mathbb{T}}^\infty$, снабжённый метрикой (2.33), является компактным метрическим пространством.

Рассмотрим теперь произвольное отображение сдвига на торе $\widetilde{\mathbb{T}}^\infty$, имеющее в канонических координатах $x_{(1)}$, $x_{(2)}$, $\ldots$, $x_{(s)}$, $\ldots$, $-\pi < x_{(s)} \leqslant \pi$, $s \geqslant 1$, вид

$$x_{(s)} \mapsto x_{(s)} + \gamma_{(s)} (\mathrm{mod}\ 2\pi), \tag{2.34}$$

где $\gamma_{(s)} \in (-\pi, \pi]$, $s \geqslant 1$. Справедливо следующее утверждение.

Лемма 2.3. *Отображение (2.34) является минимальным на торе* $\widetilde{\mathbb{T}}^\infty$ *тогда и только тогда, когда между компонентами сдвига* $\gamma_{(s)} \in (-\pi, \pi]$, $s \geqslant 1$, *отсутствуют всевозможные резонансные соотношения вида (1.23).*

Сформулированный результат вытекает из аналогичного конечномерного результата и из свойства “равномерной малости хвостов” у метрики (2.33). Последнее означает существование для любого $\varepsilon > 0$ такого (зависящего только от ε) натурального m_*, что

$$\sum_{m=m_*+1}^{\infty} \frac{1}{2^m} \frac{d(\varphi_m^1, \varphi_m^2)}{1 + d(\varphi_m^1, \varphi_m^2)} < \varepsilon \quad \text{при всех} \ \ \widetilde{\varphi}^1, \widetilde{\varphi}^2 \in \widetilde{\mathbb{T}}^\infty.$$

В случае же тора $\mathbb{T}^\infty = \ell_p/2\pi\mathbb{Z}^\infty$ с метрикой (1.12) соответствующие хвосты (остатки рядов из (2.7)) не являются равномерно малыми по $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{T}^\infty$. Именно по этой причине при замене $\widetilde{\mathbb{T}}^\infty$ на $\mathbb{T}^\infty$ утверждение леммы 2.3 не верно (см. теорему 1.2).

Также обсудим теоремы 1.1 и 1.2 на предмет их возможного обобщения. В связи с этим обратим внимание на обстоятельство, что утверждения данных теорем сохраняются при замене пространства ℓ_p на c (см. (1.7), (1.8)) и соответствующего тора $\mathbb{T}^\infty = \ell_p/2\pi\mathbb{Z}^\infty$ на тор $\mathbb{T}^\infty = c/2\pi\mathbb{Z}^\infty$, где $\mathbb{Z}^\infty$ – целочисленная решётка (1.9).

Действительно, доказательство теоремы 1.1 в указанном случае сохраняется дословно, а при обосновании для c теоремы 1.2 используется аналогичное (2.7) представление

$$\rho(\varphi_1, \varphi_2) = \max_{s \geqslant 1}\Bigl(\min_{l_{(s)} \in \mathbb{Z}} |\theta^1_{(s)} - \theta^2_{(s)} + 2\pi l_{(s)}|\Bigr), \quad \varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{T}^\infty,$$

где $\theta_k = \mathrm{pr}^{-1}(\varphi_k) \in \mathscr{U}$, $\theta_k = \mathrm{colon}\,(\theta^k_{(1)}, \theta^k_{(2)}, \ldots, \theta^k_{(s)}, \ldots)$, $k = 1, 2$, $\mathscr{U}$ – множество (1.16).

Интересно также отметить, что аналог теоремы 1.1 можно получить и для абстрактного бесконечномерного банахова пространства E. Точнее говоря, имеет место следующее утверждение.

Лемма 2.4. *Предположим, что существует такой непрерывный и нетривиальный линейный функционал* $f : E \to \mathbb{R}$, *что*

$$f(2\pi l) = 0 (\mathrm{mod}\ 2\pi) \quad \text{для любого } l \in \mathbb{Z}^\infty, \quad f(\mathrm{pr}^{-1}(\Delta)) = 0 (\mathrm{mod}\ 2\pi),$$

где Δ *– элемент сдвига из (1.17). Тогда оператор (1.17) не является минимальным на торе* $\mathbb{T}^\infty = E/2\pi\mathbb{Z}^\infty$.

Справедливость сформулированной леммы вытекает из того факта, что и здесь множество вида (2.4), где F – оператор (2.2), оказывается инвариантным для отображения сдвига G_Δ.

Перейдём далее к теореме 1.2. Нетрудно увидеть, что фигурирующие в ней условия (1.24) заведомо справедливы для вектора сдвига (1.22) с компонентами

$$\gamma_{(s)} = 1/s^\delta, \quad \delta = \mathrm{const} > 1/p, \quad s \geqslant 1 \quad \text{или} \quad \gamma_{(s)} = q^s, \quad q = \mathrm{const} \in (0, 1), \quad s \geqslant 1,$$

поскольку в обоих случаях $\lambda_k = \gamma_{(k)}$, $k \geqslant 1$, и конечна величина R_* (см. (2.21)). Если же, например, $\gamma_{(s)} = \exp(-s^2)$, $s \geqslant 1$, то по-прежнему $\lambda_k = \gamma_{(k)}$, $k \geqslant 1$, но $R_* = +\infty$, а значит, результаты теоремы 1.2 здесь не применимы. В связи с этим естественным образом возникает вопрос о том, каковым будет множество частичных пределов последовательности (2.11) в случае, когда для компонент $\gamma_{(s)}$, $s \geqslant 1$, вектора γ выполняются требования (2.12), (2.18), а вместо (2.21) имеем

$$\sup_{s \geqslant 1} \frac{\gamma_{(s)}}{\gamma_{(s+1)}} = +\infty.$$

Обозначенная проблема пока не решена.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 21-71-30011).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Смейл С.* Дифференцируемые динамические системы // Успехи мат. наук. 1970. Т. 25. Вып. 1 (151). С. 113–185.
2. *Аносов Д.В., Солодов В.В.* Гиперболические множества // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. проблемы математики. Фунд. направления. М., 1991. Т. 66. С. 12–99.
3. *Аносов Д.В.* Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны // Тр. Мат. ин-та имени В.А. Стеклова. 1967. Т. 90. С. 3–210.
4. *Каток А.Б., Хассельблат Б.* Введение в современную теорию динамических систем. М., 1999.
5. *Каток А.Б., Хассельблат Б.* Введение в теорию динамических систем с обзором последних достижений. М., 2005.

6. *Пилюгин С.Ю.* Пространства динамических систем. М.; Ижевск, 2008.
7. *Гринес В.З., Починка О.В.* Введение в топологическую классификацию каскадов на многообразиях размерности два или три. М.; Ижевск, 2011.
8. *Grines V., Zhuzhoma E.* Surface Laminations and Chaotic Dynamical Systems. M.; Izhevsk, 2021.
9. *Палис Ж., ди Мелу В.* Геометрическая теория динамических систем. Введение. М., 1986.
10. *Песин Я.Б.* Лекции по теории частичной гиперболичности и устойчивой эргодичности. М., 2006.
11. *Robinson C.* Dynamical Systems. Stability, Symbolic Dynamics, and Chaos. Boca Raton, 1999.
12. *Palis J., Takens F.* Hyperbolicity and Sensitive Chaotic Dynamics at Homoclinic Bifurcations. Cambridge, 1993.
13. *Ruelle D.* Large volume limit of the distribution of characteristic exponents in turbulence // Commun. Math. Phys. 1982. V. 87. P. 287–302.
14. *Mãné R.* Ergodic Theory and Differentiable Dynamics. Berlin; Heidelberg, 1987.
15. *Thieullen P.* Entropy and the Hausdorff dimension for infinite-dimensional dynamical systems // J. of Dynamics and Differ. Equat. 1992. V. 4. № 1. P. 127–159.
16. *Hastings H.M.* On expansive homeomorphisms of the infinite torus // The Structure of Attractors in Dynamical Systems. Lecture Notes in Math. Berlin; Heidelberg; New York, 1978. P. 142–149.
17. *Mãné R.* Expansive homeomorphisms and topological dimension // Trans. of Amer. Math. Soc. 1979. V. 252. P. 313–319.
18. *Глызин С.Д., Колесов А.Ю., Розов Н.Х.* Растягивающие эндоморфизмы на бесконечномерном торе // Функц. анализ и его приложения. 2020. Т. 54. № 4. С. 17–36.
19. *Глызин С.Д., Колесов А.Ю., Розов Н.Х.* Соленоидальные аттракторы диффеоморфизмов кольцевых множеств // Успехи мат. наук. 2020. Т. 75. Вып. 2 (452). С. 3–60.
20. *Глызин С.Д., Колесов А.Ю., Розов Н.Х.* Об одном классе диффеоморфизмов Аносова на бесконечномерном торе // Изв. РАН. Сер. мат. 2021. Т. 85. № 2. С. 3–59.
21. *Глызин С.Д., Колесов А.Ю.* Критерий гиперболичности одного класса диффеоморфизмов на бесконечномерном торе // Мат. сб. 2022. Т. 213. № 2. С. 50–95.
22. *Глызин С.Д., Колесов А.Ю.* Элементы гиперболической теории на бесконечномерном торе // Успехи мат. наук. 2022. Т. 77. Вып. 3 (465). С. 3–72.
23. *Jessen B.* The theory of integration in a space of an infinite number of dimensions // Acta Math. 1934. V. 63. P. 249–323.
24. *Платонов С.С.* О некоторых задачах теории приближения функций на бесконечномерном торе: аналоги теорем Джексона // Алгебра и анализ. 2014. Т. 26. № 6. С. 99–120.
25. *Kosz D.* On differentiation of integrals in the infinite-dimensional torus // Studia Math. 2021. V. 258. P. 103–119.

Ярославский государственный университет
имени П.Г. Демидова

Поступила в редакцию 12.03.2023 г.
После доработки 12.03.2023 г.
Принята к публикации 19.05.2023 г.