ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 7, с. 904–913

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.4

СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ КЛАССИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ ПЕРВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ НА ПЛОСКОСТИ

© 2023 г. А. Н. Коненков

Рассматривается первая краевая задача для равномерно-параболических систем второго порядка с одной пространственной переменной в ограниченных и полуограниченных областях с негладкими боковыми границами. Коэффициенты системы удовлетворяют условию Гёльдера и не зависят от временнòй переменной. Для непрерывных начальной и граничной функций устанавливается существование и единственность классического решения этой задачи.

DOI: 10.31857/S037406412307004X, EDN: GTUTXN

Введение. Для параболических систем однозначная разрешимость краевых задач в областях с гладкими боковыми границами в анизотропных пространствах Гёльдера установлена в работе [1]. В областях на плоскости с негладкими боковыми границами из класса Жевре $H^{(1+\alpha)/2}$, $0<\alpha<1$, для параболических систем с гёльдеровыми коэффициентами существование решения в анизотропном пространстве Гёльдера $H^{1+\alpha,(1+\alpha)/2}(\bar{\Omega})$ получено в статье [2]. Для систем с Дини-непрерывными коэффициентами в областях с боковой границей из класса Дини–Гёльдера $H^{1/2+\omega}$ первая и вторая краевые задачи рассматривались в [3, 4], здесь ω – модуль непрерывности, удовлетворяющий условию Дини. При соответствующей гладкости граничной функции доказано существование классических решений этих задач в пространстве $C^{1,0}_{x,t}(\bar{\Omega})$.

Единственность решения первой краевой задачи для параболического уравнения второго порядка следует из принципа максимума, а единственность решения второй краевой задачи выводится из теоремы о знаке косой производной, в доказательстве которой также используется принцип максимума. Для параболических систем принцип максимума, вообще говоря, не имеет места [5]. В пространстве $C^{1,0}_{x,t}(\bar{\Omega})$ единственность решений первой и второй краевых задач для параболических систем на плоскости в областях с негладкими боковыми границами из классов Жевре и Дини–Гёльдера установлена в работах [6–9].

Вопрос существования классического решения первой краевой задачи с непрерывной граничной функцией для параболического уравнения второго порядка с гёльдеровыми коэффициентами рассмотрен в монографии [10, гл. 3, § 4]. Отметим, что доказательство непрерывности этого решения вплоть до боковой границы области проводится методом барьеров, который основан на принципе максимума. В настоящей работе рассматривается первая краевая задача для параболических систем на плоскости в областях с боковыми границами, удовлетворяющими условию Жевре. Коэффициенты системы не зависят от временнòй переменной t и удовлетворяют условию Гёльдера. От граничной функции требуется только непрерывность. Устанавливается существование классического решения этой задачи и его единственность в классе $C(\bar{\Omega})\bigcap C^{2,1}_{x,t}(\Omega)$, где $C(\bar{\Omega})$ – пространство непрерывных и ограниченных функций в $\bar{\Omega}$.

Статья состоит из трёх пунктов. В п. 1 вводится потенциал, обладающий многими свойствами потенциала двойного слоя, но, в отличие от последнего, не требующий существования производной у старших коэффициентов параболической системы. Далее этот потенциал используется для доказательства существования решения и получения оценок для него. В пп. 2, 3 рассматривается первая краевая задача для ограниченной и полуограниченной областей соответственно.

Результаты настоящей работы анонсированы в [11].

1. Модифицированный потенциал двойного слоя. В полосе $D = \{(x,t) : x \in \mathbb{R}, 0 < t < T < \infty\}$ рассматривается параболическая система

$$Lu = \partial_t u - A(x)\partial_x^2 u - B(x)\partial_x u - C(x)u, \tag{1}$$

где $u = (u_1, \ldots, u_m)^{\text{т}}$, $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ – $m\times m$-матрицы с элементами $a_{ij}(x)$, $b_{ij}(x)$, $c_{ij}(x)$ соответственно. Для оператора L предполагаются выполненными условия:

а) равномерной параболичности, т.е. собственные значения $\lambda_k(x)$ матрицы $A(x)$ удовлетворяют неравенству $\operatorname{Re}\lambda_k(x) \geqslant \mu > 0$ для любых $x \in \mathbb{R}$;

б) коэффициенты a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} принадлежат пространству Гёльдера $H^\alpha(\mathbb{R})$, $0 < \alpha < 1$, с нормой

$$\|f\|_{H^\alpha(\mathbb{R})} = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| + \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}\\ \Delta x\neq 0}} \frac{|f(x+\Delta x) - f(x)|}{|\Delta x|^\alpha}.$$

Установим предварительно некоторые тождества для фундаментальных матриц решений параболических систем на плоскости с коэффициентами, не зависящими от переменной t.

Рассмотрим сначала случай, когда младшие члены отсутствуют, положив

$$L_0 = \partial_t - A(x)\partial_x^2.$$

Введём ещё оператор

$$\tilde{L}_0 = \partial_t - A^{\text{т}}(x)\partial_x^2$$

и обозначим фундаментальные матрицы решений операторов L_0 и $\tilde{L}_0$ через $\Gamma_0(x,\xi,t-\tau)$ и $\tilde{\Gamma}_0(x,\xi,t-\tau)$ соответственно.

Теорема 1. *Пусть для оператора L_0 выполнены условия а), б). Тогда имеет место равенство*

$$\Gamma_0(x,\xi,t)A(\xi) = A(x)\tilde{\Gamma}_0^T(\xi,x,t) \tag{2}$$

для всех $x,\xi \in \mathbb{R}$, $t > 0$.

Доказательство. Зафиксируем $x,\xi \in \mathbb{R}$, $t > 0$ и рассмотрим интеграл

$$I(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\Gamma}_0^{\text{т}}(y,x,t-\tau)A^{-1}(y)\Gamma_0(y,\xi,\tau)\,dy.$$

Покажем, что функция $I(\tau)$ постоянна на интервале $(0,t)$. Действительно,

$$I'(\tau) = -\int_{-\infty}^{\infty} \partial_t\tilde{\Gamma}_0^{\text{т}}(y,x,t-\tau)A^{-1}(y)\Gamma_0(y,\xi,\tau)\,dy + \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\Gamma}_0^{\text{т}}(y,x,t-\tau)A^{-1}(y)\partial_\tau\Gamma_0(y,\xi,\tau)\,dy =$$

$$= -\int_{-\infty}^{\infty} \partial_y^2\tilde{\Gamma}_0^{\text{т}}(y,x,t-\tau)A(y)A^{-1}(y)\Gamma_0(y,\xi,\tau)\,dy + \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\Gamma}_0^{\text{т}}(y,x,t-\tau)A^{-1}(y)A(y)\partial_y^2\Gamma_0(y,\xi,\tau)\,dy =$$

$$= -\int_{-\infty}^{\infty} \partial_y^2\tilde{\Gamma}_0^{\text{т}}(y,x,t-\tau)\Gamma_0(y,\xi,\tau)\,dy + \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\Gamma}_0^{\text{т}}(y,x,t-\tau)\partial_y^2\Gamma_0(y,\xi,\tau)\,dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \partial_y\tilde{\Gamma}_0^{\text{т}}(y,x,t-\tau)\partial_y\Gamma_0(y,\xi,\tau)\,dy - \int_{-\infty}^{\infty} \partial_y\tilde{\Gamma}_0^{\text{т}}(y,x,t-\tau)\partial_y\Gamma_0(y,\xi,\tau)\,dy = 0.$$

С другой стороны,

$$\lim_{\tau\to 0+} I(\tau) = \tilde{\Gamma}_0^{\text{т}}(\xi,x,t)A^{-1}(\xi), \quad \lim_{\tau\to t-0} I(\tau) = A^{-1}(x)\Gamma_0(x,\xi,t).$$

Теорема доказана.

Рассмотрим теперь общий случай, когда оператор (1) имеет младшие коэффициенты. Обозначим через $l = B(x)\partial_x + C(x)$ его младшую часть, так что $L = L_0 - l$, а через $\Gamma(x, \xi, t-\tau)$ и $Z(x-\xi, t-\tau; A)$ фундаментальные матрицы решений для L и оператора $\partial_t - A\partial_x^2$ с постоянными коэффициентами соответственно.

Лемма. *Пусть для оператора L выполнены условия а), б). Тогда*

$$\Gamma(x,\xi,t) = \Gamma_0(x,\xi,t) + \int\limits_0^t \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Gamma(x,y,t-\tau) l_y \Gamma_0(y,\xi,\tau)\, dy\, d\tau \tag{3}$$

для всех $x, \xi \in \mathbb{R}$, $t > 0$.

Доказательство. Зафиксируем произвольную точку $\xi \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon \in (0, T)$. В полосе $D \bigcap \{t > > \varepsilon\}$ фундаментальная матрица решений $\Gamma_0(x, \xi, t)$ как функция переменных (x, t) является решением следующей задачи Коши:

$$Lu = -l_x \Gamma_0(x,\xi,t), \quad u|_{t=\varepsilon} = \Gamma_0(x,\xi,\varepsilon).$$

Так как решение этой задачи в классе ограниченных функций единственно, то $\Gamma_0(x, t, \xi, \tau)$ можно представить в виде суммы объёмного потенциала и потенциала типа Пуассона [12, гл. 2, § 1]:

$$\Gamma_0(x,\xi,t) = -\int\limits_\varepsilon^t \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Gamma(x,y,t-\tau) l_y \Gamma_0(y,\xi,\tau) dy\, d\tau + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Gamma(x,y,t-\varepsilon)\Gamma_0(y,\xi,\varepsilon)\, dy.$$

Переходя здесь к пределу при $\varepsilon \to 0+$, получаем равенства

$$\Gamma_0(x,\xi,t) = -\lim_{\varepsilon\to 0+} \int\limits_\varepsilon^t \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Gamma(x,y,t-\tau) l_y \Gamma_0(y,\xi,\tau) dy\, d\tau + \lim_{\varepsilon\to 0+} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Gamma(x,y,t-\varepsilon)\Gamma_0(y,\xi,\varepsilon)\, dy =$$

$$= -\int\limits_0^t \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Gamma(x,y,t-\tau) l_y \Gamma_0(y,\xi,\tau)\, dy\, d\tau + \Gamma(x,\xi,t).$$

Лемма доказана.

Как известно, для параболических систем с одной пространственной переменной, если старшие коэффициенты $A_{ij}^{(2)}$ достаточно гладкие, первую краевую задачу можно решать с помощью потенциала двойного слоя, ядром которого является функция $\partial_\xi \Gamma(x, \xi, t)$. Однако если у старших коэффициентов нет производной по x, то фундаментальная матрица решений не имеет, вообще говоря, производной по переменной ξ.

В качестве ядра потенциала, который определён, в отличие от потенциала двойного слоя, даже когда старшие коэффициенты a_{ij} параболического оператора удовлетворяют только условию Гёльдера, возьмём функцию $K(x, \xi, t) = \partial_\xi(\Gamma(x, \xi, t)A(\xi))$.

Теорема 2. *Если для оператора L выполнены условия а), б), то функция $\Gamma(x, \xi, t)A(\xi)$ непрерывно дифференцируема по переменной ξ в полупространстве $t > 0$. Функция K удовлетворяет уравнению $L_{x,t}K(x, \xi, t) = 0$ и справедливы оценки*

$$|\partial_x^m K(x,\xi,t)| < C_m t^{-(m+2)/2} e^{-c_m(x-\xi)^2/t}, \quad m \leqslant 2, \tag{4}$$

при $t > 0$, $x, \xi \in \mathbb{R}$, а также представление

$$K(x,\xi,t) = -\partial_x Z(x-\xi, t; A(\xi))A(\xi) + \tilde{\Phi}(x,\xi,t), \tag{5}$$

где

$$|\tilde{\Phi}(x,\xi,t)| < Ct^{(\alpha-2)/2} e^{-c(x-\xi)^2/t}. \tag{6}$$

Доказательство. Нам понадобятся оценки [12, гл. 1, § 3] фундаментальной матрицы решений
$$|\partial_x^m \Gamma(x,\xi,t)| < C_m t^{-(m+1)/2} e^{-c_m(x-\xi)^2/t}, \quad m \leqslant 2. \tag{7}$$

Установим (4) сначала для функции
$$K_0(x,\xi,t) = \partial_\xi(\Gamma_0(x,\xi,t)A(\xi)) = A(x)\partial_\xi \tilde\Gamma_0(\xi,x,t),$$
которая удовлетворяет тем же оценкам, что и первая производная по x фундаментальной матрицы решений, а именно,
$$|K_0(x,\xi,t)| < Ct^{-1}e^{-c(x-\xi)^2/t}.$$
Используя свойство свёртки [12, гл. 1, § 3]
$$\Gamma_0(x,\xi,t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Gamma_0(x,y,t-\lambda)\Gamma_0(y,\xi,\lambda)\,dy, \quad 0<\lambda<t,$$
получаем $L_0K_0(x,\xi,t)=0$ и при $\lambda = t/2$
$$\partial_x^m K_0(x,\xi,t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \partial_x^m \Gamma_0(x,y,t/2)K_0(y,\xi,t/2)\,dy,$$
откуда
$$|\partial_x^m K_0(x,\xi,t)| \leqslant Ct^{-(3+m)/2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\biggl(-c\frac{(x-y)^2}{t} - c\frac{(y-\xi)^2}{t}\biggr)\,dy = C_1 t^{-1-m/2}e^{-c(x-\xi)^2/t}, \quad m\leqslant 2.$$

Умножая равенство (5) справа на $A(\xi)$, имеем
$$K(x,\xi,t) = K_0(x,\xi,t) + \int\limits_0^t \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Gamma(x,y,t-\tau) l_y K_0(y,\xi,\tau)\,d\tau \equiv K_0(x,\xi,t) + \Psi(x,\xi,t).$$
Из теоремы 1 и оценки (7) следуют неравенства
$$|\partial_\xi^m \partial_x^k(\Gamma_0(x,\xi,t)A(\xi))| \leqslant Ct^{-(1+k+m)/2}Ce^{-c(x-\xi)^2/t}, \quad k,m=0,1,$$
$$|\Delta_\xi \partial_x^k(\Gamma_0(x,\xi,t)A(\xi))| \leqslant C|\Delta\xi|^\alpha Ct^{-(\alpha+1+k)/2}Ce^{-c(x-\xi^*)^2/t}, \quad k=0,1,$$
где ξ^* – ближайшая из промежутка $(\xi,\xi+\Delta\xi)$ точка к x. Применив последнее неравенство для оценки интеграла в представлении (3), получим
$$|\Gamma(x,y,t) - \Gamma(x,\xi,t)| \leqslant C(t-\tau)^{-(\alpha+1)/2}|y-\xi|^\alpha(e^{-c(x-y)^2/(t-\tau)} + e^{-c(x-\xi)^2/(t-\tau)}).$$
В силу гёльдеровости коэффициентов системы такая же оценка справедлива и для разности $\Gamma(x,y,t)B(y) - \Gamma(x,\xi,t)B(\xi)$.

Имеем соотношения
$$|\Psi(x,\xi,t)| = \biggl|\int\limits_0^t \int\limits_{-\infty}^{\infty} [(\Gamma(x,y,t-\tau)B(y) - \Gamma(x,\xi,t-\tau)B(\xi)) \times$$

$$\times\, \partial_y K_0(y,\xi,\tau) + \Gamma(x,y,t-\tau)C(y)K_0(y,\xi,\tau)]\,d\tau\Bigg| \leqslant$$

$$\leqslant C\int\limits_0^t\int\limits_{-\infty}^{\infty}[(t-\tau)^{-(\alpha+1)/2}|y-\xi|^{\alpha}\tau^{-3/2} + (t-\tau)^{-1}\tau^{-1/2}]\,\times$$

$$\times\,(e^{-c(x-y)^2/(t-\tau)} + e^{-c(x-\xi)^2/(t-\tau)})e^{-c(y-\xi)^2/(t-\tau)}\,dy\,d\tau \leqslant Ct^{-1/2}e^{-c(x-\xi)^2/t}.$$

Кроме того, матрицу $\tilde\Gamma_0$ можно представить в виде [12, гл. 1, § 3]

$$\tilde\Gamma_0(x,\xi,t) = Z(x-\xi,t;A^{\text{т}}(\xi)) + \Phi_0(x,\xi,t),$$

где Φ_0 имеет более слабую особенность по сравнению с первым слагаемым:

$$|\partial_x^m\Phi_0(x,\xi,t)| < Ct^{(\alpha-1-m)/2}e^{-c(x-\xi)^2/t},\quad m\leqslant 2. \tag{8}$$

Используя равенство (2) для фундаментальной матрицы решений с постоянными коэффициентами, получаем

$$K(x,\xi,t) = K_0(x,\xi,t) + \Psi(x,\xi,t) = A^{\text{т}}(x)\partial_\xi\tilde\Gamma_0^{\text{т}}(\xi,x,t) + \Psi(x,\xi,t) =$$

$$= A^{\text{т}}(x)\partial_\xi Z^{\text{т}}(\xi-x,t;A^{\text{т}}(x)) + A^{\text{т}}(x)\partial_\xi\Phi_0^{\text{т}}(\xi,x,t) + \Psi(x,\xi,t) =$$

$$= -\partial_x Z(x-\xi,t;A(x))A(x) + A^{\text{т}}(x)\partial_\xi\Phi_0^{\text{т}}(\xi,x,t) + \Psi(x,\xi,t) =$$

$$= -\partial_x Z(x-\xi,t;A(\xi))A(\xi) - [\partial_x Z(x-\xi,t;A(x))A(x) - \partial_x Z(x-\xi,t;A(\xi))A(\xi)] +$$

$$+ A^{\text{т}}(x)\partial_\xi\Phi_0^{\text{т}}(\xi,x,t) + \Psi(x,\xi,t) = -\partial_x Z(x-\xi,t;A(\xi))A(\xi) + \tilde\Phi(x,\xi,t),$$

причём из (7) и (8) следует, что

$$|\tilde\Phi(x,\xi,t)| < Ct^{(\alpha-2)/2}e^{-c(x-\xi)^2/t}.$$

Таким образом, получено представление (5), (6). Теорема доказана.

В области

$$\Omega = \{(x,t)\in D : x > g(t),\quad 0<t<T\}$$

с боковой границей $\Sigma = \{(x,t)\in D : x = g(t),\ \ 0<t<T\}$, где функция g удовлетворяет условию $g\in C^{(1+\alpha)/2}([0,T])$, $0<\alpha<1$, рассмотрим потенциал

$$W\varphi(x,t) = \int\limits_0^t K(x,g(\tau),t-\tau)\varphi(\tau)\,d\tau.$$

Для множества $E\subset\bar D$ обозначим через $C(E)$ пространство непрерывных и ограниченных вектор-функций $f : E\to\mathbb{R}^m$ с нормой

$$|f|_{0,E} = \sup_{(x,t)\in E}|f(x,t)|$$

и положим $\underset{\circ}{C}(E) = \{f\in C(E) : f|_{t=0} = 0\}$.

Теорема 3. *Функция* $W : \varphi\to W\varphi$ *отображает пространство* $\underset{\circ}{C}(\Sigma)$ *в* $\underset{\circ}{C}(\bar\Omega)$, *причём*

$$|W\varphi|_{0,\Omega}\leqslant C|\varphi|_{0,\Sigma}. \tag{9}$$

Для плотности $\varphi \in C(\Sigma)$ *справедлива формула скачка*

$$W^{\pm}\varphi(g(t),t) = \pm\frac{\varphi(t)}{2} + W^0\varphi(g(t),t), \quad 0 < t \leqslant T, \tag{10}$$

где $W^{\pm}\varphi$ *– предельные значения при приближении к точке* $(g(t),t)$ *справа и слева, а* $W^0\varphi$ *– прямое значение потенциала* $W\varphi$ *на кривой* $x = g(t)$.

Доказательство. По теореме 2 потенциал может быть представлен в виде

$$W\varphi(x,t) = \int\limits_0^t \partial_x Z(x-g(\tau),t-\tau;A(\xi))A(\xi)\varphi(\tau)\,d\tau + \int\limits_0^t \tilde{\Phi}(x,\xi,t-\tau)\varphi(\tau)\,d\tau.$$

Формула скачка для первого слагаемого, также как и оценка (9), получена в [13]. Функция $\tilde{\Phi}$ имеет слабую особенность, а потому второе слагаемое непрерывно в замыкании области и

$$\left|\int\limits_0^t \tilde{\Phi}(x,\xi,t-\tau)\varphi(\tau)\,d\tau\right| \leqslant C|\varphi|_{0,\Sigma}\int\limits_0^t (t-\tau)^{\alpha/2-1}\,d\tau \leqslant C|\varphi|_{0,\Sigma}.$$

Теорема доказана.

2. Первая краевая задача в ограниченной области. В полосе D рассматриваем область

$$\Omega = \{(x,t) \in D : g_1(t) < x < g_2(t), \ \ 0 < t < T\}$$

с основанием $\Omega_0 = \bar{\Omega}\bigcap\{t=0\}$ и боковыми границами $\Sigma_i = \{(x,t) \in D : x = g_i(t), \ 0 < t < T\}$, $i = 1, 2$, где функции g_i удовлетворяют условиям

$$\begin{gathered} |g_i(t+\Delta t) - g_i(t)| \leqslant C|\Delta t|^{(1+\alpha)/2}, \quad t, t+\Delta t \in [0,T], \\ g_1(t) < g_2(t), \quad t \in [0,T], \quad \alpha \in (0,1). \end{gathered} \tag{11}$$

В области Ω рассмотрим первую краевую задачу

$$Lu = 0 \ \text{ в } \ \Omega, \quad u|_{\Sigma_1} = \psi_1, \quad u|_{\Sigma_2} = \psi_2, \quad u|_{t=0} = h. \tag{12}$$

Теорема 4. *Пусть для оператора* L *выполнены условия а), б), а для боковых границ области* Ω *– условия (11). Если* $\psi_1, \psi_2 \in C(\Sigma_i)$, $h \in C(\Omega_0)$ *и справедливы условия согласования* $\psi_1(0) = h(g_1(0))$, $\psi_2(0) = h(g_2(0))$, *то существует и единственно решение* $u \in C^{2,1}_{x,t}(\Omega)\bigcap C(\bar{\Omega})$ *первой краевой задачи (12), причём имеет место оценка*

$$|u|_{0,\Omega} \leqslant C(|\psi_1|_{0,\Sigma_1} + |\psi_2|_{0,\Sigma_2} + |h|_{0,\Omega_0}).$$

При $h \equiv 0$ *существуют функции* $\varphi_i \in \overset{\circ}{C}(\Sigma_i)$, $i = 1, 2$, *такие, что решение представляется в виде суммы потенциалов:* $u = W_1\varphi_1 + W_2\varphi_2$ *в* Ω, *где*

$$W_i\varphi_i(x,t) = \int\limits_0^t K(x,g_i(\tau),t-\tau)\varphi_i(\tau)\,d\tau,$$

причём $|\varphi_i|_{0,[0,T]} \leqslant C(|\psi_1|_{0,\Sigma_1} + |\psi_2|_{0,\Sigma_2})$, $i = 1, 2$.

Доказательство. Продолжим функцию h до функции $\tilde{h} \in C(\mathbb{R})$ с сохранением нормы: $|\tilde{h}|_{0,\mathbb{R}} = |h|_{0,\Omega_0}$. Вычитая из решения задачи (12) потенциал типа Пуассона

$$\Pi\tilde{h}(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Gamma(x,y,t)\tilde{h}(y)\,dy,$$

получаем задачу с нулевой начальной функцией:

$$Lv = 0 \ \text{ в } \ \Omega, \quad v|_{\Sigma_1} = \tilde{\psi}_1, \quad v|_{\Sigma_2} = \tilde{\psi}_2, \quad v|_{t=0} = 0, \tag{13}$$

где $\tilde{\psi}_i = \psi_i - \tilde{h}$, причём $\tilde{\psi}_1(0) = \tilde{\psi}_2(0) = 0$ и в силу (7)

$$|\Pi\tilde{h}|_{0,D} \leqslant C|\tilde{h}|_{0,\mathbb{R}} = C|h|_{0,\Omega_0}.$$

Решение задачи (13) будем искать в виде суммы двух потенциалов: $u = W_1\varphi_1 + W_2\varphi_2$.

Воспользовавшись формулой скачка (10), получим систему уравнений типа Вольтерры

$$\left(\frac{\varphi_1}{2} + W_1^0\varphi_1 + W_2^0\varphi_2\right)\bigg|_{\Sigma_1} = \tilde{\psi}_1, \quad \left(-\frac{\varphi_2}{2} + W_1^0\varphi_1 + W_2^0\varphi_2\right)\bigg|_{\Sigma_2} = \tilde{\psi}_2 \tag{14}$$

со слабо сингулярными ядрами.

Решив эту систему методом последовательных приближений, получим её единственное решение $\varphi_1, \varphi_2 \in C([0,T])$, причём $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = 0$ и

$$|\varphi_i|_{0,[0,T]} \leqslant C(|\tilde{\psi}_1|_{0,[0,T]} + |\tilde{\psi}_2|_{0,[0,T]}) \leqslant C(|\psi_1|_{0,[0,T]} + |\psi_2|_{0,[0,T]} + |h|_{0,\Omega_0}). \tag{15}$$

Отметим характер зависимости константы в этом неравенстве от области. Пусть квадрат параболического расстояния между кривыми отделён от нуля некоторой константой:

$$\min_{0\leqslant t,\tau\leqslant T}[(g_2(t) - g_1(\tau))^2 + |t-\tau|] \geqslant \delta > 0.$$

Из оценок для слабо сингулярных ядер K_{ij}^0 системы (14)

$$|K_{ii}^0(t,\tau)| = |K_{ii}^0(g_i(t), g_j(\tau), t-\tau)| \leqslant$$

$$\leqslant C(t-\tau)^{\alpha/2-1}\exp\left(-c\frac{(g_i(t) - g_j(\tau))^2}{t-\tau}\right) \leqslant C(t-\tau)^{\alpha/2-1}, \quad i = 1, 2,$$

$$|K_{ij}^0(t,\tau)| = |K(g_i(t), g_j(\tau), t-\tau)| \leqslant C(t-\tau)^{-1}\exp\left(-c\frac{(g_i(t) - g_j(\tau))^2}{t-\tau}\right) \leqslant$$

$$\leqslant C_1(t-\tau)^{-1}\exp\left(-c\frac{(g_i(t) - g_j(\tau))^2 + |t-\tau|}{t-\tau}\right) \leqslant C_1(t-\tau)^{-1}\exp\left(-c\frac{\delta}{t-\tau}\right), \quad i \neq j,$$

следует, что постоянная в (15), помимо T, константы параболичности μ, норм коэффициентов системы в пространстве $H^\alpha(\mathbb{R})$ и константы C из (11), зависит от δ.

Установим единственность классического решения. Пусть $u \in C_{x,t}^{2,1}(\Omega)\bigcap C(\bar{\Omega})$ – решение задачи (12) с нулевыми начальной и граничными функциями. Для малого числа $\varepsilon > 0$ рассмотрим область

$$\Omega^\varepsilon = \{(x,t) \in D : g_1(t) + \varepsilon < x < g_2(t) - \varepsilon, \ \ \varepsilon < t < T - \varepsilon\}$$

с боковыми границами $\Sigma_i^\varepsilon = \{(x,t) \in D : x = g_i(t) - (-1)^i\varepsilon, \ \varepsilon < t < T - \varepsilon\}$, $i = 1, 2$, и основанием $Q^\varepsilon = \bar{\Omega}^\varepsilon \bigcap \{t = \varepsilon\}$.

Так как $u \in C_{x,t}^{2,1}(\Omega)\bigcap C(\bar{\Omega})$, то $u \in C_{x,t}^{2,1}(\bar{\Omega}^\varepsilon)$. Решение задачи

$$Lv = 0 \ \text{ в } \ \Omega^\varepsilon, \quad v|_{\Sigma_1} = u|_{\Sigma_1}, \quad v|_{\Sigma_2} = u|_{\Sigma_2}, \quad v|_{t=\varepsilon} = u|_{t=\varepsilon},$$

в этом классе единственно [7], откуда следует, что $v \equiv u$ в Ω^ε. По доказанному это решение удовлетворяет оценке

$$|u|_{0,\Omega^\varepsilon} \leqslant C(|u|_{0,\Sigma_1^\varepsilon} + |u|_{0,\Sigma_2^\varepsilon} + |u|_{0,Q^\varepsilon}),$$

причём константа C может быть взята одной и той же для всех достаточно малых $\varepsilon > 0$. Но по условию функция u непрерывна в $\bar{\Omega}$ и равна нулю на параболической границе области, поэтому при $\varepsilon \to 0+$ правая часть неравенства стремится к нулю и, следовательно, $u \equiv 0$ в $\bar{\Omega}$. Теорема доказана.

3. Первая краевая задача в полуограниченной области. Рассматриваем область

$$\Omega = \{(x,t) \in D : x > g(t), \quad 0 < t < T\}$$

с боковой границей

$$\Sigma = \{(x,t) \in D : x = g(t), \quad 0 < t < T\}$$

и основанием $\Omega_0 = \bar{\Omega} \bigcap \{t = 0\}$, где функция g удовлетворяет условию Жевре

$$|g(t+\Delta t) - g(t)| \leqslant C|\Delta t|^{(1+\alpha)/2}, \quad t, t+\Delta t \in [0,T], \quad 0 < \alpha < 1. \tag{16}$$

В области Ω рассмотрим первую краевую задачу

$$Lu = 0 \text{ в } \Omega, \quad u|_\Sigma = \psi, \quad u|_{t=0} = h. \tag{17}$$

Теорема 5. *Пусть для оператора L выполнены условия а), б), а для боковой границы области Ω – условие (16). Если $\psi \in C(\Sigma)$, $h \in C(\Omega_0)$ и выполнено условие согласования $\psi(0) = h(g(0))$, то существует и единственно классическое решение $u \in C^{2,1}_{x,t}(\Omega) \bigcap C(\bar{\Omega})$ задачи (17), которое удовлетворяет оценке*

$$|u|_{0,\Omega} \leqslant C(|\psi|_{0,\Sigma} + |h|_{0,\Omega_0}).$$

При $h \equiv 0$ существует функция $\varphi \in \underset{\circ}{C}(\Sigma)$ такая, что решение представляется в виде потенциала

$$u(x,t) = \int\limits_0^t K(x, g(\tau), t-\tau)\varphi(\tau)\, d\tau, \tag{18}$$

причём $|\varphi|_{0,[0,T]} \leqslant C|\psi|_{0,\Sigma}$.

Доказательство. Существование классического решения устанавливается так же, как и в случае ограниченной области. А именно, с помощью потенциала типа Пуассона задача (17) сводится к задаче с нулевой начальной функцией и граничной функцией $\tilde{\psi}$. Затем решение ищется в виде (18). Плотность φ находится из интегрального уравнения

$$\left(\frac{\varphi}{2} + W^0\varphi\right)\Big|_\Sigma = \tilde{\psi},$$

откуда получается оценка на φ, а затем, с помощью теоремы 3, на решение u.

Докажем единственность. Без ограничения общности считаем, что боковая граница Σ лежит в левой полуплоскости, т.е. $\max\limits_{t\in[0,T]} g(t) \leqslant 0$. Пусть $u \in C^{2,1}_{x,t}(\Omega) \bigcap C(\bar{\Omega})$ – ограниченное решение задачи (17) с нулевыми начальной и граничной функциями. Для $R \geqslant 1$ в области $\Omega^R = \Omega \bigcap \{x < R\}$ с боковыми границами Σ и $\Sigma^R = \{x = R, \ 0 < t < T\}$ рассмотрим первую краевую задачу

$$Lv = 0 \text{ в } \Omega^R, \quad v|_\Sigma = 0, \quad v|_{\Sigma^R} = u|_{\Sigma^R}, \quad v|_{t=0} = 0.$$

По теореме 4 существует решение этой задачи $v \in C^{2,1}_{x,t}(\Omega^R) \bigcap C(\bar{\Omega}^R)$, представимое в виде суммы двух потенциалов:

$$v(x,t) = \int\limits_0^t K(x, g(\tau), t-\tau)\varphi_1(\tau)\, d\tau + \int\limits_0^t K(x, R, t-\tau)\varphi_2(\tau)\, d\tau = W_1\varphi_1(x,t) + W_2\varphi_2(x,t).$$

В силу единственности решения этой задачи $v \equiv u$ в $\bar\Omega^R$. Пусть

$$M = \sup_{\Omega} |u|.$$

Тогда по теореме 4 $|\varphi_2(t)| \leqslant CM$, где C не зависит от R и

$$|W_2\varphi_2(x,t)| \leqslant CM \int\limits_0^t (t-\tau)^{-1} \exp\left(-\frac{c(x-R)^2}{t-\tau}\right) d\tau \leqslant$$

$$\leqslant CM \exp\left(-\frac{c(x-R)^2}{2(t-\tau)}\right) \int\limits_0^t (t-\tau)^{-1} \exp\left(-\frac{c(x-R)^2}{2(t-\tau)}\right) d\tau =$$

$$= CM \exp\left(-\frac{c(x-R)^2}{2(t-\tau)}\right) \int\limits_0^{t/(x-R)^2} \tau^{-1} \exp\left(-\frac{c}{2\tau}\right) d\tau \leqslant$$

$$\leqslant CM \exp\left(-\frac{c(x-R)^2}{2(t-\tau)}\right) \int\limits_0^{T/(x-R)^2} \tau^{-1} \exp\left(-\frac{c}{2\tau}\right) d\tau \leqslant$$

$$\leqslant CM \exp\left(-\frac{c(x-R)^2}{2T}\right) \left(\left|\ln \frac{T}{(x-R)^2}\right| + 1\right). \qquad (19)$$

Краевое условие на левой границе даёт интегральное уравнение

$$\left(-\frac{\varphi_1}{2} + W_1^0\varphi_1\right)\Big|_{\Sigma_1} = -W_2\varphi_2\Big|_{\Sigma_1} = p,$$

причём, в силу предыдущего неравенства и теоремы 3,

$$|p|_{0,[0,T]} \leqslant C_1 M e^{-cR^2/(2T)} \left(\left|\ln \frac{T}{R^2}\right| + 1\right) \leqslant C_2 M e^{-cR^2/(4T)}.$$

Отсюда $|\varphi_1|_{0,[0,T]} \leqslant C_1 |p|_{0,[0,T]} \leqslant C_2 M e^{-cR^2/(4T)}$ и $|W_1\varphi_1(x,t)| \leqslant C_3 M e^{-cR^2/(4T)}$ в Ω^R, где константа C_3 не зависит от R и точки $(x,t) \in \Omega^R$.

Пусть (x,t) – произвольная точка области Ω. Из последнего неравенства и (19) получаем

$$u(x,t) = \lim_{R\to+\infty} (W_1\varphi_1(x,t) + W_2\varphi_2(x,t)) = 0.$$

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Солонников В.А.* О краевых задачах для линейных параболических систем дифференциальных уравнений общего вида // Тр. Мат. ин-та имени В.А. Стеклова. 1965. Т. 83. С. 3–163.
2. *Бадерко Е.А., Черепова М.Ф.* Потенциал простого слоя и первая краевая задача для параболической системы на плоскости // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52. № 2. С. 198–208.
3. *Бадерко Е.А., Черепова М.Ф.* Задача Дирихле для параболических систем с Дини-непрерывными коэффициентами на плоскости // Докл. РАН. 2017. Т. 476. № 1. С. 7–10.
4. *Baderko E.A., Cherepova M.F.* Dirichlet problem for parabolic systems with Dini continuous coefficients // Appl. Anal. 2021. V. 100. № 13. P. 2900–2910.

5. *Мазья В.Г., Кресин Г.И.* О принципе максимума для сильно эллиптических и параболических систем второго порядка с постоянными коэффициентами // Мат. сб. 1984. Т. 125 (167). № 4. С. 458–480.
6. *Бадерко Е.А., Черепова М.Ф.* Единственность решений начально-краевых задач для параболических систем в плоских ограниченных областях с негладкими боковыми границами // Докл. РАН. Математика, информатика, процессы управления. 2020. Т. 494. № 5. С. 5–8.
7. *Бадерко Е.А., Черепова М.Ф.* О единственности решений первой и второй начально-краевых задач для параболических систем в ограниченных областях на плоскости // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 8. С. 1039–1048.
8. *Бадерко Е.А., Сахаров С.И.* Единственность решения первой начально-краевой задачи для параболической системы с дифференцируемыми коэффициентами в полуполосе с негладкой боковой границей // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 5. С. 625–634.
9. *Бадерко Е.А., Сахаров С.И.* О единственности решений начально-краевых задач для параболических систем с Дини-непрерывными коэффициентами в полуограниченной области на плоскости // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2023. Т. 63. № 4. С. 54–65.
10. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. М., 1968.
11. *Коненков А.Н.* Классические решения первой краевой задачи для параболических систем на плоскости // Докл. РАН. 2022. Т. 503. С. 67–69.
12. *Эйдельман С.Д.* Параболические системы. М., 1964.
13. *Тверитинов В.А.* Гладкость потенциала простого слоя для параболической системы второго порядка // Деп. в ВИНИТИ АН СССР 02.09.88. № 6850-В88.

Рязанский государственный университет
имени С.А. Есенина

Поступила в редакцию 27.03.2023 г.
После доработки 27.03.2023 г.
Принята к публикации 19.05.2023 г.