

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ И ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.923+517.925.54+517.968

О ГИПЕРСИНГУЛЯРНЫХ ОПЕРАТОРАХ, СВЯЗАННЫХ С ПЕРИДИНАМИКОЙ

© 2023 г. Ш. А. Алимов, Ш. Н. Шералиев

Для гиперсингулярного интегрального оператора типа Кальдерона–Зигмунда, связанного с задачами перидинамики, найдено гильбертово пространство, которое переводится данным оператором в пространство квадратично суммируемых периодических функций.

DOI: 10.31857/S0374064123070051, EDN: GUNJTY

Основное уравнение перидинамики, предложенное в работе [1], в линеаризованном варианте имеет следующий вид:

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - A_s u(x, t) = f(x, t), \quad x \in D \subset \mathbb{R}^n, \quad t > 0,$$

где сингулярный интегральный оператор A_s определяется равенством

$$A_s u(x) = \int_D K_s(x, y) [u(y) - u(x)] dy,$$

D – ограниченная n -мерная ($n \geq 3$) область с кусочно-гладкой границей; $u : D \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ – неизвестная функция; $n \times n$ -матрица-функция K_s , определённая в $D \times D$, является заданным ядром интегрального оператора; функция $f : D \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ представляет собой внешнюю силу.

Ядро $K_s(x, y)$, описывающее распределённое взаимодействие между частицами твёрдого тела D , имеет носитель в ρ -окрестности диагонали $\{x = y\}$, число ρ при этом называется *горизонтом взаимодействия*. На диагонали ядро $K_s(x, y)$ может иметь неинтегрируемую особенность, компенсируемую разностью $u(y) - u(x)$. В этом случае интегральный оператор A_s является сингулярным и может оказаться неограниченным.

В настоящей работе рассматривается интегральный оператор A_s в виде свёртки в пространстве периодических функций, а именно:

$$A_s u(x) = \int_{\mathbb{T}^n} K_s(x - y) [u(y) - u(x)] dy, \quad x \in \mathbb{T}^n = [-\pi, \pi]^n. \quad (1)$$

Важный класс операторов вида (1) составляют операторы с сингулярным ядром вида

$$K_s(x) = \frac{\Omega(x)}{|x|^n}, \quad x \in \mathbb{T}^n.$$

Будем предполагать, что матрица-функция $\Omega(x)$ является гладкой в области $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ и для любого $\lambda > 0$ удовлетворяет условию

$$\Omega(\lambda x) = \Omega(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Рассмотрим сингулярный интегральный оператор

$$Sf(x) = \int_{\mathbb{T}^n} \frac{\Omega(y)}{|y|^n} f(x - y) dy. \quad (2)$$

Определим матрицу Ω^* , представляющую собой среднее значение ядра Ω по единичной сфере:

$$\Omega^* = \frac{1}{\omega_n} \int_{\theta} \Omega(\theta) d\theta. \quad (3)$$

Когда $\Omega^* = 0$, т.е. все элементы Ω_{ij}^* , $i, j = \overline{1, n}$, этой матрицы равны нулю, интегральный оператор (2) является оператором типа Кальдерона–Зигмунда (см. [2]). Известно, что в этом случае оператор (2) естественным образом определяется в классе гладких функций и продолжается до оператора, непрерывного из $L_p(\mathbb{T}^n)$ в $L_p(\mathbb{T}^n)$. Отметим, что условие $\Omega^* = 0$ является необходимым для справедливости данного утверждения.

В настоящей работе рассматривается случай $\Omega^* \neq 0$. Тогда оператор (2) становится гиперсингулярным, в связи с чем необходимо откорректировать его определение. Такую корректировку можно произвести, опираясь на основное уравнение перидинамики (1).

Зафиксируем ρ из интервала $0 < \rho < \pi$ и обозначим символом $\chi(r)$ неотрицательную функцию, принадлежащую пространству $C^\infty(\mathbb{R})$, равную единице при $r \leq \rho/2$ и нулю при $r \geq \rho$.

Основной целью работы является изучение интегрального оператора

$$Af(x) = \int_{\mathbb{T}^n} \frac{\Omega(y)}{|y|^n} \chi(|y|) [f(x-y) - f(x)] dy. \quad (4)$$

Очевидно, что в случае $\Omega^* = 0$ оператор (4) совпадает с сингулярным оператором типа Кальдерона–Зигмунда.

Для того чтобы сформулировать основной результат, введём функциональное пространство периодических функций с логарифмической гладкостью.

Рассмотрим самосопряжённый оператор

$$\Lambda f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} f_k e^{ikx} \sqrt{1 + |k|^2},$$

где

$$f_k = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{T}^n} f(x) e^{-ikx} dx.$$

Иными словами, $\Lambda = \sqrt{1 - \Delta}$, где Δ – самосопряжённое расширение в $L_2(\mathbb{T}^n)$ оператора Лапласа, отвечающее периодическим граничным условиям. Отметим, что областью определения оператора Δ является пространство Соболева $W_2^2(\mathbb{T}^n)$, следовательно, $D(\Lambda) = W_2^1(\mathbb{T}^n)$. При этом функция $f : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ принадлежит пространству вектор-функций $W_2^1(\mathbb{T}^n)$, если каждая компонента $f_j(x)$ принадлежит обычному пространству $W_2^1(\mathbb{T}^n)$.

Для любого натурального m рассмотрим положительный самосопряжённый в $L_2(\mathbb{T}^n)$ оператор $\log^m(1 + \Lambda)$. Область определения этого оператора обозначим $H_{\log}^m(\mathbb{T}^n)$:

$$H_{\log}^m(\mathbb{T}^n) = D(\log^m(1 + \Lambda)).$$

Каждое пространство $H_{\log}^m$ является гильбертовым пространством со скалярным произведением

$$(f, g)_m = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} f_k \overline{g_k} \log^{2m}(1 + \sqrt{1 + |k|^2}).$$

Ассоциированную с этим скалярным произведением норму элемента $f \in H_{\log}^m(\mathbb{T}^n)$ обозначим через $\|f\|_m$.

Положим $H_{\log}^0(\mathbb{T}^n) = L_2(\mathbb{T}^n)$. Очевидно, что для любого натурального m выполняется равенство

$$\log(1 + \Lambda) H_{\log}^m(\mathbb{T}^n) = H_{\log}^{m-1}(\mathbb{T}^n), \quad m \in \mathbb{N}. \quad (5)$$

Под нормой матрицы Ω^* будем понимать величину

$$\|\Omega^*\| = \left(\sum_{i,j=1}^n |\Omega_{ij}^*|^2 \right)^{1/2}.$$

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. Для любого $m \in \mathbb{N}$ пространство $C^\infty(\mathbb{T}^n)$ плотно в $H_{\log}^m(\mathbb{T}^n)$.

Теорема 2. Для любого натурального m оператор A , определённый равенством (4), действует из $H_{\log}^m(\mathbb{T}^n)$ в $H_{\log}^{m-1}(\mathbb{T}^n)$ и удовлетворяет оценке

$$\|Af\|_{m-1} \leq C\|\Omega^*\| \|f\|_m + C\|f\|_{m-1}. \quad (6)$$

В наиболее важном случае $m = 1$ данное утверждение может быть сформулировано следующим образом.

Следствие. Оператор A действует непрерывно из $D(\log(1 + \Lambda))$ в $L_2(\mathbb{T}^n)$, при этом выполняется неравенство

$$\|Af\|_{L_2(\mathbb{T}^n)} \leq C\|\Omega^*\| \|f\|_1 + C\|f\|_{L_2(\mathbb{T}^n)}.$$

Приведём краткую схему доказательства теорем 1 и 2. Рассмотрим вспомогательный гиперсингулярный оператор

$$A^*f(x) = \int_{\mathbb{T}^n} \frac{\chi(|y|)}{|y|^n} \Omega^*[f(x-y) - f(x)] dy. \quad (7)$$

Справедливы следующие утверждения.

Лемма 1. Пусть 2π -периодическая функция $L(x)$ имеет вид

$$L(x) = -\frac{1}{n-2} \frac{\ln|x|}{|x|^{n-2}} \chi(|x|), \quad x \in \mathbb{T}^n.$$

Тогда справедливо равенство

$$\Delta L(x) = \frac{\chi(|x|)}{|x|^n} + Q(x),$$

где функция Q принадлежит $C^\infty(\mathbb{T}^n)$ и её носитель расположен в слое $\rho/2 \leq |x| \leq \rho$.

Доказательство проводится непосредственным дифференцированием с применением свойств функции $\chi(r)$, определённой перед формулой (4).

Лемма 2. Для любой функции $f \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ выполняется равенство

$$A^*f(x) = \int_{\mathbb{T}^n} L(y) \Omega^* \Delta f(x-y) dy + Bf(x) + Mf(x), \quad (8)$$

где M – постоянная матрица, а B – оператор свёртки с ядром из пространства $C^\infty(\mathbb{T}^n)$.

Доказательство. Согласно определению (7) и лемме 1 можно записать

$$A^*f(x) = \int_{\mathbb{T}^n} [\Delta L(y)] \Omega^*[f(x-y) - f(x)] dy - \int_{\mathbb{T}^n} Q(y) \Omega^*[f(x-y) - f(x)] dy. \quad (9)$$

Из условия леммы следует, что равномерно по $x \in \mathbb{T}^n$ выполняется оценка

$$f(x-y) - f(x) = O(|y|).$$

Стало быть, первый интеграл в равенстве (9) сходится абсолютно и равномерно, и мы можем применить к нему вторую формулу Грина (см. [3, гл. IV, § 2, п. 1, формула (5)]). В результате интеграл преобразуется следующим образом:

$$\int_{\mathbb{T}^n} [\Delta L(y)] \Omega^* [f(x-y) - f(x)] dy = \int_{\mathbb{T}^n} L(y) \Omega^* \Delta_y f(x-y) dy. \quad (10)$$

Далее воспользуемся леммой 1. Положим

$$Bf(x) = - \int_{\mathbb{T}^n} Q(y) \Omega^* f(x-y) dy, \quad (11)$$

где $Q \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$.

Обозначим

$$M = \int_{\mathbb{T}^n} Q(y) dy \Omega^*.$$

В таком случае из (9)–(11) следует требуемое соотношение (8). Лемма доказана.

Лемма 3. Коэффициенты Фурье L_k функции $L(x)$ для любого натурального N удовлетворяют равенству

$$L_k = \frac{1}{|k|^2} [\alpha_n \ln |k| + \beta_n] + O(|k|^N), \quad k \in \mathbb{Z}^n, \quad |k| \geq 1.$$

Постоянные α_n и β_n зависят только от размерности n области.

Доказательство леммы проводится методом формулы среднего значения, впервые применённым В.А. Ильиным для исследования ядра интегрального оператора $\Lambda^{-\alpha}$ (см. [4]). Основанная на этом методе схема доказательства леммы приведена в работе [5].

Лемма 4. Для любой функции $f \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ коэффициенты Фурье функции $A^*f(x)$ удовлетворяют оценке

$$|(A^*f)_k| \leq C |\Omega^*| |f_k| \ln(1 + \sqrt{1 + |k|^2}) + C |f_k|. \quad (12)$$

Доказательство. Воспользуемся равенством (8). Первый интеграл в этом соотношении представляет собой свёртку, поэтому

$$(A^*f)_k = (2\pi)^n L_k \Omega^*(\Delta f)_k + (Bf)_k + Mf_k. \quad (13)$$

Аналогично из (11) получаем

$$(Bf)_k = (2\pi)^n Q_k f_k.$$

Так как $(\Delta f)_k = -|k|^2 f_k$, то равенство (13) можно записать следующим образом:

$$(A^*f)_k = -(2\pi)^n |k|^2 L_k \Omega^* f_k + Q_k f_k + Mf_k.$$

Для получения требуемой оценки (12) остаётся воспользоваться леммой 3 и неравенством

$$\ln |k| \leq \ln(1 + \sqrt{1 + |k|^2}), \quad |k| \geq 1.$$

Лемма доказана.

Лемма 5. Для любой функции $f \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ выполняется оценка (6).

Доказательство. Введём следующую вспомогательную функцию:

$$\Omega_1(x) = \Omega(x) - \Omega^*,$$

где постоянная матрица Ω^* определена равенством (3). Очевидно, что выполняется равенство

$$\int_{\theta} \Omega_1(\theta) d\theta = 0.$$

В таком случае оператор $A_1 = A - A^*$ является оператором Кальдерона–Зигмунда и поэтому для него имеет место оценка

$$\|A_1 f\| \leq C \|f\|, \quad f \in H_{\log^0}(\mathbb{T}^n) = L_2(\mathbb{T}^n).$$

Следовательно, для любой функции $f \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ выполняется неравенство

$$\|A f\| \leq \|A^* f\| + C \|f\|, \quad f \in L_2(\mathbb{T}^n).$$

Основное неравенство (6) теперь может быть получено непосредственно из оценки (12) и соотношения (5). Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1 основано на том, что частичные суммы ряда Фурье любой функции $f \in H_{\log}^m(\mathbb{T}^n)$ принадлежат пространству $C^\infty(\mathbb{T}^n)$ и сходятся к f в метрике $H_{\log}^m(\mathbb{T}^n)$.

Доказательство теоремы 2 следует из леммы 5. По условию этой леммы оценка (6) справедлива лишь для функций из $C^\infty(\mathbb{T}^n)$. Тем не менее, согласно теореме 1, мы можем замкнуть оператор A в гильбертовом пространстве $H_{\log}^1(\mathbb{T}^n)$ и получить неравенство (6) в условиях теоремы 2.

Подчеркнём, что в основе доказательства приведённых лемм лежит метод формулы среднего значения, разработанный В.А. Ильиным (см. [6]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Silling S.A.* Reformulation of elasticity theory for discontinuities and long-range forces // J. Mech. Phys. Solids. 2000. V. 48. № 1. P. 175–209.
2. *Calderon A.P., Zygmund A.* On the existence of certain singular integrals // Acta Math. 1952. V. 88. P. 85–139.
3. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М., 1999.
4. *Ильин В.А.* Ядра дробного порядка // Мат. сб. 1957. Т. 41 (83). № 4. С. 459–480.
5. *Alimov Sh., Sheraliev Sh.* On the solvability of the singular equation of peridynamics // Complex Variables and Elliptic Equat. 2019. V. 64. № 5. P. 873–887.
6. *Ильин В.А.* Спектральная теория дифференциальных операторов. Самосопряжённые дифференциальные операторы. М., 1991.

Национальный университет Узбекистана
имени Мирзо Улугбека, г. Ташкент,
Филиал Московского государственного университета
имени М.В. Ломоносова, г. Ташкент, Узбекистан

Поступила в редакцию 04.04.2023 г.
После доработки 04.04.2023 г.
Принята к публикации 19.05.2023 г.