

УДК 517.97

ВАРИАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ,
СВЯЗАННЫХ С ИСКУССТВЕННЫМ ИНТЕЛЛЕКТОМ

© 2023 г. М. В. Бабушкин, В. Ю. Тертычный-Даури

Введены понятия алгоритма обучения, целевой функции, распознающей системы, класса изображений, тренировочного множества, алгоритма с поощрением, конечно-сходящегося алгоритма, адаптивной управляющей системы, цели управления, тактики управления, времени адаптации и т.д., относящиеся к проблеме искусственного интеллекта в процессах обучения и адаптации. Поставлена общая задача о самообучении (обучении “без учителя”) – о разделении множеств – в терминах классического вариационного исчисления. Общность задачи обусловлена введением в анализ дополнительной переменной времени. Задача решена с помощью определения экстремальных условий, при которых будет достигнута минимизация функционала общего среднего риска. Рассмотрены задачи, соответствующие нефиксированному и фиксированному промежуткам времени. Для двух этих случаев найдены выражения для расчёта вариаций функционалов качества. Указаны необходимые условия для определения экстремальных значений процесса самообучения (разделения классов множества изображений) во времени.

DOI: 10.31857/S0374064123070063, EDN: GUMYBE

Введение. Начнём с известного тезиса о том, что имеются разночтения по поводу смыслового содержания понятия “искусственный интеллект” (ИИ). Тем не менее доминирует достаточно общая и универсальная точка зрения на ИИ как на задачу обучения. При этом, конечно же, речь не идёт об обучении (дрессировке) биологических существ. Имеются в виду лишь искусственно созданные человеком вычислительные комплексы (роботы, компьютеры, цифровые имитаторы и т.д.), наделённые памятью, сенсорными устройствами, регуляторами в виде обратных связей, механическими и электрическими приводами и т.д.

Часто под ИИ понимают задачу машинного, т.е. компьютерного обучения различного типа нейросетей умению производить классификацию текстов, детекции, сегментации изображений. При всём при этом задачи управления динамическими объектами здесь не рассматриваются – дело сводится только к формированию сходящихся алгоритмов и процедур самообучения (обучения “без учителя”) с учётом экстремизации некоторого функционала качества. “Распознавание образов представляет собой часть общей проблемы искусственного интеллекта, возникшей под влиянием работ Н. Винера, Дж. фон Неймана, А.М. Тьюринга, У. Росс Эшби и других основоположников кибернетики” [1, с. 218].

Подробнее о задачах распознавания образов, в которых изучаются вопросы функционирования опознающих систем, можно узнать из обширной литературы, например работ [1–3]. Итак, проблема ИИ может рассматриваться, как было упомянуто, по-разному, например, как задача машинной классификации изображений, а может изучаться как задача адаптивного обучения через задачу динамического оценивания неизвестных параметров управляемого объекта или параметров воздействующей на него среды (различных возмущений). Так, хорошо известная задача обучения езде робота на велосипеде [1, 4, 5] попадает под эту трактовку проблемы ИИ.

1. Искусственный интеллект как процесс самообучения с использованием адаптивных обратных связей. Задача формирования и создания обучаемых, адаптивных, опознающих систем, как теперь становится отчётливо понятно, возникла при создании систем, сходных по своим возможностям и эффективности использования с системами искусственного интеллекта.

Речь идёт о задаче создания систем, работающих в условиях существенной априорной неопределённости о свойствах внешней среды и некоторых внутренних параметров. Эта задача

приводит к необходимости построения таких систем, которые могли бы при своём функционировании на основе поступающей и обрабатываемой информации менять свои параметры или свою структуру так, чтобы обеспечить с течением времени целевые задания. Такие системы стали называться *обучаемыми (самообучаемыми) адаптивными системами*.

Многие известные адаптивные системы используют в режиме своего функционирования итеративные *алгоритмы обучения*, которые также называются *алгоритмами настройки* или *адаптивными алгоритмами*, которые определяют правило (закон) целенаправленного изменения параметров (структуры) системы, зависящей от поступающей на вход информации. Большинство таких алгоритмов представляют собой градиентные либо поисковые процедуры, связанные с поставленной *целевой функцией*.

Эффективность применения данных алгоритмов напрямую зависит от характера выполнения их сходимости. Отметим, что в основе доказательства сходимости многих алгоритмов обучения лежат идеи, использующие метод функций Ляпунова в теории дифференциальных уравнений, при котором положительная функция Ляпунова убывает на траекториях изучаемого процесса.

В настоящее время имеется большое количество работ, посвящённых решению задач обучения, самообучения опознающих систем, исследованию алгоритмов адаптивного управления. Следует также отметить, что перцептронные системы Розенблатта при исследовании проблемы автоматической классификации изображений предназначались для изучения механизмов работы мозга и их возможностей. Этот и другие подходы в виде использования теории групп и групповых инвариантов, экстраполяционных и лингвистических схем часто не позволяют моделировать способность мозга к обучению на очень коротких обучающих последовательностях.

2. Процесс обучения. Изначально обучаемая опознающая система трактовалась как перцептронная система, где задача обучения ставилась в виде задачи построения по обучающей последовательности разделяющих поверхностей в пространстве различных признаков. Такой подход к задаче распознавания можно назвать геометрическим или, иначе, экстраполяционным. При этом опознающие системы различаются как алгоритмами обучения, так и их предназначением.

Модель перцептрона (системы нейронных сетей) Розенблатта послужила прототипом многих моделей обучаемых опознающих систем. Будем под *системой* иметь в виду некоторое устройство, предназначенное для однозначного отображения множества входных сигналов в множество выходных сигналов. Входные сигналы называют *изображениями*, а выходные – *ответами системы*.

Далее *опознающая*, или, иначе, *распознающая, система*, которая часто называется *классификатором*, представляет собой систему, классифицирующую множество изображений исходя из некоторой доступной классификации. Здесь под классификацией подразумевается разбиение множества изображений или его части на непересекающиеся подмножества, именуемые *классами изображений*.

Система, способная стать опознающей с помощью введения в неё некоторой информации о части изображений и классах изображений, называется *обучаемой опознающей системой*. Это означает, что после введения информации лишь о части изображений такая система способна стать классификатором всех изображений. Тем самым обнаруживаем *свойство экстраполяции*, присущее обучаемым системам.

Отметим, что множество изображений (с информацией о них, вводимой в систему) значительно беднее всего множества изображений. Это “вводимое” множество (вернее, вводимая информация о нём) состоит из конечного числа изображений. Система в результате такого ввода может по-разному производить классификацию, т.е. может менять свою структуру. Процесс ввода информации об изображениях, как результат, приводящий к изменению структуры, называется *обучением* системы, где множество изображений, которые система использует в обучении, называется *тренировочным* или *обучающим множеством*.

Важно обратить внимание, что в обучаемую опознающую систему заранее не вводится полная информация о классах изображений; требуется, однако, чтобы способность к правильной классификации изображений возникла, как итог, в процессе обучения.

Ещё одно важное замечание. Конкретная обучаемая опознающая система – это система, зависящая от некоторого конкретного параметра, определяющего её структуру. Обучение тогда сводится к нахождению или оценке требуемого значения этого параметра.

Входящие сигналы воспринимаются системой на основе конечного набора *признаков* – функций, определённых на множестве изображений, причём набор значений всех признаков, соответствующих данному изображению, называется *описанием изображения*. Точки в пространстве признаков называются *изображениями*, а множества в пространстве признаков, отвечающие классам изображений, называются *классами в пространстве признаков* или *образами*.

Обозначим множество изображений через Ω – абстрактное множество с элементами ω . Пусть $\Omega_1, \dots, \Omega_l$ – непересекающиеся подмножества множества Ω ; здесь Ω_k , $k = \overline{1, l}$, – классы изображений. Вещественные функции $s_k(\omega)$, $k = \overline{1, l}$, такие, что $s_k(\omega) > \max_{i \neq k} s_i(\omega)$

для любых k и $\omega \in \Omega_k$, называются *дискриминантными* или *разделяющими* по отношению к подмножествам $\Omega_1, \dots, \Omega_l$.

В случае двух классов изображений ($l = 2$) функция $s(\omega) = s_1(\omega) - s_2(\omega)$ принимает значения разных знаков на разных классах: множества Ω_1 и Ω_2 разделяются по знаку функции $s(\omega)$.

Для опознающей системы с переменной структурой можно рассмотреть задачу, называемую *задачей обучения*, которая состоит в отыскании такого параметра $\tau_* \in T$, при котором $\Omega_k(\tau_*) = \Omega_k$, $k = \overline{1, l}$.

Найти требуемый параметр τ_* можно с помощью перебора элементов множества T . Такая процедура перебора называется *алгоритмом обучения*, а опознающая система с переменной структурой и с соответствующим алгоритмом обучения – *обучаемой опознающей системой*.

Задача обучения опознающей системы, основанной на *методе конечно-сходящихся алгоритмов* (КСА) решения целевых неравенств, изучается как задача решения счётной системы *целевых неравенств*. Приходим тем самым к задаче оценивания неизвестного параметра, определяющего структуру опознающей системы; эта задача решается при помощи специальных рекуррентных процедур, названных *алгоритмами с поощрением*, которые сходятся при определённых условиях за конечное число итераций.

Пусть алгоритм обучения имеет вид

$$\tau_{n+1} = \Phi(x_n, \tau_n, \sigma_n), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (1)$$

формирование оценок векторного параметра τ (вектора весов) происходит последовательно с учётом текущей информации. Здесь τ_1 – произвольный начальный вектор весов; $x_1, x_2, \dots$ – элементы тренировочной последовательности; σ_n – некоторые параметры, характеризующие класс векторных функций Φ .

Для функционирования алгоритма (1) необходимо знать изображение x_n , поступающее на вход системы в данный момент времени. Рекуррентный алгоритм (1) называется *алгоритмом с поощрением*, если его можно представить в виде

$$\tau_{n+1} = \tau_n + \theta_n \Phi(x_n, \tau_n, \sigma_n), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (2)$$

где

$$\theta_n = \begin{cases} 1, & \text{если } \varphi(x_n, \tau_n, \sigma_n) \leq 0, \\ 0, & \text{если } \varphi(x_n, \tau_n, \sigma_n) > 0, \end{cases} \quad (3)$$

а $\varphi(x, \tau, \sigma)$ – некоторая *целевая функция*, характеризующая качество работы алгоритма.

Видим, что в алгоритме (2), (3) вектор весов на n -м шаге не изменяется, если система работает правильно и $\theta_n = 0$; в противном случае он изменяется по некоторому правилу. Эта информация о характере работы системы в процессе обучения (которая является информацией об изображениях тренировочного множества) сообщается опознающей системе и может учитываться при формировании алгоритмов обучения.

Рекуррентные алгоритмы без поощрения называются также *алгоритмами с принудительным обучением*, отличительной чертой которых является наличие целевого условия, при котором их работа в процессе обучения состоит в накоплении некоторых статистических данных о внешних возмущениях с целью нахождения вектора весов.

Введём понятие о КСА обучения опознающей системы [1, 4, 5]. Алгоритм (2), (3) называется *конечно-сходящимся*, если для произвольного начального вектора τ_1 и произвольной бесконечной тренировочной последовательности $x_1, x_2, \dots$ выполнено условие

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(x_n, \tau_n, \sigma_n) > 0,$$

означающее существование такого номера r , что при $n \geq r$ будет выполнено неравенство $\varphi(x_n, \tau_n, \sigma_n) > 0$. Для алгоритма (2), (3) это означает, что $\tau_r = \tau_{r+1} = \dots$, т.е. последовательность τ_n сходится к пределу за *конечное* число шагов алгоритма.

Если на тренировочном множестве $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ определена счётная последовательность целевых неравенств относительно искомого вектора τ :

$$\varphi(x_n, \tau, \sigma_n) > 0, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (4)$$

то тогда задача об обучении опознающей системы представляет собой задачу нахождения алгоритма решения τ счётной системы неравенств (4).

Пусть задана вещественная функция $\varphi(x, \tau)$, $x \in X \subset \mathbb{R}^q$, $\tau \in \mathbb{R}^p$, такая, что выполнены условия:

1) $\varphi(x, \tau)$ ограничена равномерно по $x \in X$, $|\varphi(x, \tau)| < C_1$, дифференцируема по τ для любого x ; евклидова норма её градиента $\|\nabla_\tau \varphi(x, \tau)\| < C_2$, где C_1, C_2 – постоянные, не зависящие от выбора $x \in X$;

2) существуют $\tau_* \in \mathbb{R}^p$ и число $\varepsilon_* > 0$, для которых справедливы неравенства $\varphi(x, \tau_*) \geq \varepsilon_* > 0$ при всех $x \in X$;

3) для любых пар точек (x, τ) , $x \in X$, $\tau \in \mathbb{R}^p$, удовлетворяющих условию $\varphi(x, \tau) \leq 0$, справедливо неравенство

$$(\nabla_\tau \varphi(x, \tau), \tau_* - \tau) \geq \varphi(x, \tau_*) - \varphi(x, \tau).$$

Пусть, кроме того, $\tau_1 \in \mathbb{R}^p$ – произвольный вектор и $\{x_n\} \in X$ – произвольное счётное множество. Зададим алгоритм с поощрением вида

$$\tau_{n+1} = \tau_n + \alpha_n \theta_n \nabla_\tau \varphi(x_n, \tau_n), \quad (5)$$

где

$$\theta_n = \begin{cases} 1, & \text{если } \varphi(x_n, \tau_n) \leq 0, \\ 0, & \text{если } \varphi(x_n, \tau_n) > 0, \end{cases}$$

и α_n – некоторая числовая последовательность

Из утверждения теоремы 2.1.1 [1, с. 34] следует, что в случае выполнения условий 1)–3) алгоритм (5) является конечно-сходящимся, если $\alpha_n = A_n + B_n$, либо $\alpha_n = \max\{A_n, B_n\}$, где

$$A_n = \frac{1}{\varkappa_n}, \quad B_n = -\frac{\beta_n \varphi(x_n, \tau_n)}{\|\nabla_\tau \varphi(x_n, \tau_n)\|^2},$$

$$\varkappa_n = 1 + \sum_{k=1}^n \theta_k, \quad \varkappa_{n+1} = \varkappa_n + \theta_{n+1}, \quad \varkappa_0 = 1, \quad \beta_n \in [0, 2], \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Алгоритм с поощрением (5) имеет характерную форму: вектор τ не меняется, если очередное неравенство выполнено, и изменяется в направлении наибольшего увеличения функции $\varphi(x, \tau)$ в противном случае.

Конкретные КСА предназначены для поиска решения линейных систем неравенств. Их можно использовать в задаче обучения опознающей системы перцептронного типа относительно разделения множеств. Вопросы, связанные с таким разделением (алгоритмы “Ява”, “Полоска”, “Отражение”, “Надёжное разделение”, “Оптимальное разделение”, процедуры построения комитетов неравенств и др.) подробно рассмотрены в работе [1, § 2.2]. Там же можно

найти результаты, относящиеся к теории обучения: стохастическим аналогам КСА, алгоритмам случайного поиска, теории принятия статистических решений, минимизации эмпирического риска, методу стохастической аппроксимации и процедуре Роббинса–Монро, методу потенциальных функций и самообучению (обучению “без учителя”).

3. Процесс адаптации. Воспользуемся некоторыми рассуждениями и доводами о применении метода КСА для решения задач адаптивного управления, изложенными в работах [1, 4–6]. Важно сразу же отметить, что задачи адаптивной стабилизации и слежения могут быть переформулированы как задачи нахождения решения системы неравенств, задаваемых целевым условием и способом формирования управления. Поэтому для нахождения требуемого решения можно использовать рекуррентные алгоритмы с поощрением.

Пусть имеется непрерывный динамический объект управления (ОУ), снабжённый системой управления (СУ), причём синтез СУ должен осуществляться в условиях априорной неопределённости о параметрах самого ОУ либо внешних условий в виде неконтролируемых возмущений. Тогда естественно обратиться к *адаптивным управляющим системам* для восполнения недостающей и необходимой информации в процессе формирования СУ и функционирования ОУ.

Зададим ОУ с помощью уравнения

$$F[y(t), \dots, y^{(m_1)}(t), u(t), \dots, u^{(m_2)}(t), \xi, t] = 0, \quad (6)$$

где $F(\cdot)$ – известная вещественная функция своих аргументов, $y(t)$ – вектор-функция выходов ОУ, $u(t)$ – вектор-функция управлений, $y^{(k)}(t)$, $u^{(k)}(t)$ – k -е производные по t соответствующих векторных функций, m_1 и m_2 – натуральные числа, ξ – неизвестный параметр из множества Ξ , $t \in [t_0, \infty)$ – время. Множество Ξ характеризует степень априорной неопределённости об ОУ и условиях его работы. Считаем функцию F в уравнении (6) такой, что при задании достаточно гладкой вектор-функции $u(t)$ и фиксации параметра $\xi \in \Xi$ уравнение (6) однозначно определяет выходной процесс $y(\xi, t)$. Всё это в совокупности позволяет говорить о *классе ОУ*, определяемом множеством Ξ с параметрами ξ в виде его элементов.

При выборе управления нужно ориентироваться на *цель управления* (ЦУ) – требование обеспечения некоторых ограничений на выходной процесс. Понятно, что ЦУ определяются особенностями каждой конкретной задачи управления. К примеру, зададим ЦУ в виде обеспечения предельного неравенства

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \varphi[\sigma(s), s] > 0, \quad (7)$$

где $\sigma(t)$ – набор известных к моменту времени t величин, связанных с ОУ и СУ ($\sigma(t)$, в частности, может содержать выход $y(t)$ и вход $u(t)$ и их производные до определённого порядка), $\varphi[\sigma(t), t]$ – известная вещественная функция своих аргументов.

Предположим, что для каждого ОУ из класса Ξ управление $u(t)$, обеспечивающее выполнение ЦУ, существует и его можно найти из уравнения

$$U[\sigma(t), u(t), \dots, u^{(m_3)}(t), \omega(\xi), t] = 0, \quad (8)$$

где $\omega(\xi)$ – отображение Ξ в конечномерное пространство Ω , U – известная функция своих аргументов. Тем самым считаем, что если модель ОУ определена, параметр ξ известен, то можно синтезировать управление, обеспечивающее ЦУ (7) в форме (8).

Отметим, что в ряде практических задач синтез требуемых управлений можно произвести в виде некоторого правила, зависящего не от всех характеристик ОУ, а лишь от некоторого числа их комбинаций, что и служит объяснением появления величины $\omega(\xi)$ в соотношении (8). Если $\omega(\xi)$ – это тождественное преобразование, то $\Xi \subseteq \Omega$.

Управлением (8) нельзя, однако, воспользоваться, так как оно зависит от неизвестного вектора $\omega(\xi)$. Поэтому следует искать требуемое управление из уравнения

$$U[\sigma(t), u(t), \dots, u^{(m_3)}(t), \tau(t), t] = 0, \quad (9)$$

где $\tau(t) \in \Omega$ – вектор-функция, которую также называют *тактикой управления* (ТУ). Соотношение (9) дополняют алгоритмом изменения ТУ в виде

$$\tau(t+0) = Q\{\tau(t-0) + \theta(t)\psi[\sigma(t-0), \tau(t-0), t-0]\}, \quad (10)$$

где обозначено

$$f(t \pm 0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(t \pm \varepsilon), \quad \varepsilon > 0, \quad \theta(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } \varphi[\sigma(t), t] \leq 0, \\ 0, & \text{если } \varphi[\sigma(t), t] > 0. \end{cases} \quad (11)$$

Здесь $\psi(\sigma, \tau, t)$ – функция со значениями в Ω ; $Q(\tau)$ – отображение множества Ω в его подмножество T , $\tau(t_0) \in T$ – произвольный элемент.

Предполагается, что для любого $\tau \in T$ из уравнения (9) можно определить вектор-функцию $u(t)$, не обязательно обеспечивающую выполнение ЦУ (7), и $\omega(\Xi) \subseteq T$. В нашем случае достаточно ограничиться алгоритмом (11), реализующим кусочно-постоянную ТУ со значениями в T . Полагаем, что функции $Q(\tau)$ и $\psi(\sigma, \tau, t)$ определяются, чтобы обеспечить ЦУ (7); понятно, что эти функции не должны зависеть от неизвестного параметра ξ .

Соотношения (9)–(11) задают полностью СУ, предназначенную для управления любым ОУ из класса Ξ . СУ (9)–(11) называется *адаптивной в классе Ξ ОУ по отношению к ЦУ (7)*, если неравенство (7) выполнено при всех $\xi \in \Xi$.

Ещё отметим, что наименьшее время $t(\xi)$, начиная с которого во все дальнейшие моменты времени выполнено неравенство $\inf_{s \geq t} \varphi[\sigma(s), s] > 0$, называется *временем адаптации* или, иначе, *временем настройки, временем обучения* адаптивной системы управления (АдСУ). Процедура (10), (11) называется *алгоритмом адаптации*.

В случае когда АдСУ предназначена для поддержания некоторых характеристик ОУ на каком-то конкретном уровне в заданных пределах, говорят об *адаптивном регуляторе* (АР). АР включает в себя сам *регулятор* и *адаптор* – устройство, назначение которого состоит в настройке регулятора. *Системой адаптивного управления* называют систему, объединяющую ОУ и АдСУ.

К АдСУ предъявляется требование практической приемлемости, а именно время $t(\xi)$ адаптации не должно быть слишком большим. После завершения процесса адаптации АдСУ значения параметра $\omega(\xi)$ не найдёт, а только получит некоторую его оценку $\tau[t(\xi)]$, при которой будет выполнено ЦУ. Построение АдСУ в виде соотношений (9)–(11) для конструирования $\psi(\sigma, \tau, t)$ и $Q(\tau)$ называют *синтезом АдСУ*. На практике, очевидно, нужно уметь так формулировать закон управления (9) и ЦУ (7), чтобы синтез АдСУ был возможен.

Обратим теперь внимание на важную задачу об адаптивной стабилизации линейного ОУ. Предположим, что ОУ задаётся уравнением

$$\sum_{k=0}^{m_1} B_k y^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^{m_2} C_k u^{(k)}(t) + v(t), \quad (12)$$

где $y(t)$ – m -я компонента вектор-функции выходов ОУ, $u(t)$ – l -я компонента вектор-функции управлений, $v(t)$ – m -я компонента вектор-функции внешних возмущений.

Будем считать, что $v(t)$ равномерно ограничена по t :

$$\sup_t \|v(t)\| < \infty.$$

Считаем также, что матрицы $B_k \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$, $C_k \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^l$ не зависят от t . Видим, что ОУ (12) является частным случаем ОУ (6). Пусть матрица B_{m_1} известна и невырождена. Тогда можно положить, что $B_{m_1} = I_m$ – единичная матрица порядка m . Кроме того, пусть матрица C_{m_2} известна, причём матрица $C_{m_2} C_{m_2}^*$ невырождена. Остальные коэффициенты ОУ считаются неизвестными и их объединение даёт вектор неизвестных параметров ξ . Пусть также элементы вектор-функции $v(t)$ не измеряются.

Задача о стабилизации ОУ (12) ставится так: требуется найти такие управления $u(t)$, при которых выход ОУ удовлетворял бы условию $\|y(t)\| < \varepsilon_0$, где ε_0 – заданное положительное число.

Приходим при синтезе АР к задаче о нахождении матричного решения τ неравенств $\varphi(\tau, t) > 0$, где для целевой функции $\varphi(\tau, t)$ существует решение τ_* такое, что для всех t имеет место “усиленное” неравенство $\varphi(\tau_*, t) \geq \varepsilon_*$, $\varepsilon_* > 0$. Значения $\varphi(\tau, t)$ известны для любых t ; функция $\varphi(\tau, t)$ выпукла по τ . Поэтому для решения неравенств $\varphi(\tau, t) > 0$ можно воспользоваться матричным аналогом КСА с произвольной матрицей $\tau(t_0)$ соответствующей размерности.

Возьмём рекуррентную процедуру для нахождения матричной функции $\tau(t)$ вида

$$\tau(t+) = \tau(t-0) + \gamma(t-0)\theta(t)\nabla_{\tau}\varphi(\tau-0, t-0), \quad (13)$$

где

$$\theta(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } \varphi[\tau(t), t] \leq 0, \\ 0, & \text{если } \varphi[\tau(t), t] > 0, \end{cases}$$

$\gamma(t)$ – некоторые положительные функции, $\nabla_{\tau}\varphi(\tau, t)$ – градиент функции φ по матричному аргументу τ . Выражения для $\varphi(\cdot)$, $\nabla_{\tau}\varphi(\cdot)$ можно найти в работе [1, с. 34].

Функции $\gamma(t)$ вычисляются по формуле

$$\gamma(t) = \frac{1}{\varkappa(t)} - \frac{\beta(t)\varphi[\tau(t), t]}{\|\nabla_{\tau}\varphi[\tau(t), t]\|^2}, \quad (14)$$

где функция $\varkappa(t)$ определяется согласно рекуррентной процедуре

$$\varkappa(t+0) = \varkappa(t-0) + \theta(t), \quad \varkappa(t_0) = 1, \quad \beta(t) \in [0, 2].$$

Здесь $\beta(t)$ – произвольная функция со значениями из промежутка $[0, 2]$,

$$\|\nabla_{\tau}\varphi(\tau, t)\|^2 = \text{Sp} \{ [\nabla_{\tau}\varphi(\tau, t)]^* \nabla_{\tau}\varphi(\tau, t) \}.$$

Можно показать, что при всех t, s таких, что $t > s$, справедливо неравенство

$$\|\tau_* - \tau(s)\| \geq \|\tau_* - \tau(t)\|,$$

где $\|\tau\|^2 = \text{Sp}(\tau^*\tau)$, откуда следует, что с течением времени $\tau(t) \rightarrow \tau_*$; τ_* – искомый матричный параметр. Если

$$\sup_t \|\nabla_{\tau}\varphi[\tau(t), t]\| < \infty,$$

то легко показать, что алгоритм (13), (14) – это КСА, так как

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \theta(t) = 0, \quad (15)$$

и в процессе обучения будет лишь конечное число коррекций коэффициентов регулятора. Из двузначности $\theta(t)$, а также из условия (15) вытекает, что $\theta(t) \equiv 0$ при достаточно больших t .

4. Общая задача о самообучении. Ставится задача о самообучении, т.е. обучении “без учителя”, при условии, что в анализ добавляется ещё одна переменная, принимающая смысл времени. Это условие в постановке задачи существенным образом её усложняет. Происходит тем самым не только разбиение пространства признаков на конечное число подмножеств, но и учёт происходящих при этом изменений во временной области. Такая задача может считаться новой.

Перейдём теперь к пояснениям, необходимым для формулировки основной задачи о самообучении. Требуется всё множество изображений разбить на l классов. Введём в рассмотрение случайную функцию (случайный процесс), характеризующую расстояние от точки $x(\omega, t)$ до

некоторой неизвестной пока особой точки (центра) класса. В этом случае классификация “во времени” может быть основана на требовании, чтобы каждый элемент x каждого класса был удалён от особой точки класса на расстояние меньшее, чем от особых точек других классов.

Важно отметить, что данное условие можно связать с минимизацией *функционала среднего риска* на рассматриваемом промежутке времени $[t_0, t_1]$. Более подробную информацию об этом функционале можно найти в работах [1, 2]. Задачу самообучения будем считать решённой, если по тренировочному множеству удастся найти особые точки (центры) $\tau^{(1)}, \dots, \tau^{(l)}$ и границы соответствующих множеств, для которых риск будет минимален.

Итак, пусть пространство признаков $X(t) \subset \mathbb{R}^q$ разбито на l непересекающихся подмножеств $X^{(1)}(t), \dots, X^{(l)}(t)$; оно подвержено деформации во времени, на что указывает зависимость от времени t . Обозначим через $\tau^{(k)}(t)$, $k = \overline{1, l}$, особые точки (центры) выделенных множеств.

Зададим далее $R_k[x]$, $k = \overline{1, l}$, – произвольные функции, характеризующие расстояние от изображения $x(t) = x(\omega, t)$ до особой точки (центра) $\tau^{(k)}(t)$, $k = \overline{1, l}$, соответствующего класса, используя выражение $\rho_k[x(t), \tau^{(k)}(t)] = R_k[x(t) - \tau^{(k)}(t)]$. Здесь функция $\rho_k[x(t), \tau^{(k)}(t)]$ играет роль *функции потерь* или *функции штрафов* для изображений k -го класса, $k = \overline{1, l}$. С учётом того, что $x(t) = x(\omega, t)$ – случайный вектор процессов, средний риск (средний штраф) можно представить в виде

$$W = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{k=1}^l p_k(t) \int_{X^{(k)}(t)} R_k[x - \tau^{(k)}(t)] p_k[x, t] dx dt, \quad (16)$$

где с помощью вероятностей введены обозначения для плотностей распределения непрерывных случайных величин (изображений) $x(t)$ при данном t :

$$p_k(t) = P\{x(\omega, t) \in X^{(k)}(t)\}, \quad k = \overline{1, l}, \quad t \in [t_0, t_1],$$

$$p_k[x, t] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{P\{[x(\omega, t) \in D_\varepsilon(x)] \cap X^{(k)}(t)\}}{P[x(\omega, t) \in D_\varepsilon(x)] V_\varepsilon(x)},$$

здесь $D_\varepsilon(x)$ – шар радиуса ε с центром в точке x , $V_\varepsilon(x)$ – объём этого шара, в предположении, что написанный предел существует.

Пользуясь структурой функций $p_k(t)$ и $p_k[x, t]$, можно ввести плотность распределения изображений $p[x, t] = \sum_{k=1}^l p_k(t) p_k[x, t]$. Тогда средний риск (16) запишется как

$$W = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{k=1}^l \int_{X^{(k)}(t)} R_k[x - \tau^{(k)}(t)] p[x, t] dx dt. \quad (17)$$

Переход от (16) к (17) возможен в силу сделанного предположения о непересекаемости множеств $X^{(k)}(t)$. При формировании общей функции потерь в виде

$$Q[x, \tau, t] = \sum_{k=1}^l R_k[x - \tau^{(k)}(t)] I^{(k)}[x, t],$$

где $\tau(t) = (\tau^{(1)}(t), \dots, \tau^{(l)}(t))$ – набор векторов $\tau^{(k)}(t)$, $I^{(k)}[x, t]$ – индикатор (характеристическая функция) множества $X^{(k)}(t)$, $k = \overline{1, l}$, $t \in [t_0, t_1]$, *общий средний риск* можно записать следующим образом:

$$W(\tau) = \int_{t_0}^{t_1} \int_X \sum_{k=1}^l R_k[x - \tau^{(k)}(t)] I^{(k)}[x, t] p[x, t] dx dt = \int_{t_0}^{t_1} M_x Q[x, \tau, t] dt, \quad (18)$$

где $M_x Q[x, \tau, t]$ – среднее по x функции $Q[x, \tau, t]$. Задача, таким образом, ставится так: требуется с учётом введённых функций потерь и общей функции потерь произвести разбиение множества изображений на классы путём минимизации соответствующего функционала общего среднего риска (18), добиваясь тем самым построения разделяющих функций, с помощью которых решается поставленная задача разбиения пространства признаков на классы. В этом, собственно, и заключается основная решаемая задача в рамках концепции минимизации функционала (18) в задаче о самообучении [1, 2].

В работе [1. с. 174] *особыми точками (центрами)* множеств названы параметры с экстремальными значениями. Множество разделяющих поверхностей параметризуют, что приводит к вариационной задаче для нахождения экстремальных значений параметров разделяющих поверхностей и отвечающих им центров (особых точек) классов. При варьировании обозначенных параметров получим уравнения, решив которые, найдём экстремальные параметры. В случае когда плотность $p[x, t]$ распределения изображений не известна, следует оценивать параметры с использованием тренировочного множества в виде некоторой обучающей выборки [1].

Теорема ниже помогает определить условия, которым должны удовлетворять экстремальные параметры задачи. Пользуясь стандартными приёмами вариационного исчисления [7, 8], эти условия можно найти из равенства нулю вариации функционала (18). Особенностью здесь является то, что варьированию подлежит не только подынтегральное выражение, но и меняющиеся пределы интегрирования.

5. Основные результаты. Будем считать, что промежуток времени $[t_0, t_1]$ не фиксирован и точка t_1 , где $t_1 > t_0$, может принимать произвольные переменные значения, т.е. величина t_1 варьируема. Через $o(z)$ обозначаем величину, для которой $\lim_{|z| \rightarrow 0} (o(z)/|z|) = 0$.

Теорема 1. Пусть $R: \mathbb{R}_u^q \times \mathbb{R}_x^q \times \mathbb{R}_t^1 \rightarrow \mathbb{R}$ – непрерывная по всем переменным функция, гладкая по переменной u , финитная по переменным x и t ; $g: \mathbb{R}_x^q \times \mathbb{R}_t^1 \rightarrow \mathbb{R}^q$ – непрерывная вектор-функция; f – гладкая вещественная функция, задающая множество $S_+(t) = \{x \in \mathbb{R}^q: f(x, t) > 0\}$. Тогда вариация функционала

$$W = W(t_1, g) = \int_{t_0}^{t_1} \int_{S_+(t)} R(g(x, t), x, t) dx dt$$

имеет вид

$$\delta W = \int_{S_+(t_1)} R(g(x, t_1), x, t_1) dx \delta t_1 + \int_{t_0}^{t_1} \int_{S_+(t)} \nabla_u R(g(x, t), x, t) \cdot \delta g(x, t) dx dt,$$

где $\nabla_u R(u, x, t)$ – градиент функции R по переменной u , а знак “ $\cdot$ ” обозначает скалярное произведение.

Доказательство. Запишем приращение функционала

$$\begin{aligned} \Delta W &= W(t_1 + \delta t_1, g + \delta g) - W(t_1, g) = \\ &= \int_{t_0}^{t_1 + \delta t_1} \int_{S_+(t)} R(g(x, t) + \delta g(x, t), x, t) dx dt - \int_{t_0}^{t_1} \int_{S_+(t)} R(g(x, t), x, t) dx dt = \\ &= \int_{t_1}^{t_1 + \delta t_1} \int_{S_+(t)} R(g(x, t) + \delta g(x, t), x, t) dx dt + \int_{t_0}^{t_1} \int_{S_+(t)} (R(g(x, t) + \delta g(x, t), x, t) - R(g(x, t), x, t)) dx dt. \quad (19) \end{aligned}$$

Первый интеграл в правой части формулы (19) представим в силу теоремы о среднем в виде

$$\int_{t_1}^{t_1+\delta t_1} \int_{S_+(t)} R(g(x,t) + \delta g(x,t), x, t) dx dt = \int_{S_+(t)} R(g(x,t) + \delta g(x,t), x, t) dx \Big|_{t=t_1+\theta\delta t_1} \delta t_1, \quad (20)$$

где $\theta \in (0, 1)$. Так как функция R по условию финитна по x и t , то найдётся такой компакт K , что $R(u, x, t) = 0$ при $x \notin K$. Тогда

$$\int_{S_+(t)} R(g(x,t) + \delta g(x,t), x, t) dx \Big|_{t=t_1+\theta\delta t_1} = \int_{S_+(t) \cap K} R(g(x,t) + \delta g(x,t), x, t) dx \Big|_{t=t_1+\theta\delta t_1}.$$

Учитывая гладкость функции f и равномерную непрерывность функций R и g , можно записать равенство

$$\int_{S_+(t) \cap K} R(g(x,t) + \delta g(x,t), x, t) dx \Big|_{t=t_1+\theta\delta t_1} = \int_{S_+(t_1) \cap K} R(g(x, t_1), x, t_1) dx + \sigma,$$

где $\sigma \rightarrow 0$ при $\delta t_1, \delta g \rightarrow 0$. Поэтому, принимая во внимание формулу (20), имеем

$$\int_{t_1}^{t_1+\delta t_1} \int_{S_+(t)} R(g(x,t) + \delta g(x,t), x, t) dx dt = \int_{S_+(t_1)} R(g(x, t_1), x, t_1) dx \cdot \delta t_1 + \sigma \cdot \delta t_1. \quad (21)$$

Рассмотрим подынтегральную функцию второго слагаемого правой части формулы (19). Пользуясь формулой Тейлора, получаем

$$\int_{S_+(t)} (R(g(x,t) + \delta g(x,t), x, t) - R(g(x,t), x, t)) dx = \int_{S_+(t)} (\nabla_u R(g(x,t), x, t), \delta g(x,t)) dx + o(\delta g).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{t_1} \int_{S_+(t)} (R(g(x,t) + \delta g(x,t), x, t) - R(g(x,t), x, t)) dx dt = \\ & = \int_{t_0}^{t_1} \int_{S_+(t)} (\nabla_u R(g(x,t), x, t), \delta g(x,t)) dx dt + o(\delta g). \end{aligned} \quad (22)$$

Сопоставив формулы (19), (21) и (22), имеем

$$\Delta W = \int_{S_+(t_1)} R(g(x, t_1), x, t_1) dx \cdot \delta t_1 + \sigma \cdot \delta t_1 + \int_{t_0}^{t_1} \int_{S_+(t)} (\nabla_u R(g(x,t), x, t), \delta g(x,t)) dx dt + o(\delta g).$$

Главная часть этого выражения, линейная по δt_1 и δg , даёт требуемую формулу для вариации δW . Теорема доказана.

Сформулируем следствие из этой теоремы для фиксированного промежутка времени $[t_0, t_1]$ и специального вида подынтегральной функции.

Следствие. Пусть f – гладкая вещественная функция, задающая множество $S_+(t) = \{x \in \mathbb{R}^q: f(x, t) > 0\}$; $R: \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}$ – гладкая функция; $\tau: [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^q$ – непрерывная вектор-функция; $p: \mathbb{R}_x^q \times \mathbb{R}_t^1 \rightarrow \mathbb{R}$ – непрерывная финитная функция. Тогда вариация функционала

$$W = W(\tau) = \int_{t_0}^{t_1} \int_{S_+(t)} R(x - \tau(t)) p(x, t) dx dt$$

имеет вид

$$\delta W = - \int_{t_0}^{t_1} \int_{S_+(t)} (\nabla R(x - \tau(t)), \delta \tau(t)) p(x, t) dx dt.$$

Доказательство. Для доказательства достаточно в теореме 1 положить $\delta t_1 = 0$, $g(x, t) = x - \tau(t)$, а в качестве $R(u, x, t)$ взять функцию $R(u)p(x, t)$.

В следующей теореме полагаем, что промежуток времени $[t_0, t_1]$ фиксирован и полностью определён.

Теорема 2. Пусть $R: \mathbb{R}_x^q \times \mathbb{R}_t^1 \rightarrow \mathbb{R}$ – гладкая финитная функция; f – гладкая вещественная функция, задающая поверхность $S(t) = \{x \in \mathbb{R}^q: f(x, t) = 0\}$; $\nabla_x f(x, t) \neq 0$ при $x \in S(t)$. Положим

$$S_+(t) = \{x \in \mathbb{R}^q: f(x, t) > 0\}.$$

Тогда вариация функционала

$$W = W(f) = \int_{t_0}^{t_1} \int_{S_+(t)} R(x, t) dx dt$$

имеет вид

$$\delta W = \int_{t_0}^{t_1} \int_{S(t)} \frac{\delta f(x, t)}{\|\nabla_x f(x, t)\|} R(x, t) ds dt.$$

Доказательство. (См. также работы [6, 9, 10].) Положим

$$S'_+(t) = \{x: f(x, t) + \delta f(x, t) > 0\}.$$

Запишем приращение функционала W :

$$\begin{aligned} \Delta W &= W(f + \delta f) - W(f) = \int_{t_0}^{t_1} \int_{S'_+(t)} R(x, t) dx dt - \int_{t_0}^{t_1} \int_{S_+(t)} R(x, t) dx dt = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \left(\int_{S'_+(t)} R(x, t) dx - \int_{S_+(t)} R(x, t) dx \right) dt. \end{aligned}$$

Обозначив через $V(t)$ объём, заключённый между поверхностями $S(t)$ и

$$S'(t) = \{x \in \mathbb{R}^q: f(x, t) + \delta f(x, t) = 0\},$$

получим

$$\Delta W = \int_{t_0}^{t_1} \int_{V(t)} R(x, t) dx dt. \quad (23)$$

Взяв произвольную точку $x \in S(t)$, обозначим через x' такую точку на $S'(t)$, что

$$x' = x + \alpha \frac{\nabla_x f(x, t)}{\|\nabla_x f(x, t)\|} = x + \delta x, \quad (24)$$

где α – некоторая малая скалярная величина. Для интеграла по объёму в соотношении (23) имеем

$$\int_{V(t)} R(x, t) dx = \int_{S(t)} \int_x^{x'} R(x, t) dz \vec{ds},$$

где $\vec{ds}$ – ориентированный по антиградиенту $-\nabla_x f(x, t)$ элемент площади на поверхности $S(t)$.

В силу того, что функция $R(x, t)$ равномерно непрерывна, а точка x' близка к точке x , т.е. вариация δx мала, получим равенства

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_{V(t)} R(x, t) dx dt = \int_{t_0}^{t_1} \int_{S(t)} R(x, t) \int_x^{x'} dz \vec{ds} dt + o(\|\delta x\|) = \int_{t_0}^{t_1} \int_{S(t)} R(x, t) (\delta x, \vec{ds}) dt + o(\|\delta x\|). \quad (25)$$

Формула (24) позволяет вычислить δx . В силу дифференцируемости функций f и δf справедливы соотношения

$$f(x + \delta x, t) = f(x, t) + (\nabla_x f(x, t), \delta x) + o(\|\delta x\|),$$

$$\delta f(x + \delta x, t) = \delta f(x, t) + (\nabla_x \delta f(x, t), \delta x) + o(\|\delta x\|).$$

Поэтому, принимая во внимание определение множества $S'(t)$, находим

$$0 = f(x', t) + \delta f(x', t) = f(x + \delta x, t) + \delta f(x + \delta x, t) = f(x, t) + (\nabla_x f(x, t), \delta x) + \delta f(x, t) + o(\|\delta x\|).$$

Так как $f(x, t) = 0$ при $x \in S(t)$, то

$$0 = (\nabla_x f(x, t), \delta x) + \delta f(x, t) + o(\|\delta x\|).$$

Отсюда с помощью формулы (24) найдём

$$\delta x = -\frac{\delta f(x, t) \cdot \nabla_x f(x, t)}{\|\nabla_x f(x, t)\|^2} + \frac{\nabla_x f(x, t)}{\|\nabla_x f(x, t)\|^2} o(\|\delta x\|). \quad (26)$$

Так как функция f гладкая и $\nabla_x f(x, t) \neq 0$ при $x \in S(t)$, то величина $\|\nabla_x f(x, t)\|^{-1}$ ограничена некоторым числом C на множестве $\{(x, t) : t \in [t_0, t_1], x \in S(t) \cap K\}$, где K – компакт, такой что $R(x, t) = 0$ при $x \notin K$. Следовательно,

$$\|\delta x\| \leq C |\delta f(x, t)| + o(\|\delta x\|) \leq C \max_{\substack{x \in K \\ t \in [t_0, t_1]}} |\delta f(x, t)| + o(\|\delta x\|).$$

Учитывая, что δx стремится к нулю вместе с величиной δf , при $\delta f \rightarrow 0$ получаем

$$o(\|\delta x\|) = o\left(\max_{\substack{x \in K \\ t \in [t_0, t_1]}} |\delta f(x, t)|\right).$$

Таким образом, из формулы (26) следует

$$\delta x = -\frac{\delta f(x, t) \cdot \nabla_x f(x, t)}{\|\nabla_x f(x, t)\|^2} + o\left(\max_{\substack{x \in K \\ t \in [t_0, t_1]}} |\delta f(x, t)|\right).$$

Подставив последние два выражения в соотношение (25), получим

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_{V(t)} R(x, t) dx dt = \int_{t_0}^{t_1} \int_{S(t)} \frac{\delta f(x, t)}{\|\nabla_x f(x, t)\|} R(x, t) ds dt + o\left(\max_{x \in K, t \in [t_0, t_1]} |\delta f(x, t)|\right), \quad (27)$$

где $ds = -(\vec{ds}, \nabla_x f(x, t)) / \|\nabla_x f(x, t)\|$.

Сопоставляя соотношения (23) и (27), оставляя главную линейную по δf часть приращения ΔW , получаем требуемую формулу для вариации функционала W . Теорема доказана.

Возвращаясь к функционалу общего среднего риска (18), представим вариацию δW в виде суммы двух вариаций: $\delta W = \delta_1 W + \delta_2 W$, где вариация $\delta_1 W$ связана с изменением особой точки (центров, параметров) $\tau^{(1)}(t), \dots, \tau^{(l)}(t)$, а вариация $\delta_2 W$ – с изменением множеств $X^{(1)}(t), \dots, X^{(l)}(t)$, $t \in [t_0, t_1]$.

Просчитаем эти вариации. Пользуясь выражением (17) и следствием, находим

$$\delta_1 W = - \int_{t_0}^{t_1} \sum_{k=1}^l \int_{X^{(k)}(t)} (\nabla R_k[x - \tau^{(k)}(t)], \delta \tau^{(k)}(t)) p[x, t] dx dt. \quad (28)$$

Чтобы вычислить вариацию $\delta_2 W$, обратимся к теореме 2. Для записи функционала W в требуемой форме введём в рассмотрение дискриминантные (разделяющие) функции $f^{(k)}$:

$$f^{(k)}(x, t) = \begin{cases} \inf_{y \notin X^{(k)}(t)} \|x - y\|, & \text{если } x \in X^{(k)}(t), \\ - \inf_{y \in X^{(k)}(t)} \|x - y\|, & \text{если } x \notin X^{(k)}(t), \end{cases} \quad (29)$$

где $t \in [t_0, t_1]$; $f^{(k)}(x, t)$ – разность расстояний от изображения x до множества $X \setminus X^{(k)}(t)$ и от изображения x до множества $X^{(k)}(t)$.

Из соотношений (29) имеем: $f^{(k)}(x, t) \geq 0$, если $x \in X^{(k)}(t)$, и $f^{(k)}(x, t) < 0$, если $x \in X \setminus X^{(k)}(t)$, а знак равенства достигается лишь на границе $S_k(t)$ множества $X^{(k)}(t)$. Тогда выражение для W можно уточнить (ср. с выражением (17)):

$$W = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{k=1}^l \int_{S_+^{(k)}(t)} R_k[x - \tau^{(k)}(t)] p[x, t] dx dt,$$

где $S_+^{(k)}(t) = \{x : f^{(k)}(x, t) > 0\}$; считается также, что граница $S_k(t) = \{x : f^{(k)}(x, t) = 0\}$ множества $X^{(k)}(t)$ имеет нулевую меру, т.е. интегралы по множествам $S_+^{(k)}(t)$ и $S_\oplus^{(k)}(t) = \{x : f^{(k)}(x, t) \geq 0\}$ совпадают.

По теореме 2 требуется, чтобы $\nabla_x f^{(k)}(x, t) \neq 0$, $x \in S_k(t)$. С учётом формул (29) получим, что $\nabla_x f^{(k)}(x, t)|_{x \in S_k(t)} = -n_k$, где n_k – единичный вектор внешней нормали к границе $S_k(t)$ множества $X^{(k)}(t)$ в предположении, что этот вектор существует для всех точек $S_k(t)$. Про-варьируем разделяющие функции $f^{(k)}(x, t)$; их гладкие вариации обозначим через $\delta f^{(k)}(x, t)$. Тогда по теореме 2 найдём

$$\delta_2 W = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{k=1}^l \int_{S_k(t)} \delta f^{(k)}(x, t) R_k[x - \tau^{(k)}(t)] p[x, t] ds dt, \quad (30)$$

ввиду того, что $\|\nabla_x f^{(k)}(x, t)\|_{x \in S_k(t)} = 1$, $k = \overline{1, l}$. Формула (30) даёт соответствующую запись для вариации $\delta_2 W$, связанной с изменением множеств $X^{(k)}(t)$.

Если точка x принадлежит границе двух множеств $X^{(q)}(t)$ и $X^{(r)}(t)$, т.е. $x \in S_q(t) \cap S_r(t)$, то имеет место равенство

$$\delta f^{(q)}(x, t) = -\delta f^{(r)}(x, t). \quad (31)$$

Для решения экстремальной задачи необходимо, чтобы $\delta_1 W = 0$, $\delta_2 W = 0$. Из соотношения (28) следует необходимое условие

$$\int_{S_+^{(k)}(t)} \nabla R_k[x - \tau^{(k)}(t)] p[x, t] dx = 0. \quad (32)$$

Из равенства $\delta_2 W = 0$ с учётом соотношений (30) и (31) получим, что для любого x , принадлежащего границе множеств $X^{(q)}(t)$ и $X^{(r)}(t)$, когда $p[x, t] \neq 0$, должно быть выполнено также необходимое условие

$$R_q[x - \tau^{(q)}(t)] = R_r[x - \tau^{(r)}(t)]. \quad (33)$$

Таким образом, экстремальные множества $X^{(k)}(t)$ и их особые точки (центры, параметры) $\tau^{(k)}(t)$ должны удовлетворять условиям (32), (33). При том, что $x(t) = x(\omega, t)$ – случайная функция (случайный процесс), требование (32) можно записать в виде

$$M\{\nabla R_k[x(\omega, t) - \tau^{(k)}(t)] I^{(k)}[x(\omega, t), t]\} = 0, \quad k = \overline{1, l},$$

где $M\{\cdot\}$ – математическое ожидание (операция усреднения). Эти условия дают уравнения для нахождения особых точек (центров, параметров) $\tau^{(k)}(t)$ классов множества изображений, зная которые можно затем однозначно из (33) определить множества $X^{(k)}(t)$, $t \in [t_0, t_1]$.

Заключение. К задаче самообучения, или к задаче обучения “без учителя”, имеются различные подходы, объединённые общей идеей экстремизации некоторого функционала среднего риска. Эту концепцию авторы данной работы дополнили важной переменной времени, призванной придать изучаемой задаче ИИ динамический характер. В терминах классического вариационного исчисления определены необходимые условия, при которых рассматриваемый функционал общего среднего риска достигает экстремального значения в процессе самообучения на всём промежутке времени.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Фомин В.Н. Математическая теория обучаемых опознающих систем. Л., 1976.
2. Цыпкин Я.З., Кельманс Г.К. О рекуррентных алгоритмах самообучения // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1967. № 5. С. 78–87.
3. Якубович В.А. Об одной задаче обучения целесообразному поведению // Автоматика и телемеханика. 1969. № 8. С. 119–139.
4. Якубович В.А. Метод рекуррентных целевых неравенств в теории адаптивных систем // Вопросы кибернетики. Адаптивные системы. Науч. совет по комплексной проблеме “Кибернетика” АН СССР. М., 1976. С. 32–64.
5. Фомин В.Н., Фрадков А.Л., Якубович В.А. Адаптивное управление динамическими объектами. М., 1981.
6. Tertychny-Dauri V.Yu. Adaptive Mechanic. Dordrecht; Boston; London, 2002.
7. Гельфанд И.М., Фомин С.В. Вариационное исчисление. М., 1961.
8. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М., 1969.
9. Тertychny-Dauri В.Ю. Решение вариационных динамических задач в условиях параметрической неопределённости // Проблемы передачи информации. 2005. Т. 41. Вып. 1. С. 53–67.
10. Тertychny-Dauri В.Ю. Оптимальная стабилизация в задачах адаптивной ядерной кинетики // Дифференц. уравнения. 2006. Т. 42. № 3. С. 374–384.

Национальный исследовательский университет ИТМО,
г. Санкт-Петербург

Поступила в редакцию 27.12.2022 г.
После доработки 16.05.2023 г.
Принята к публикации 19.05.2023 г.