

УДК 519.63

## РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ДЕКОМПОЗИЦИИ НА ОСНОВЕ РАСЩЕПЛЕНИЯ РЕШЕНИЯ И ОПЕРАТОРА ЗАДАЧИ

© 2023 г. П. Н. Вабищевич

Методы декомпозиции области применяются для приближённого решения краевых задач для уравнений с частными производными на параллельных вычислительных системах. Наиболее полно специфика нестационарных задач учитывается при использовании безытерационных схем декомпозиции области. Регионально-аддитивные схемы строятся на основе различных классов схем расщепления. Выделяется новый класс схем декомпозиции области с аддитивным представлением решения на новом слое по времени, который базируется на разделении области на подобласти на основе разбиения единицы. Рассматривается пример задачи Коши для эволюционных уравнений первого порядка с положительным самосопряжённым оператором в конечномерном гильбертовом пространстве. Строятся безусловно устойчивые двух- и трёхслойные схемы расщепления для соответствующей системы уравнений.

DOI: 10.31857/S0374064123070087, EDN: GUXGWW

**Введение.** Итерационное решение многомерных стационарных краевых задач для уравнений с частными производными проводится чаще всего на основе методов декомпозиции области [1, гл. 1]. Специфика нестационарных задач наиболее полно проявляется при использовании безытерационных методов декомпозиции области [2, гл. 8; 3, гл. 9]. Схемы декомпозиции области для решения нестационарных задач можно классифицировать по способу декомпозиции области, по выбору операторов декомпозиции (обменных граничных условий) и по используемой схеме расщепления. Для дифференциальных задач естественно выделять методы декомпозиции области

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{\alpha=1}^p \bar{\Omega}_\alpha, \quad \bar{\Omega}_\alpha = \Omega_\alpha \cup \partial\Omega_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p, \quad (1)$$

с налеганием подобластей ( $\Omega_{\alpha\beta} \equiv \Omega_\alpha \cap \Omega_\beta \neq \emptyset$ ) и без налегания подобластей ( $\Omega_{\alpha\beta} = \emptyset$ ).

С декомпозицией области (1) сопоставляется соответствующее аддитивное представление оператора задачи

$$\mathcal{A} = \sum_{\alpha=1}^p \mathcal{A}_\alpha. \quad (2)$$

В этом случае оператор  $\mathcal{A}_\alpha$  связывается с решением некоторой задачи в подобласти  $\Omega_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2, \dots, p$ . Наиболее общий подход для построения операторов декомпозиции при решении краевых задач для уравнений с частными производными базируется на использовании разбиения единицы для расчётной области. При декомпозиции (1) с отдельной подобластью  $\Omega_\alpha$  свяжем функцию  $\eta_\alpha(\mathbf{x})$ ,  $\alpha = 1, 2, \dots, p$ , такую, что

$$\begin{cases} \eta_\alpha(\mathbf{x}) > 0, & \mathbf{x} \in \Omega_\alpha, \\ \eta_\alpha(\mathbf{x}) = 0, & \mathbf{x} \notin \Omega_\alpha, \end{cases} \quad \alpha = 1, 2, \dots, p, \quad (3)$$

причём

$$\sum_{\alpha=1}^p \eta_\alpha(\mathbf{x}) = 1, \quad \mathbf{x} \in \Omega. \quad (4)$$

Пусть, например, оператор задачи  $A$  есть оператор диффузии:

$$A = -\operatorname{div} k(\mathbf{x}) \operatorname{grad}, \quad \mathbf{x} \in \Omega.$$

Тогда для операторов декомпозиции можно задать три основные конструкции:

$$A_\alpha = \eta_\alpha A, \quad (5)$$

$$A_\alpha = -\operatorname{div} k(\mathbf{x}) \eta_\alpha(\mathbf{x}) \operatorname{grad}, \quad (6)$$

$$A_\alpha = A \eta_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p. \quad (7)$$

Эта технология используется, начиная со статей [4] (декомпозиция (6)), [5] (декомпозиции (5)–(7)), результаты более поздних работ отражены в обзоре [6] и книге [2, гл. 8].

При решении нестационарных задач для задач с расщеплением (2) используются различные схемы расщепления. В теории аддитивных операторно-разностных схем [7, гл. IX; 8; 9, гл. 4] особо выделим случай простейшего двухкомпонентного расщепления, когда строятся безусловно устойчивые факторизованные схемы расщепления, к которым относятся классические схемы переменных направлений, схемы предиктор-корректор. Двухкомпонентные регионально-аддитивные схемы построены и исследованы в работах [4, 5, 10], в статьях [11, 12] рассмотрены задачи конвекции–диффузии.

Для вычислительной практики, в том числе и при применении методов декомпозиции области, большой интерес представляет расщепление оператора задачи на сумму трёх и более попарно некоммутативных операторов ( $p > 2$  в (2)). Стандартные [8; 9, гл. 5] схемы многокомпонентного расщепления строятся на основе понятия суммарной аппроксимации. Аддитивно-усреднённые схемы суммарной аппроксимации [9, гл. 5; 13] более явно ориентированы на параллельную организацию вычислений. Регионально-аддитивные схемы покомпонентного расщепления исследуются в работе [14]. В настоящее время получили распространение схемы полной аппроксимации для общего многокомпонентного расщепления. В связи с этим отметим регуляризованные аддитивные схемы [15], в которых условия устойчивости достигаются за счёт возмущений операторов разностной схемы. В векторных аддитивных схемах [16, 17] вместо одного уравнения решается система однотипных уравнений. Векторные регионально-аддитивные схемы исследуются в работах [18, 19].

В классических схемах расщепления [8; 9, гл. 4, 5] используется аддитивное представление оператора задачи, при этом решение эволюционных задач для отдельных более простых членов оператора обеспечивает менее затратный с вычислительной точки зрения переход на новый слой во времени. Во многих нестационарных задачах удобнее строить вычислительно приемлемые подзадачи на основе декомпозиции решения, когда более простые задачи формулируются для отдельных компонент решения, в частности, для приближённого решения мультифизических задач можно сгруппировать компоненты решения (моnofизические задачи) для соответствующей системы связанных уравнений. Такие схемы расщепления решений предложены и исследованы в [20, 21] для приближённого решения задачи Коши в конечномерном гильбертовом пространстве для эволюционных уравнений первого и второго порядков.

Идея расщепления решения для построения схем расщепления используется в простейшем варианте при построении аддитивно-усреднённых схем [9, гл. 5; 13]. В этом случае можно рассчитывать на параллельную организацию вычислений для отдельных подзадач. В векторных схемах расщепления [9, гл. 8; 16; 17; 22] осуществляется формальное усложнение задачи с переходом от одного уравнения к системе уравнений. При этом приближённое скалярное решение исходной задачи берётся в виде линейной суперпозиции приближений для отдельных компонент вектора вспомогательной задачи для системы уравнений. Целью нашего исследования является построение схем декомпозиции области на основе аддитивного расщепления как оператора задачи, так и самого приближённого решения. В обоих случаях привлекается разложение единицы для сеточной области. Для системы уравнений строятся безусловно устойчивые двух- и трёхслойные схемы первого и второго порядков аппроксимации по времени. Параллельная реализация обеспечивается выделением диагональной части операторной матрицы системы уравнений и решением задачи в отдельной подобласти. Устойчивость двух-

и трёхслойных схем расщепления исследуется с использованием общих результатов теории устойчивости (корректности) операторно-разностных схем [2, гл. 2; 4; 7, гл. VI; 22].

**1. Краевая задача для параболического уравнения.** Рассматривается модельная краевая задача для параболического уравнения второго порядка. В ограниченной области  $\Omega$  неизвестная функция  $u(\mathbf{x}, t)$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{\alpha=1}^m \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \left( k(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial x_{\alpha}} \right) = f(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad 0 < t \leq T, \quad (8)$$

где  $k(\mathbf{x}) \geq \kappa > 0$ ,  $\mathbf{x} \in \Omega$ . Уравнение (8) дополним однородным граничным условием Дирихле

$$u(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega, \quad 0 < t \leq T. \quad (9)$$

Кроме того, задаётся начальное условие

$$u(\mathbf{x}, 0) = u^0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega. \quad (10)$$

Нестационарная задача диффузии (8)–(10) рассматривается на множестве функций  $u(\mathbf{x}, t)$ , удовлетворяющих граничному условию (9). Тогда вместо (8), (9) будем использовать дифференциально-операторное уравнение

$$\frac{du}{dt} + \mathcal{A}u = f(t), \quad 0 < t \leq T. \quad (11)$$

Рассмотрим задачу Коши для эволюционного уравнения (11) с начальным условием

$$u(0) = u^0. \quad (12)$$

Для оператора диффузии положим

$$\mathcal{A}u = - \sum_{\alpha=1}^m \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \left( k(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial x_{\alpha}} \right).$$

На множестве достаточно гладких функций, удовлетворяющих (9), определим гильбертово пространство  $\mathcal{H} = \mathcal{L}_2(\Omega)$  со скалярным произведением и нормой

$$(u, v) = \int_{\Omega} u(\mathbf{x})v(\mathbf{x})d\mathbf{x}, \quad \|u\| = (u, u)^{1/2}.$$

В  $\mathcal{H}$  оператор диффузионного переноса  $\mathcal{A}$  самосопряжён и положительно определён:

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}^* \geq \kappa\delta\mathcal{I}, \quad \delta = \delta(\Omega) > 0, \quad (13)$$

где  $\mathcal{I}$  – единичный оператор в пространстве  $\mathcal{H}$ .

Приведём для решения задачи (11)–(13) простейшую априорную оценку, которая будет для нас ориентиром при рассмотрении сеточных задач. С самосопряжённым положительно определённым оператором  $\mathcal{D}$  свяжем гильбертово пространство  $\mathcal{H}_{\mathcal{D}}$ , скалярное произведение и норма в котором определяются формулами

$$(u, v)_{\mathcal{D}} = (\mathcal{D}u, v), \quad \|u\|_{\mathcal{D}} = (u, u)_{\mathcal{D}}^{1/2}$$

соответственно. Домножим скалярно в  $\mathcal{H}$  уравнение (11) на  $\mathcal{A}u$ . С учётом (13) придём к равенству

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|_{\mathcal{A}}^2 + \|\mathcal{A}u\|^2 = (f, \mathcal{A}u). \quad (14)$$

Принимая во внимание, что

$$(f, \mathcal{A}u) \leq \|\mathcal{A}u\|^2 + \frac{1}{4}\|f\|^2,$$

из (14) получаем

$$\frac{d}{dt}\|u\|_{\mathcal{A}}^2 \leq \frac{1}{2}\|f\|^2.$$

Ввиду леммы Гронуолла приходим к искомой оценке

$$\|u(t)\|_{\mathcal{A}}^2 \leq \|u^0\|_{\mathcal{A}}^2 + \frac{1}{2} \int_0^t \|f(\theta)\|^2 d\theta, \tag{15}$$

которая выражает устойчивость решения задачи (11)–(13) по начальным данным и правой части.

**2. Стандартные разностные схемы.** Исследование аппроксимаций по пространству и времени проведём на примере краевых задач в прямоугольнике

$$\Omega = \{\mathbf{x} : \mathbf{x} = (x_1, x_2), \quad 0 < x_\alpha < l_\alpha, \quad \alpha = 1, 2\}.$$

Приближённое решение задаётся на сетке в узлах равномерной прямоугольной сетки в  $\Omega$ :

$$\bar{\omega} = \{\mathbf{x} : \mathbf{x} = (x_1, x_2), \quad x_\alpha = i_\alpha h_\alpha, \quad i_\alpha = 0, 1, \dots, N_\alpha, \quad N_\alpha h_\alpha = l_\alpha\},$$

и пусть  $\omega$  – множество внутренних узлов ( $\bar{\omega} = \omega \cup \partial\omega$ ). Для сеточных функций  $y(\mathbf{x}) = 0$ ,  $\mathbf{x} \in \partial\omega$ , определим гильбертово пространство  $H = L_2(\omega)$  со скалярным произведением и нормой

$$(y, w) = \sum_{\mathbf{x} \in \omega} y(\mathbf{x})w(\mathbf{x})h_1h_2, \quad \|y\| = (y, y)^{1/2}.$$

Считая коэффициент  $k(\mathbf{x})$  в области  $\Omega$  достаточно гладким, сеточный оператор диффузии возьмём в виде

$$\begin{aligned} Ay = & -\frac{1}{h_1^2}k(x_1+0.5h_1, x_2)(y(x_1+h_1, x_2)-y(x_1, x_2))+\frac{1}{h_1^2}k(x_1-0.5h_1, x_2)(y(x_1, x_2)-y(x_1-h_1, x_2))- \\ & -\frac{1}{h_2^2}k(x_1, x_2+0.5h_2)(y(x_1, x_2+h_2)-y(x_1, x_2))+\frac{1}{h_2^2}k(x_1, x_2-0.5h_2)(y(x_1, x_2)-y(x_1, x_2-h_2)). \end{aligned} \tag{16}$$

В  $H$  оператор  $A$  самосопряжён и положительно определён [7, гл. IV]:

$$A = A^* \geq \kappa(\delta_1 + \delta_2)I, \quad \delta_\alpha = \frac{4}{h_\alpha^2} \sin^2 \frac{\pi h_\alpha}{2l_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2.$$

После аппроксимации по пространству от (8), (9) приходим к дифференциально-разностному уравнению

$$\frac{dy}{dt} + Ay = f(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \omega, \quad 0 < t \leq T. \tag{17}$$

Принимая во внимание (10), уравнение (17) дополним начальным условием

$$y(\mathbf{x}, 0) = u^0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \omega. \tag{18}$$

Для решения дифференциально-разностной задачи Коши (17), (18) справедлива априорная оценка (см. (15))

$$\|y(t)\|_A^2 \leq \|u^0\|_A^2 + \frac{1}{2} \int_0^t \|f(\theta)\|^2 d\theta. \tag{19}$$

Основное внимание мы уделяем аппроксимации по времени. При построении схем декомпозиции области для задачи (17), (18) отправной точкой для нас являются обычные двухслойные схемы. Пусть  $\tau$  есть шаг равномерной сетки по времени и пусть  $y^n = y(t^n)$ ,  $t^n = n\tau$ ,  $n = 0, 1, \dots, N$ ,  $N\tau = T$ . Уравнение (17) аппроксимируем двухслойной схемой с весами

$$\frac{y^{n+1} - y^n}{\tau} + A(\sigma y^{n+1} + (1 - \sigma)y^n) = f^{n+\sigma}, \quad n = 0, 1, \dots, N - 1, \quad (20)$$

где, например,  $f^{n+\sigma} = f(\sigma t^{n+1} + (1 - \sigma)t^n)$ . Она дополняется начальным условием

$$y^0 = u^0. \quad (21)$$

Разностная схема (20), (21) имеет погрешность аппроксимации  $\mathcal{O}(\tau^2 + (\sigma - 1/2)\tau + h^2)$ , где  $h^2 = (h_1^2 + h_2^2)/2$ .

**Теорема 1.** *Разностная схема (20), (21) безусловно устойчива при  $\sigma \geq 1/2$ , причём для разностного решения справедлива оценка*

$$\|y^{n+1}\|_D^2 \leq \|y^n\|_D^2 + \frac{\tau}{2} \|f^{n+\sigma}\|^2, \quad n = 0, 1, \dots, N - 1, \quad (22)$$

где  $D = A + (\sigma - 1/2)\tau A^2$ .

**Доказательство.** Запишем разностную схему (20) в виде

$$\left( I + \left( \sigma - \frac{1}{2} \right) \tau A \right) \frac{y^{n+1} - y^n}{\tau} + A \frac{y^{n+1} + y^n}{2} = f^{n+\sigma}$$

и домножим её скалярно на  $\tau A(y^{n+1} + y^n)$ . Так как при  $\sigma \geq 1/2$  оператор  $D \geq A$ , то

$$\|y^{n+1}\|_D^2 - \|y^n\|_D^2 + \frac{\tau}{2} \|A(y^{n+1} + y^n)\|^2 = \tau(f^{n+\sigma}, A(y^{n+1} + y^n)).$$

Принимая во внимание равенство

$$(f^{n+\sigma}, A(y^{n+1} + y^n)) \leq \frac{1}{2} \|A(y^{n+1} + y^n)\|^2 + \frac{1}{2} \|f^{n+\sigma}\|^2,$$

приходим к доказываемой оценке (22). Теорема доказана.

Априорная оценка (22) решения разностной задачи (20), (21) является сеточным аналогом априорной оценки (19) для решения дифференциально-разностной задачи (17), (18) ( $D = A + \mathcal{O}(\tau)$ ).

При приближённом решении задачи (17), (18) естественно использовать трёхслойные схемы второго порядка аппроксимации по времени. Пусть

$$\frac{y^{n+1} - y^{n-1}}{2\tau} + A(\sigma y^{n+1} + (1 - 2\sigma)y^n + \sigma y^{n-1}) = f^n, \quad n = 1, 2, \dots, N - 1. \quad (23)$$

Начальные условия аппроксимируем следующим образом:

$$y^0 = u^0, \quad \frac{y^1 - y^0}{\tau} + A \frac{y^1 + y^0}{2} = f^{1/2}. \quad (24)$$

Погрешность разностной схемы (23), (24) есть  $\mathcal{O}(\tau^2 + h^2)$ .

**Теорема 2.** *Разностная схема (23), (24) безусловно устойчива при  $\sigma \geq 1/4$ , причём для разностного решения справедлива оценка*

$$\left( \sigma - \frac{1}{4} \right) \tau^2 \left\| \frac{y^{n+1} - y^n}{\tau} \right\|_A^2 + \left\| \frac{y^{n+1} + y^n}{2} \right\|_A^2 \leq$$

$$\leq \left(\sigma - \frac{1}{4}\right)\tau^2 \left\| \frac{y^n - y^{n-1}}{\tau} \right\|_A^2 + \left\| \frac{y^n + y^{n-1}}{2} \right\|_A^2 + \frac{\tau}{2} \|f^n\|^2, \quad n = 0, 1, \dots, N - 1. \quad (25)$$

**Доказательство.** Введём обозначения

$$\zeta^n = \frac{y^n + y^{n-1}}{2}, \quad \eta^n = \frac{y^n - y^{n-1}}{\tau}.$$

Принимая во внимание тождества

$$y^n = \frac{1}{4}(y^{n+1} + 2y^n + y^{n-1}) - \frac{1}{4}(y^{n+1} - 2y^n + y^{n-1}),$$

$$\sigma y^{n+1} + (1 - 2\sigma)y^n + \sigma y^{n-1} = y^n + \sigma(y^{n+1} - 2y^n + y^{n-1}),$$

перепишем (23) в виде

$$\frac{\eta^{n+1} + \eta^n}{2} + \left(\sigma - \frac{1}{4}\right)\tau^2 A \frac{\eta^{n+1} - \eta^n}{\tau} + A \frac{\zeta^{n+1} + \zeta^n}{2} = f^n. \quad (26)$$

Домножим (26) скалярно в  $H$  на

$$2(\zeta^{n+1} - \zeta^n) = \tau(\eta^{n+1} + \eta^n).$$

С учётом введённых обозначений получим

$$\frac{\tau}{2} \|\eta^{n+1} + \eta^n\|^2 + \left(\sigma - \frac{1}{4}\right)\tau^2 (\|\eta^{n+1}\|_A^2 - \|\eta^n\|_A^2) + \|\zeta^{n+1}\|_A^2 - \|\zeta^n\|_A^2 = \tau(f^n, \eta^{n+1} + \eta^n).$$

Используем для правой части оценку

$$(f^n, \eta^{n+1} + \eta^n) \leq \frac{1}{2} \|f^n\|^2 + \frac{1}{2} \|\eta^{n+1} + \eta^n\|^2$$

и будем иметь

$$\left(\sigma - \frac{1}{4}\right)\tau^2 \|\eta^{n+1}\|_A^2 + \|\zeta^{n+1}\|_A^2 \leq \left(\sigma - \frac{1}{4}\right)\tau^2 \|\eta^n\|_A^2 + \|\zeta^n\|_A^2 + \frac{\tau}{2} \|f^n\|^2. \quad (27)$$

В силу введённых обозначений из (27) получим искомую послующую оценку устойчивости (25) для разностного решения. Теорема доказана.

**3. Декомпозиция области.** При обсуждении методов декомпозиции области для задач типа (8)–(10) обычно выделяют два случая: с наложением и без наложения подобластей. Методы без наложения подобластей связываются с явной формулировкой тех или иных условий на общих границах. В нашем случае самостоятельная задача для интерфейсных границ не формулируется, но в алгоритмах без наложения подобластей соответствующие обменные граничные условия можно получить.

Для методов декомпозиции области принципиальным является вопрос об обменах расчётными данными между отдельными подобластями. В этом плане ориентиром могут быть обычные явные схемы. В данном случае декомпозицию области можно связать с отдельными подмножествами сеточных узлов  $\omega_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2, \dots, p$ :

$$\omega = \bigcup_{\alpha=1}^p \omega_\alpha, \quad \omega_\alpha = \{\mathbf{x} \in \omega, \quad \mathbf{x} \in \Omega_\alpha\}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p.$$

В случае (16) (семиточечный шаблон по пространству) переход на новый слой по времени по явной схеме для нахождения приближённого решения на сетке  $\omega_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2, \dots, p$ , связан с использованием значений решения в приграничных узлах.



Рис. 1. Декомпозиция области.

Для рассматриваемых модельных задач в прямоугольнике простейшая декомпозиция по одной переменной на четыре подобласти представлена на рис. 1 с налеганием подобластей.

Несвязные подобласти можно рассматривать как одну подобласть и разбиение на рис. 1 можно рассматривать как разбиение на две подобласти и описывать двумя функциями:  $\eta_\alpha = \eta_\alpha(x_1)$ ,  $\alpha = 1, 2$ . При приближённом решении задачи (17), (18) можно рассматривать две возможности минимального наложения подобластей. Первая из них связана с тем, что разбиение области проводится по целым узлам – граничные узлы принадлежат нескольким подобластям (двум в нашем случае декомпозиции по одной переменной). Вторая возможность реализуется, когда граница подобластей проходит по полуцелым узлам соответствующей переменной.

Вариант с разбиением по целым узлам отображен на рис. 2. Пусть декомпозиция проводится по переменной  $x_1$ , т.е.  $\theta = x_1$ . Область разбивается по узлу  $\theta = \theta_i$ . Операторы декомпозиции строятся, например, на основе (6). С учётом (16) операторы декомпозиции ( $A_1$  в подобласти  $\Omega_1$  и  $A_2$  в подобласти  $\Omega_2$ ) принимают вид

$$\begin{aligned}
 A_1 y &= \frac{1}{h_1^2} k(x_1 - 0.5h_1, x_2)(y(x_1, x_2) - y(x_1 - h_1, x_2)) - \\
 &- \frac{1}{2h_2^2} k(x_1, x_2 + 0.5h_2)(y(x_1, x_2 + h_2) - y(x_1, x_2)) + \frac{1}{2h_2^2} k(x_1, x_2 - 0.5h_2)(y(x_1, x_2) - y(x_1, x_2 - h_2)), \\
 A_2 y &= -\frac{1}{h_1^2} k(x_1 + 0.5h_1, x_2)(y(x_1 + h_1, x_2) - y(x_1, x_2)) - \\
 &- \frac{1}{2h_2^2} k(x_1, x_2 + 0.5h_2)(y(x_1, x_2 + h_2) - y(x_1, x_2)) + \frac{1}{2h_2^2} k(x_1, x_2 - 0.5h_2)(y(x_1, x_2) - y(x_1, x_2 - h_2)), \\
 &x_1 = \theta_i.
 \end{aligned}$$

Такую декомпозицию мы можем связать с использованием граничных условий Неймана в качестве обменных граничных условий. Связь между отдельными подобластями минимальна и обеспечена обменом данных при  $\theta = \theta_i$ . Значения  $\eta_\alpha(x_1 \pm 0.5h_1, x_2)$ ,  $\eta_\alpha(x_1, x_2 \pm 0.5h_1)$ ,  $\alpha = 1, 2$ , равны 0 или 1.

Вторая возможность с декомпозицией по полуцелым узлам иллюстрируется на рис. 3. В узле  $\theta = \theta_i$  используется разностная аппроксимация с меньшим в два раза потоком.

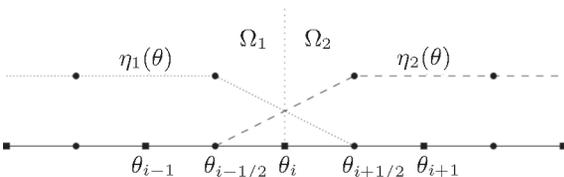


Рис. 2. Декомпозиция по целым узлам.

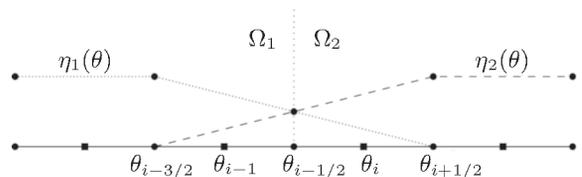


Рис. 3. Декомпозиция по полуцелым узлам.

Применительно к рассматриваемому случаю декомпозиции по переменной  $x_1$  операторы декомпозиции имеют вид

$$\begin{aligned}
 A_1 y &= \frac{1}{2h_1^2} k(x_1 - 0.5h_1, x_2)(y(x_1, x_2) - y(x_1 - h_1, x_2)) - \\
 &- \frac{1}{4h_2^2} k(x_1, x_2 + 0.5h_2)(y(x_1, x_2 + h_2) - y(x_1, x_2)) + \frac{1}{4h_2^2} k(x_1, x_2 - 0.5h_2)(y(x_1, x_2) - y(x_1, x_2 - h_2)),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_2 y = & -\frac{1}{h_1^2} k(x_1 + 0.5h_1, x_2)(y(x_1 + h_1, x_2) - y(x_1, x_2)) + \\
 & + \frac{1}{2h_1^2} k(x_1 - 0.5h_1, x_2)(y(x_1, x_2) - y(x_1 - h_1, x_2)) - \frac{3}{4h_2^2} k(x_1, x_2 + 0.5h_2)(y(x_1, x_2 + h_2) - y(x_1, x_2)) + \\
 & + \frac{3}{4h_2^2} k(x_1, x_2 - 0.5h_2)(y(x_1, x_2) - y(x_1, x_2 - h_2)), \quad x_1 = \theta_i.
 \end{aligned}$$

Для вычислений в области  $\Omega_1$  (см. рис. 3) привлекаются приграничные данные в области  $\Omega_2$  – в узле  $\theta = \theta_i$ . Тем самым при такой декомпозиции области обмены минимальны и совпадают с обменами при реализации явной схемы.

Во втором классе методов декомпозиции области выделяется множество интерфейсных узлов подобластей при решении отдельных задач внутри подобластей. В нашей модельной сеточной задаче в прямоугольнике с квадратной сеткой ( $h = h_1 = h_2$ ) расчётная сетка  $\omega$  разбивается на прямоугольные подобласти грубой сеткой, шаг которой равен  $\hat{h}$ . Границы подобластей (прямые линии) состоят из узлов расчётной сетки. Это множество внутренних граничных узлов обозначим  $\hat{\omega}$ . Фрагмент сетки показан на рис. 4. Подобласть  $\Omega_2$  представляет собой решётку, ширина отдельных рёбер этой решётки равна  $h$ . Область  $\Omega_1$  состоит из несвязанных друг с другом отдельных подобластей.

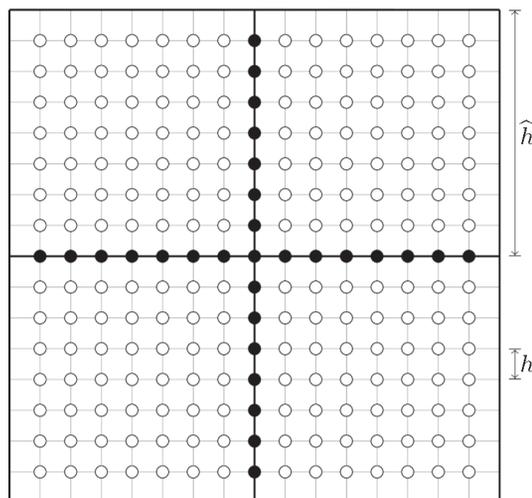


Рис. 4. Сеточная декомпозиция.

Разбиению единицы области (3), (4) сопоставим соответствующее аддитивное представление единицы для сеточных функций, заданных на множестве внутренних узлов  $\omega$ . Положим

$$\sum_{\alpha=1}^p \chi_\alpha = 1, \quad \chi_\alpha \geq 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p. \tag{28}$$

Аналогично (5) операторы декомпозиции зададим в виде

$$A_\alpha = \chi_\alpha A, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p. \tag{29}$$

В силу (28) при таком расщеплении для оператора задачи имеет место аддитивное представление

$$A = \sum_{\alpha=1}^p A_\alpha. \tag{30}$$

Расщепление (30) позволяет от уравнения (17) перейти к уравнению

$$\frac{dy}{dt} + \sum_{\alpha=1}^p A_\alpha y = f(x, t), \quad x \in \omega, \quad 0 < t \leq T. \tag{31}$$

Прямое построение тех или иных схем расщепления для задачи (31), (18) осложнено тем, что отдельные операторные слагаемые  $A_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2, \dots, p$ , не наследуют основные свойства оператора  $A$  – его самосопряжённость и неотрицательность. Однако при использовании операторов декомпозиции (29) уравнение (31) легко симметризуется. Умножив уравнение (31) на самосопряжённый оператор  $A$ , придём к уравнению

$$\tilde{B} \frac{dy}{dt} + \sum_{\alpha=1}^p \tilde{A}_\alpha y = Af(x, t), \quad x \in \omega, \quad 0 < t \leq T, \tag{32}$$

в котором операторы

$$\tilde{B} = A, \quad \tilde{A}_\alpha = A\chi_\alpha A, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p,$$

являются самосопряжёнными и неотрицательными. Более того, можно ввести новые переменные  $v = A^{1/2}y$  и вместо (32) рассматривать уравнение

$$\frac{dv}{dt} + \sum_{\alpha=1}^p \tilde{A}_\alpha v = A^{1/2}f(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \omega, \quad 0 < t \leq T, \quad (33)$$

с самосопряжёнными и неотрицательными операторами

$$\tilde{A}_\alpha = A^{1/2}\chi_\alpha A^{1/2}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p.$$

Обычные оценки решения уравнения (33) по норме пространства  $H$  (для  $\|v\|$ ) соответствуют использованию оценок в  $H_A$  (для  $\|y\|_A$ ).

Конкретизация операторов декомпозиции типа (28), (29) осуществляется выбором слагаемых  $\chi_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2, \dots, p$ . При рассматриваемой декомпозиции области (см. рис. 4) естественно положить

$$\chi_2(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \mathbf{x} \in \hat{\omega}, \\ 0, & \mathbf{x} \notin \hat{\omega}, \end{cases} \quad \chi_1(\mathbf{x}) = 1 - \chi_2(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \omega.$$

Оператор  $A_2$  связывается с интерфейсными узлами  $\hat{\omega}$ , а  $A_1$  – с внутренними узлами подобластей.

Дифференциальному оператору декомпозиции (7) при разложении единицы для сеточной области (28) сопоставим расщепление (30), в котором

$$A_\alpha = A\chi_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p. \quad (34)$$

Для построения и исследования схем расщепления для задачи (18), (30), (31), (34) мы можем аналогично (33) перейти к задаче с самосопряжёнными операторами расщепления  $\tilde{A}_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2, \dots, p$ . Введя новую переменную  $v = A^{-1/2}y$ , получим уравнение

$$\frac{dv}{dt} + \sum_{\alpha=1}^p \tilde{A}_\alpha v = A^{-1/2}f(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \omega, \quad 0 < t \leq T. \quad (35)$$

Несколько более сложная конструкция связывается с оператором декомпозиции (6).

Мы отметили возможность двухкомпонентного расщепления. Однако во многих случаях приходится ориентироваться на более общую ситуацию многокомпонентного расщепления.

**4. Векторная задача.** Для приближённого решения задачи Коши для уравнений (33) и (35) можно применять различные схемы расщепления [9, гл. 3–8]. Наиболее просто строятся аддитивные схемы при двухкомпонентном расщеплении: операторные аналоги схем Писмена–Рекфорда, Дугласа–Рекфорда, факторизованные схемы. При многокомпонентном расщеплении можем ориентироваться на схемы покомпонентного расщепления, среди которых можно выделить в плане возможности организации параллельных вычислений аддитивно-усреднённые схемы суммарной аппроксимации и аддитивные регуляризованные схемы полной аппроксимации. Новый класс аддитивных схем базируется на переходе от одного скалярного уравнения к системе уравнений – векторные аддитивные схемы. В своём исследовании мы помимо расщепления оператора задачи (30) расщепляем и само приближённое решение. В общем виде схемы расщепления решения в различных вариантах рассматриваются в работах [20, 21]. Для отдельных составляющих решения имеем систему связанных уравнений.

Для предложенных методов декомпозиции области на основе разбиения единицы сеточной области введём операторы

$$R_\alpha = \chi_\alpha(\mathbf{x})I, \quad \mathbf{x} \in \omega, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p.$$

Для линейных операторов  $R_\alpha : H \rightarrow H$ ,  $\alpha = 1, 2, \dots, p$ , имеем

$$R_\alpha = R_\alpha^* \geq 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p, \quad \sum_{\alpha=1}^p R_\alpha = I. \quad (36)$$

Ориентируемся на расщепление (30), (34). С учётом обозначений  $u(t) = u(\cdot, t)$  ищется приближённое решение задачи Коши

$$\frac{du}{dt} + \sum_{\beta=1}^p AR_\beta u = f(t), \quad 0 < t \leq T, \quad (37)$$

$$u(0) = u^0. \quad (38)$$

Умножив уравнение (37) на  $R_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2, \dots, p$ , получим

$$R_\alpha \frac{du}{dt} + R_\alpha \sum_{\beta=1}^p AR_\beta u = f_\alpha(t), \quad 0 < t \leq T, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p, \quad (39)$$

где  $f_\alpha(t) = R_\alpha f(t)$ ,  $\alpha = 1, 2, \dots, p$ . Определим вспомогательные функции  $w_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2, \dots, p$ , из уравнений

$$R_\alpha \frac{dw_\alpha}{dt} + R_\alpha \sum_{\beta=1}^p AR_\beta w_\beta = R_\alpha f(t), \quad 0 < t \leq T, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p. \quad (40)$$

Функции  $w_\alpha$  находятся из решения сеточных задач на множестве узлов расчётной сетки  $\omega_\alpha$ , на котором  $\chi_\alpha(x) > 0$ ,  $\alpha = 1, 2, \dots, p$ . С учётом (39) каждая функция  $w_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2, \dots, p$ , сопоставляется с  $u$ . Дополним систему уравнений (40) начальными условиями

$$w_\alpha(0) = u^0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p. \quad (41)$$

**Теорема 3.** Пусть

$$w(t) = \sum_{\alpha=1}^p R_\alpha w_\alpha(t), \quad 0 < t \leq T, \quad (42)$$

где  $w_\alpha(t)$ ,  $\alpha = 1, 2, \dots, p$ , – решение задачи Коши (40), (41). Тогда  $w(t) = u(t)$ , где  $u(t)$  – решение задачи (37), (38).

**Доказательство.** Складывая уравнения (40), получаем

$$\sum_{\alpha=1}^p R_\alpha \frac{dw_\alpha}{dt} + \sum_{\alpha=1}^p R_\alpha A \sum_{\beta=1}^p R_\beta w_\beta = \sum_{\alpha=1}^p R_\alpha f(t).$$

Принимая во внимание (42), для  $w(t)$  имеем уравнение

$$\frac{dw}{dt} + Aw = f(t), \quad 0 < t \leq T.$$

Из (37) и (41) следует начальное условие

$$w(0) = u^0.$$

Эта задача идентична задаче (37), (38) и поэтому  $w(t) = u(t)$  для всех  $0 < t \leq T$ . Теорема доказана.

Удобно ввести вектор искомых величин  $\mathbf{w} = \{w_1, w_2, \dots, w_p\}$ , для начальных данных и правой части положим  $\mathbf{w}^0 = \{u^0, u^0, \dots, u^0\}$ ,  $\mathbf{f} = \{f, f, \dots, f\}$  соответственно. Систему уравнений (40) запишем в виде

$$\mathbf{B} \frac{d\mathbf{w}}{dt} + \mathbf{A}\mathbf{w} = \mathbf{B}\mathbf{f}, \quad 0 < t \leq T, \tag{43}$$

где операторные матрицы

$$\mathbf{B} = \text{diag}\{R_1, R_2, \dots, R_p\}, \quad \mathbf{A} = \{R_\alpha A R_\beta\}, \quad \alpha, \beta = 1, 2, \dots, p. \tag{44}$$

Уравнение (43) дополним начальным условием

$$\mathbf{w}(0) = \mathbf{w}^0. \tag{45}$$

Рассмотрим задачу (43)–(45) на прямой сумме пространств  $\mathbf{H} = H \oplus H \oplus \dots \oplus H$ . Для  $\mathbf{w}, \mathbf{y} \in \mathbf{H}$  скалярное произведение и норма определяются формулами

$$(\mathbf{w}, \mathbf{y}) = \sum_{\alpha=1}^p (w_\alpha, y_\alpha), \quad \|\mathbf{w}\| = (\mathbf{w}, \mathbf{w})^{1/2}.$$

С учётом (44) имеем

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}^* \geq 0, \quad \mathbf{A} = \mathbf{A}^* \geq 0.$$

Неотрицательность операторов  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{A}$  для эволюционного уравнения (43) не позволяет рассчитывать на приемлемые априорные оценки для  $\mathbf{w}(t)$ . В нашем случае достаточно ориентироваться на устойчивость  $w(t)$ , которая определяется (см. (42)) линейной комбинацией отдельных компонент вектора  $\mathbf{w}(t)$ .

Умножим уравнение (43) скалярно в  $\mathbf{H}$  на  $d\mathbf{w}/dt$  и получим

$$\left( \mathbf{B} \frac{d\mathbf{w}}{dt}, \frac{d\mathbf{w}}{dt} \right) + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\mathbf{A}\mathbf{w}, \mathbf{w}) = \left( \mathbf{B}\mathbf{f}, \frac{d\mathbf{w}}{dt} \right). \tag{46}$$

Принимая во внимание неравенство

$$\left( \mathbf{B}\mathbf{f}, \frac{d\mathbf{w}}{dt} \right) \leq \left( \mathbf{B} \frac{d\mathbf{w}}{dt}, \frac{d\mathbf{w}}{dt} \right) + \frac{1}{4} (\mathbf{B}\mathbf{f}, \mathbf{f}),$$

из равенства (46) получаем оценку

$$(\mathbf{A}\mathbf{w}(t), \mathbf{w}(t)) \leq (\mathbf{A}\mathbf{w}^0, \mathbf{w}^0) + \frac{1}{2} \int_0^t (\mathbf{B}\mathbf{f}(\theta), \mathbf{f}(\theta)) d\theta. \tag{47}$$

Для левой части (47) с учётом (42) имеем

$$(\mathbf{A}\mathbf{w}, \mathbf{w}) = \sum_{\alpha=1}^p \left( \sum_{\beta=1}^p R_\alpha A R_\beta w_\beta, w_\alpha \right)_\alpha = \left( A \sum_{\beta=1}^p R_\beta w_\beta, \sum_{\alpha=1}^p R_\alpha w_\alpha \right) = (A\mathbf{w}, \mathbf{w}).$$

Аналогично для правой части (47) с учётом задания начальных данных (45) и правой части уравнения (43) получим

$$(\mathbf{A}\mathbf{w}^0, \mathbf{w}^0) = \|u^0\|_A^2, \quad (\mathbf{B}\mathbf{f}(t), \mathbf{f}(t)) = \|f(t)\|^2.$$

Тем самым приходим к оценке

$$\|\mathbf{w}(t)\|_A^2 \leq \|u^0\|_A^2 + \frac{1}{2} \int_0^t \|f(\theta)\|^2 d\theta$$

для  $w(t)$ , которая совпадает с оценкой решения задачи (36)–(38).

**5. Схемы декомпозиции области.** Построим аппроксимации по времени для задачи Коши (43)–(45), которые обеспечивают переход на новый временной уровень путём решения отдельных задач для компонент вектора решений. Остановимся сначала на двухслойных схемах расщепления [23, гл. 8] для этой векторной задачи, отталкиваясь от стандартных схем с весами.

Для приближённого решения задачи (43), (45) используем схему

$$B \frac{y^{n+1} - y^n}{\tau} + A(\sigma y^{n+1} + (1 - \sigma)y^n) = Bf^{n+\sigma}, \quad n = 0, 1, \dots, N - 1, \quad (48)$$

$$y^0 = w^0. \quad (49)$$

**Теорема 4.** При  $\sigma \geq 1/2$  для векторной схемы (48), (49) с весами имеет место оценка

$$\|y^{n+1}\|_A^2 \leq \|u^0\|_A^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \tau \|f^{k+\sigma}\|^2, \quad n = 0, 1, \dots, N - 1, \quad (50)$$

в которой

$$y^n = \sum_{\alpha=1}^p R_\alpha y_\alpha^n(t), \quad n = 0, 1, \dots, N. \quad (51)$$

**Доказательство.** Подобно доказательству теоремы 1 запишем (48) в виде

$$(B + \tau D) \frac{y^{n+1} - y^n}{\tau} + A \frac{y^{n+1} + y^n}{2} = Bf^{n+\sigma}, \quad n = 0, 1, \dots, N - 1, \quad (52)$$

где  $D = (\sigma - 1/2)A$ . Умножив (52) на  $2(y^{n+1} - y^n)$  с учётом того, что  $D = D^* \geq 0$  при  $\sigma \geq 1/2$ , получим неравенство

$$\frac{2}{\tau} (B(y^{n+1} - y^n), y^{n+1} - y^n) + (Ay^{n+1}, y^{n+1}) - (Ay^n, y^n) \leq 2(Bf^{n+\sigma}, y^{n+1} - y^n).$$

Принимая во внимание, что

$$2(Bf^{n+\sigma}, y^{n+1} - y^n) \leq \frac{2}{\tau} (B(y^{n+1} - y^n), y^{n+1} - y^n) + \frac{\tau}{2} (Bf^{n+\sigma}, f^{n+\sigma}),$$

имеем

$$(Ay^{n+1}, y^{n+1}) \leq (Ay^n, y^n) + \frac{\tau}{2} (Bf^{n+\sigma}, f^{n+\sigma}).$$

Для  $y^n$ , которое определяется согласно (51), это даёт неравенство

$$\|y^{n+1}\|_A^2 \leq \|y^n\|_A^2 + \frac{\tau}{2} \|f^{n+\sigma}\|^2,$$

из которого следует доказываемая оценка (50). Теорема доказана.

На новом слое по времени решение находится из уравнения

$$(B + \sigma\tau A)y^{n+1} = \psi^n, \quad \psi^n = (B - (1 - \sigma)\tau A)y^{n+1} + \tau Bf^{n+\sigma}, \quad n = 0, 1, \dots, N - 1. \quad (53)$$

Для отдельных компонент решения имеем связанную систему уравнений

$$R_\alpha y_\alpha^{n+1} + \sigma\tau \sum_{\beta=1}^p R_\alpha A R_\beta y_\beta^{n+1} = \psi_\alpha^n, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p.$$

Для нахождения решения  $y_\alpha^{n+1}$ ,  $\alpha = 1, 2, \dots, p$ , можем использовать [24, гл. 4] блочные итерационные методы Якоби и блочные треугольные итерационные методы (Seidel, SOR, SSOR).

Такие методы связаны с аддитивным или мультипликативным преобусловливанием Шварца в методах декомпозиции для приближённого решения эллиптических краевых задач. Сеточная задача (53) характеризуется наличием малого параметра – шага по времени  $\tau$ . Кроме того, имеется хорошее начальное приближение  $y_\alpha^n$ ,  $\alpha = 1, 2, \dots, p$ . Эти обстоятельства позволяют ожидать быструю сходимость соответствующих итерационных методов. Мы рассматриваем безытерационные схемы декомпозиции области для нестационарных задач.

Для организации параллельных вычислений наибольший интерес представляют схемы расщепления с выделением диагональной части матрицы оператора  $\mathbf{A}$  на новом слое по времени. В таком варианте аналога блочного метода Якоби положим

$$\mathbf{A}_0 = \text{diag}\{R_1AR_1^*, R_2AR_2^*, \dots, R_pAR_p^*\}.$$

Второй вариант расщепления оператора  $\mathbf{A}$  задачи можно рассматривать как аналог блочного метода Зайделя, когда

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}R_1AR_1 & 0 & \dots & 0 \\ R_2AR_1 & \frac{1}{2}R_2AR_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_pAR_1 & R_pAR_2 & \dots & \frac{1}{2}R_pAR_p \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}R_1AR_1 & R_1AR_2 & \dots & R_1AR_p \\ 0 & \frac{1}{2}R_2AR_2 & \dots & R_2AR_p \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{2}R_pAR_p \end{pmatrix},$$

при этом

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2, \quad \mathbf{A}_1^* = \mathbf{A}_2.$$

Такое расщепление связывается со схемами попеременно-треугольного метода [7, гл. 10; 9, гл. 4; 25, гл. 10]. Работа с блочными треугольными матрицами менее интересна, по сравнению с блочными диагональными матрицами, в плане параллельной реализации. В силу этого ограничимся построением схем декомпозиции области с выделением диагональной части оператора  $\mathbf{A}$ .

Для приближённого решения задачи (43), (45) будем использовать явно-неявную схему первого порядка точности

$$\mathbf{B} \frac{\mathbf{y}^{n+1} - \mathbf{y}^n}{\tau} + \mathbf{A}_0(\sigma \mathbf{y}^{n+1} + (1 - \sigma)\mathbf{y}^n) + (\mathbf{A} - \mathbf{A}_0)\mathbf{y}^n = \mathbf{B}\mathbf{f}^{n+1}, \quad n = 0, 1, \dots, N - 1. \quad (54)$$

**Теорема 5.** При  $\sigma \geq p/2$  для явно-неявной векторной схемы расщепления (49), (54) имеет место априорная оценка (50), (51) для приближённого решения задачи (36)–(38).

**Доказательство.** Запишем схему (54) в виде (52), где теперь

$$\mathbf{D} = \sigma \mathbf{A}_0 - \frac{1}{2}\mathbf{A}.$$

При доказательстве теоремы 4 установлено, что оценка (50), (51) имеет место при  $\mathbf{D} = \mathbf{D}^* \geq 0$ . Сформулируем ограничения на вес  $\sigma$ , которые обеспечивают неотрицательность оператора  $\mathbf{D}$ .

Принимая во внимание неравенство

$$\left(\sum_{\alpha=1}^p a_\alpha\right)^2 \leq p \sum_{\alpha=1}^p a_\alpha^2,$$

с учётом самосопряжённости операторов  $R_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2, \dots, p$ , имеем

$$(\mathbf{A}_0 \mathbf{w}, \mathbf{w}) = \sum_{\alpha=1}^p (R_\alpha A R_\alpha w_\alpha, w_\alpha) = \sum_{\alpha=1}^p ((A^{1/2} R_\alpha w_\alpha)^2, 1) \geq$$

$$\geq \frac{1}{p} \left( \sum_{\alpha=1}^p A^{1/2} R_{\alpha} w_{\alpha}, \sum_{\beta=1}^p A^{1/2} R_{\beta} w_{\beta} \right) = \frac{1}{p} (\mathbf{A} \mathbf{w}, \mathbf{w}).$$

Это приводит к неравенству

$$\mathbf{A}_0 \geq \frac{1}{p} \mathbf{A}. \tag{55}$$

Тем самым при  $\sigma \geq p/2$  оператор  $\mathbf{D}$  неотрицателен. Теорема доказана.

При применении схем декомпозиции области важна не только устойчивость соответствующих схем расщепления. Второй ключевой элемент исследования связан с оценками погрешности приближённого решения, которые получаются при использовании неоднородных по времени приближений (явно-неявных аппроксимаций). Мы имеем условно сходящиеся разностные схемы, точность которых зависит от дискретизации расчётной области по пространству от ширины области налегания. Эти вопросы требуют специального рассмотрения и не затрагиваются в настоящей работе. Ограничимся исследованием аппроксимаций по времени.

Можно улучшить точность схемы декомпозиции области с диагональной матрицей  $\mathbf{A}_0$ , используя трёхслойные аппроксимации по времени. Основной трёхслойной схемой для векторной задачи (43)–(45) является схема второго порядка точности с весом

$$\mathbf{B} \frac{\mathbf{y}^{n+1} - \mathbf{y}^{n-1}}{2\tau} + \mathbf{A}(\sigma \mathbf{y}^{n+1} + (1 - 2\sigma)\mathbf{y}^n + \sigma \mathbf{y}^{n-1}) = \mathbf{B} \mathbf{f}^n, \quad n = 1, 2, \dots, N - 1, \tag{56}$$

$$\mathbf{y}^0 = \mathbf{w}^0, \quad \mathbf{y}^1 = \widetilde{\mathbf{w}}^1. \tag{57}$$

Для аппроксимации второго начального условия (57) со вторым порядком точности привлекается двухслойная схема. Например, положим  $\widetilde{\mathbf{w}}^1 = \{\widetilde{u}^1, \widetilde{u}^1, \dots, \widetilde{u}^1\}$  при использовании симметричной схемы

$$\frac{\widetilde{u}^1 - u^0}{\tau} + A \frac{\widetilde{u}^1 + u^0}{2} = f^{1/2}.$$

Аналогично теореме 4 устанавливается

**Теорема 6.** При  $\sigma \geq 1/4$  для векторной схемы (56), (57) с весами имеет место оценка

$$\begin{aligned} & \left( \mathbf{D} \frac{\mathbf{y}^{n+1} - \mathbf{y}^n}{\tau}, \frac{\mathbf{y}^{n+1} - \mathbf{y}^n}{\tau} \right) + \left\| \frac{\mathbf{y}^{n+1} + \mathbf{y}^n}{2} \right\|_A^2 \leq \\ & \leq \left( \mathbf{D} \frac{\widetilde{u}^1 - u^0}{\tau}, \frac{\widetilde{u}^1 - u^0}{\tau} \right) + \left\| \frac{\widetilde{u}^1 + u^0}{2} \right\|_A^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \tau \|f^k\|^2, \quad n = 1, 2, \dots, N - 1, \end{aligned} \tag{58}$$

в которой  $\mathbf{D} = (\sigma - 1/4)\tau^2 \mathbf{A}$ , а  $\mathbf{y}^n$ ,  $n = 0, 1, \dots, N$ , определены согласно (51).

**Доказательство.** Введём вспомогательные сеточные функции

$$\boldsymbol{\varsigma}^n = \frac{1}{2}(\mathbf{y}^n + \mathbf{y}^{n-1}), \quad \boldsymbol{\eta}^n = \frac{\mathbf{y}^n - \mathbf{y}^{n-1}}{\tau}.$$

Принимая во внимание равенство

$$\mathbf{y}^n = \frac{1}{4}(\mathbf{y}^{n+1} + 2\mathbf{y}^n + \mathbf{y}^{n-1}) - \frac{1}{4}(\mathbf{y}^{n+1} - 2\mathbf{y}^n + \mathbf{y}^{n-1}),$$

запишем схему (56) в виде

$$\mathbf{B} \frac{\boldsymbol{\eta}^{n+1} + \boldsymbol{\eta}^n}{2} + \mathbf{D} \frac{\boldsymbol{\eta}^{n+1} - \boldsymbol{\eta}^n}{\tau} + \mathbf{A} \frac{\boldsymbol{\varsigma}^{n+1} + \boldsymbol{\varsigma}^n}{2} = \mathbf{B} \mathbf{f}^n, \quad n = 1, 2, \dots, N - 1, \tag{59}$$

где  $D = (\sigma - 1/4)\tau^2 A$ . Умножим уравнение (59) скалярно в  $H$  на  $2(\zeta^{n+1} - \zeta^n) = \tau(\eta^{n+1} + \eta^n)$  и получим соотношения

$$\begin{aligned} \frac{\tau}{2}(B(\eta^{n+1} + \eta^n), \eta^{n+1} + \eta^n) &\leq (D\eta^{n+1}, \eta^{n+1}) + (A\zeta^{n+1}, \zeta^{n+1}) \leq \\ &\leq (D\eta^n, \eta^n) + (A\zeta^n, \zeta^n) + \tau(Bf^n, \eta^{n+1} + \eta^n). \end{aligned}$$

С учётом

$$(Bf^n, \eta^{n+1} + \eta^n) \leq \frac{1}{2}(B(\eta^{n+1} + \eta^n), \eta^{n+1} + \eta^n) + \frac{1}{2}(Bf^n, f^n)$$

имеем

$$(D\eta^{n+1}, \eta^{n+1}) + (A\zeta^{n+1}, \zeta^{n+1}) \leq (D\eta^n, \eta^n) + (A\zeta^n, \zeta^n) + \frac{\tau}{2}(Bf^n, f^n).$$

При  $\sigma \geq 1/4$  это неравенство даёт

$$(D\eta^{n+1}, \eta^{n+1}) + (A\zeta^{n+1}, \zeta^{n+1}) \leq (D\eta^1, \eta^1) + (A\zeta^1, \zeta^1) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \tau(Bf^k, f^k).$$

Принимая во внимание введённые обозначения и покомпонентные представления для операторов  $A$  и  $D$ , получаем оценку (58). Теорема доказана.

При  $\sigma = 1/4$  имеем априорную оценку для решения задачи (36)–(38) в полупелых узлах  $\tilde{y}^{n+1/2} = (y^{n+1} + y^n)/2$ . В этом случае из (58) получим

$$\left\| \frac{y^{n+1} + y^n}{2} \right\|_A^2 \leq \left\| \frac{\tilde{u}^1 + u^0}{2} \right\|_A^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \tau \|f^k\|^2, \quad n = 1, 2, \dots, N-1.$$

Отталкиваясь от схемы (56), (57), строится схема декомпозиции области при выделении диагональной части  $A$ . Используем следующую трёхслойную схему второго порядка точности по времени:

$$B \frac{y^{n+1} - y^{n-1}}{2\tau} + A_0(\sigma y^{n+1} + (1-2\sigma)y^n + \sigma y^{n-1}) + (A - A_0)y^n = Bf^n, \quad n = 1, 2, \dots, N-1. \quad (60)$$

**Теорема 7.** При  $\sigma \geq p/4$  для векторной схемы (57), (60) с весами имеет место оценка (58), в которой

$$D = \sigma\tau^2 A_0 - \frac{1}{4}\tau^2 A \geq 0.$$

**Доказательство.** Векторную схему запишем в виде (59) при  $D = \sigma\tau^2 A_0 - \tau^2 A/4$ . Принимая во внимание неравенство (55), при сформулированных ограничениях на  $\sigma$  имеем самосопряжённый неотрицательный оператор  $D$ . Дальнейшие рассуждения проводятся аналогично доказательству теоремы 6. Теорема доказана.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проекты 23-41-00037 (ш. 1–3) и 23-71-30013 (ш. 4, 5)).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Toselli A., Widlund O. Domain Decomposition Methods: Algorithms and Theory. Berlin, 2005.
2. Samarskii A.A., Matus P.P., Vabishchevich P.N. Difference Schemes with Operator Factors. Dordrecht, 2002.
3. Mathew T. Domain Decomposition Methods for the Numerical Solution of Partial Differential Equations. Berlin, 2008.
4. Лаевский Ю.М. Методы разбиения области при решении двумерных параболических уравнений // Вариационно-разностные методы в задачах численного анализа. Новосибирск, 1987. № 2. С. 112–128.

5. *Вабищевич П.Н.* Разностные схемы декомпозиции расчётной области при решении нестационарных задач // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1989. Т. 29. С. 1822–1829.
6. *Лаевский М.Ю., Мацокин А.М.* Методы декомпозиции решения эллиптических и параболических краевых задач // Сиб. журн. вычислит. математики. 1999. Т. 2. С. 361–372.
7. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. М., 1989.
8. *Marchuk G.I.* Splitting and alternating direction methods // Handbook of Numerical Analysis. V. I. North-Holland, 1990. P. 197–462.
9. *Vabishchevich P.N.* Additive Operator-Difference Schemes: Splitting Schemes. Berlin, 2013.
10. *Вабищевич П.Н.* Регионально-аддитивные разностные схемы стабилизирующей поправки для параболических задач // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1994. Т. 34. С. 1832–1842.
11. *Самарский А.А., Вабищевич П.Н.* Факторизованные разностные схемы декомпозиции области для задач конвекции–диффузии // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33. № 7. С. 967–974.
12. *Вабищевич П.Н.* Разностные схемы декомпозиции области для нестационарных задач конвекции/диффузии // Дифференц. уравнения. 1996. Т. 32. № 7. С. 923–927.
13. *Гордезиани Д.Г., Меладзе Г.В.* О моделировании третьей краевой задачи для многомерных параболических уравнений в произвольной области одномерными уравнениями // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1974. Т. 14. С. 246–250.
14. *Вабищевич П.Н., Вераховский В.А.* Разностные схемы покомпонентного расщепления–декомпозиции области // Вестн. Моск. ун-та. Вычислит. математика и кибернетика. 1994. № 3. С. 17–22.
15. *Самарский А.А., Вабищевич П.Н.* Регуляризованные аддитивные схемы полной аппроксимации // Докл. РАН. 1998. Т. 358. С. 461–464.
16. *Абрашин В.Н.* Об одном варианте метода переменных направлений решения многомерных задач математической физики. I // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26. № 2. С. 314–323.
17. *Вабищевич П.Н.* Векторные аддитивные разностные схемы для эволюционных уравнений первого порядка // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1996. Т. 36. С. 44–51.
18. *Самарский А.А., Вабищевич П.Н.* Векторные аддитивные схемы декомпозиции области для параболических задач // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31. № 9. С. 1563–1569.
19. *Vabishchevich P.N.* Domain decomposition methods with overlapping subdomains for the time-dependent problems of mathematical physics // Comput. Methods in Appl. Math. 2008. V. 8. P. 393–405.
20. *Efendiev Y., Vabishchevich P.N.* Splitting methods for solution decomposition in nonstationary problems // Appl. Math. and Comput. 2021. V. 397. P. 125785.
21. *Вабищевич П.Н.* Схемы расщепления решения для эволюционных уравнений второго порядка // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 7. С. 880–888.
22. *Абрашин В.Н., Вабищевич П.Н.* Векторные аддитивные схемы для эволюционных уравнений второго порядка // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34. № 12. С. 1666–1674.
23. *Вабищевич П.Н.* Численные методы решения нестационарных задач. М., 2021.
24. *Saad Y.* Iterative Methods for Sparse Linear Systems. Philadelphia, 2003.
25. *Самарский А.А., Николаев Е.С.* Методы решения сеточных уравнений. М., 1978.

Институт проблем безопасного развития  
атомной энергетики РАН, г. Москва,  
Северо-Восточный федеральный университет  
имени М.К. Аммосова, г. Якутск

Поступила в редакцию 08.01.2023 г.  
После доработки 08.01.2023 г.  
Принята к публикации 18.04.2023 г.