

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

УДК 519.63+517.958+532.5

К ВОПРОСУ О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ
НЕКОНСЕРВАТИВНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ
СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

© 2023 г. Р. Р. Полехина, М. В. Алексеев, Е. Б. Савенков

Численно исследованы вопросы, связанные с отсутствием сходимости при применении формально консервативных по пути разностных схем для решения неконсервативных гиперболических систем уравнений. Эта проблема является центральной при построении корректных разностных схем для решения указанного класса задач. Изложены базовые понятия теории неконсервативных гиперболических систем уравнений и соответствующие проблемы построения разностных схем для их решения. Предложен вариант метода HLL, позволяющий использовать произвольный явно заданный путь. Для модельной системы уравнений Бюргерса явно вычислены ударные адиабаты и пути, соответствующие вязкой регуляризации системы заданного вида. Проанализированы причины отсутствия сходимости численных решений к точным при некорректном применении соответствующих алгоритмов. Показано, что по крайней мере в частном рассмотренном случае формально консервативный по пути вариант метода HLL даёт правильное решение задачи.

DOI: 10.31857/S0374064123070105, EDN: GVFCXZ

Введение. Настоящая работа посвящена практическому анализу ряда вопросов сходимости численных решений неконсервативных гиперболических систем уравнений. Основной сложностью при построении алгоритмов для решения задач этого класса является то, что численные решения зачастую сходятся, но не к тому точному решению, которое предполагается. Эта проблема является центральной при построении численных методов решения неконсервативных гиперболических систем уравнений. Причина её появления состоит в том, что определение обобщённого (разрывного) решения в неконсервативном случае существенно сложнее, чем в случае консервативных гиперболических систем уравнений. Эти вопросы подробно обсуждаются, например, в работе [1].

Принципиальная теоретическая причина отсутствия сходимости считается известной [1] и связанной с особенностью определения так называемых “неконсервативных произведений” в общей математической теории неконсервативных гиперболических систем уравнений. Качественно эта проблема заключается в следующем. Одним из способов определения корректных разрывных решений гиперболических систем является использование регуляризованной задачи, которая имеет вид диссипативного (“вязкого”) возмущения исходной системы уравнений. В этом случае разрывные решения определяются как пределы решений возмущённой задачи при исчезающе малой вязкости. В случае консервативных гиперболических систем вид возмущённой системы (т.е. вид соответствующего диссипативного оператора) до известной степени не имеет значения – все “разумные” регуляризации определяют один и тот же класс обобщённых решений. В неконсервативных системах это не так – различные вязкие возмущения определяют различные классы обобщённых решений исходной задачи. Далее любая устойчивая разностная схема неявно определяет особый вид диссипативного возмущения исходной системы – её первое дифференциальное приближение [2, с. 17]. Численные решения сходятся к тем разрывным решениям задачи, которые выделяются диссипативным оператором разностной схемы (точнее, её первым дифференциальным приближением). В случае если этот оператор отличается от использованного при определении классов разрывных решений в исходной задаче, будет наблюдаться отсутствие сеточной сходимости.

Задача построения разностных схем, обеспечивающих сходимость численных решений к априорно заданному классу обобщённых решений, в настоящее время до конца не решена и является одной из центральных проблем построения разностных схем для неконсервативных гиперболических систем уравнений.

Описанный выше механизм потери сходимости принимается общим – считается, что “правильная” разностная схема должна иметь в точности те же самые диссипативные механизмы, что и использованные при постановке исходной задачи. Таким образом, решение задачи лежит в области построения разностных схем с априорным и “тонким” контролем её диссипативных свойств. Известно лишь небольшое количество работ, посвящённых этому вопросу. Для примера отметим работы Ю.И. Шокина и его коллег (см. [2, 3]), где был развит метод дифференциального приближения и рассматривался вопрос построения алгоритмов для решения уравнений Эйлера газовой динамики в простых (не консервативных) переменных; а также работы, посвящённые построению энтропийно-устойчивых схем для консервативных [4, 5] и неконсервативных [6] задач. Отметим также статью [7], где конкретным способом построения схем с контролируемыми диссипативными свойствами является метод дифференциального приближения.

Вместе с тем понятно, что вопрос о способах построения корректных в указанном выше смысле разностных схем неотъемлемо связан с вопросом о конкретных причинах отсутствия сходимости к нужному классу обобщённых решений. Настоящая работа посвящена исследованию ряда возникающих при этом частных вопросов. В п. 1 кратко и на неформальном уровне строгости описаны основные аспекты математической теории неконсервативных гиперболических систем, включая основные положения теории неконсервативных произведений Г. Даля Мазо, Ф. Леффлоха и Ф. Мурата (так называемая “теория DLM”). В п. 2 рассмотрены основные проблемы, возникающие при построении численных аппроксимаций неконсервативных систем. В п. 3 рассмотрен пример так называемой консервативной по пути разностной схемы типа HLL. Модельная задача для неконсервативной системы уравнений Бюргерса описана в п. 4. Наконец, в п. 5 представлены результаты численного исследования, а именно, для указанной модельной задачи строятся численные решения, определённые как с помощью вязкой диссипации, так и в рамках теории DLM. Показано, что качественное отличие решений задач, полученных различными способами, в конкретном рассматриваемом случае связано с причинами качественного характера: задача Римана с одними и теми же начальными данными может иметь различные решения. Состояния на скачке в задаче Римана в одном случае принадлежат ударной адиабате, соответствующей использованному способу регуляризации и учитываемому разностной схемой, и, таким образом, начальный разрыв сохраняется с течением времени, а в другом – нет.

1. Неконсервативные гиперболические системы уравнений. Основным объектом обсуждения в настоящей работе являются неконсервативные гиперболические системы уравнений первого порядка, т.е. системы вида

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \mathbf{A}(\mathbf{q}) \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

где $\mathbf{q} \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ и $\mathbf{A}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ гладко зависит от $\mathbf{q}$. “Неконсервативное произведение”

$$\mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial x} \neq \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x}$$

для какого-либо вектора плотности потока $\mathbf{F}$. Здесь и далее будем считать, что решение $\mathbf{q} = \mathbf{q}(x, t)$ зависит от пространственной координаты x и времени t . В случае если речь будет идти о задаче Коши, будем считать, что она рассматривается в области $x \in \mathbb{R}$ при $t \geq 0$, причём при $t > 0$ её решение $\mathbf{q}$ определяется уравнением (1), а при $t = 0$ – начальным условием

$$\mathbf{q}(x, 0) = \mathbf{q}_0(x).$$

Основной проблемой при построении математической теории систем указанного вида является невозможность определить обобщённое (разрывное) решение традиционным способом, как это делается для консервативных систем уравнений: в случае разрывного решения $\mathbf{q}$ неконсервативное произведение $\mathbf{A} \partial \mathbf{q} / \partial x$ теряет смысл даже в смысле классической теории обобщённых функций. Корректное определение разрывного решения может быть дано различными

способами. Простейший из них основан на подходящей регуляризации уравнения (1) (см., например, [8]). В соответствии с этой идеей далее будем рассматривать только такие разрывные решения, которые являются пределом (в том или ином смысле) гладких решений расширенной системы вида

$$\frac{\partial \mathbf{q}_\varepsilon}{\partial t} + \mathbf{A}(\mathbf{q}_\varepsilon) \frac{\partial \mathbf{q}_\varepsilon}{\partial x} = \varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \left[\mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{q}_\varepsilon}{\partial x} \right] \quad (2)$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$. Конкретный вид такого возмущения обосновывается тем, что он часто встречается в физических и механических приложениях. Естественно считать, что $\varepsilon > 0$ и матрица $\mathbf{B}$ такова, что задача Коши для уравнения (2) является корректной [9].

Очевидно, что решения задачи Коши для (2) зависят от вида матрицы $\mathbf{B}$ (и, вообще, от вида регуляризующего оператора в правой части (2)). Возникает вопрос: для каких систем (1) предел решений (2) при $\varepsilon \rightarrow 0$ не будет зависеть от вида матрицы $\mathbf{B}$? Для ответа рассмотрим малую окрестность точки x , лежащей на линии разрыва. В этой окрестности можно считать в первом приближении, что решение задачи (1) зависит только от величины $\xi = x - \sigma t$, где уравнение $x - \sigma t = \text{const}$ определяет касательную к линии разрыва на плоскости Oxt . Для гладких решений системы (2) также будем считать, что они зависят от переменной ξ . Такие решения называются *решениями типа бегущей волны*.

Положим $\mathbf{q}_\varepsilon = \mathbf{q}_\varepsilon(\xi)$, где $\mathbf{q}_\varepsilon$ – решение (2), $\xi = x - \sigma t$. Подставив его в (2), получим

$$-\sigma \frac{\partial \mathbf{q}_\varepsilon}{\partial \xi} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{q}_\varepsilon}{\partial \xi} = \varepsilon \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{q}_\varepsilon}{\partial \xi} \right]. \quad (3)$$

Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что решение этой системы будет иметь вид

$$\mathbf{q}_\varepsilon(\xi) = \mathbf{q}_1(\xi/\varepsilon). \quad (4)$$

Таким образом, решения задачи при различных ε являются перепараметризацией друг друга.

Предположим, что система (3) имеет решение, удовлетворяющее граничным условиям

$$\mathbf{q}_\varepsilon(\xi) = \mathbf{q}^\pm, \quad d\mathbf{q}_\varepsilon/d\xi \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \xi \rightarrow \pm\infty. \quad (5)$$

Отметим, что вопрос о существовании решения типа бегущей волны является нетривиальным (см. [10]).

Из предыдущих построений видно, что предельное при $\varepsilon \rightarrow 0$ решение $\mathbf{q}$ будет разрывным и удовлетворяет условиям

$$\mathbf{q}(\xi) = \begin{cases} \mathbf{q}^-, & \xi < 0, \\ \mathbf{q}^+, & \xi > 0. \end{cases} \quad (6)$$

Далее, проинтегрировав систему (3) по переменной ξ от $-\infty$ до $+\infty$ с учётом граничных условий (5), получим

$$-\sigma(\mathbf{q}^+ - \mathbf{q}^-) = - \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{A}(\mathbf{q}_\varepsilon) \frac{d\mathbf{q}_\varepsilon}{d\xi} d\xi. \quad (7)$$

Иначе (7) можно записать в виде

$$-\sigma(\mathbf{q}^+ - \mathbf{q}^-) = - \int_{\Gamma} \mathbf{A}(\mathbf{q}_\varepsilon) d\mathbf{q}_\varepsilon, \quad (8)$$

где Γ – зависящий от матрицы $\mathbf{B}$ путь в фазовом пространстве решений, “соединяющий” точки $\mathbf{q}^-$ и $\mathbf{q}^+$ в смысле выполнения граничных условий (5).

Выражения (7) и (8) – тождества, верные для решения системы (3). Их правые части зависят как от ε , так и от $\mathbf{B}$. Для того чтобы всё выражение не зависело от $\mathbf{B}$ при $\varepsilon \rightarrow 0$,

необходимо, чтобы это было справедливо для его правой части, что возможно в случае, когда подинтегральное выражение является полным дифференциалом, т.е.

$$\mathbf{A}(\mathbf{q}_\varepsilon) d\mathbf{q}_\varepsilon \equiv d\mathbf{F}(\mathbf{q}_\varepsilon), \quad \mathbf{A}(\mathbf{q}_\varepsilon) \frac{d\mathbf{q}_\varepsilon}{d\xi} \equiv \frac{d\mathbf{F}}{d\mathbf{q}_\varepsilon} \frac{d\mathbf{q}_\varepsilon}{d\xi} = \frac{d\mathbf{F}}{d\xi}$$

для подходящего вектора $\mathbf{F}$. Тогда условия (7) и (8) могут быть записаны как

$$-\sigma(\mathbf{q}^+ - \mathbf{q}^-) = - \int_{\Gamma} \mathbf{A}(\mathbf{q}_\varepsilon) d\mathbf{q}_\varepsilon = - \int_{\Gamma} d\mathbf{F} = -(\mathbf{F}(\mathbf{q}^+) - \mathbf{F}(\mathbf{q}^-)),$$

или просто

$$-\sigma(\mathbf{q}^+ - \mathbf{q}^-) = -(\mathbf{F}(\mathbf{q}^+) - \mathbf{F}(\mathbf{q}^-)), \quad (9)$$

а квазилинейная система (1) примет вид

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = 0. \quad (10)$$

Система (10) имеет вид закона сохранения, при этом величины $\mathbf{q}$ называются консервативными переменными, $\mathbf{F}$ – вектором плотности потока; соотношение (9) выражает стандартного вида условие Ранкина–Гюгонио для консервативных систем.

Таким образом, консервативные гиперболические системы – это такие квазилинейные системы, для которых обобщённые решения, построенные как вязкие пределы, не зависят от вида регуляризующего оператора (по крайней мере, если он имеет использованный выше вид). Эта характеристика гиперболических законов сохранения (консервативных гиперболических систем уравнений) является крайне важной. Благодаря ей отпадает вопрос, какой именно регуляризующий оператор используется для построения решения задачи. С точки зрения разностных схем это позволяет не заботиться, до известной степени, о виде искусственной вязкости при построении разностной схемы – не важно, вводится ли она явно или неявно (и “видна” только в первом дифференциальном приближении).

С другой стороны, для неконсервативных систем корректность постановки задачи о поиске разрывных решений уравнения (1) возможна, только если для заданной квазилинейной системы уравнений явно указывается регуляризующий оператор. При этом пределы гладких решений для разных матриц $\mathbf{B}$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ порождают различные классы обобщённых решений. Не задавая конкретный вид $\mathbf{B}$, невозможно ни формально определить обобщённые решения, ни указать их конкретный класс.

1.1. Условия Ранкина–Гюгонио. Фундаментальным следствием консервативной постановки (10) являются так называемые условия Ранкина–Гюгонио на разрывах. В частности, они позволяют провести классификацию разрывов и используются при построении решения задачи Римана. С физической точки зрения они выражают условия непрерывности консервативных величин на разрывах. Для системы (10) их можно записать в точности в виде (9). Для неконсервативной системы (1) их роль играет соотношение (8).

Обратим внимание на следующий факт. Как уже отмечалось, при различных ε решения возмущённой задачи отличаются лишь параметризацией, (см. (4)). Тогда

$$\frac{d\mathbf{q}_\varepsilon}{d\xi} = \frac{d\mathbf{q}_1(\alpha)}{d\alpha} \Big|_{\alpha=\xi/\varepsilon}$$

и значение в правой части интегралов (7) или (8) *не зависит* от конкретного значения параметра ε . Это явно говорит о том, что условия (7) или (8) являются свойством квазилинейной системы (1) (при заданном выборе способа регуляризации, т.е. оператора $\mathbf{B}$), а не системы (3) при заданном ε .

Идеи, изложенные выше, обеспечили развитие теории DLM, которая в настоящее время является широко распространённым формализмом для анализа разрывных решений квазилинейных неконсервативных систем гиперболических уравнений.

Необходимые для дальнейшего элементы этой теории изложены далее.

1.2. Теория DLM. Основы современной теории квазилинейных неконсервативных гиперболических систем уравнений были заложены в фундаментальных работах А.И. Вольперта (см. [11]) и в дальнейшем приобрели законченный вид в цикле работ Г. Даля Мазо, Ф. Лефлора и Ф. Мурата [12, 13].

С абстрактной математической точки зрения теория DLM позволяет корректно построить элементы анализа в пространствах BV функций с ограниченными вариациями (под которыми далее можно понимать кусочно-дифференцируемые в классическом смысле функции с конечным числом точек разрыва). Её основным приложением является строгая теория обобщённых решений квазилинейных неконсервативных систем гиперболических уравнений, а основным теоретическим результатом – корректное определение “неконсервативных произведений”, что позволяет найти значения недивергентных квазилинейных дифференциальных операторов на разрывных функциях из пространства BV.

Поскольку нас интересуют в основном приложения теории DLM к анализу квазилинейных неконсервативных гиперболических уравнений, строгое изложение теории ниже даваться не будет. Вместо этого покажем, каким образом её основные определения могут быть получены как простые обобщения построений, записанных выше.

Используем построения п. 1.1 и обратим внимание, что выражение $\mathbf{A}(\mathbf{q}_\varepsilon) \times \partial \mathbf{q}_\varepsilon / \partial x$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ можно формально рассматривать как определение неконсервативного произведения $\mathbf{A}(\mathbf{q}) \partial \mathbf{q} / \partial x$. При этом первое выражение корректно определено в силу того, что решение $\mathbf{q}_\varepsilon$ гладкое, и приближает второе в силу соответствия между граничными условиями (5) и условием (6). Более того, как было показано, значение выражения

$$-\int_{\Gamma} \mathbf{A}(\mathbf{q}_\varepsilon) d\mathbf{q}_\varepsilon \equiv -\int_{\Gamma} \mathbf{A}(\mathbf{q}_1) d\mathbf{q}_1$$

не зависит явно от величины ε и регуляризующего оператора $\mathbf{B}$ (хотя само $\mathbf{q}_\varepsilon$, конечно же, зависит от обоих). Эти соображения позволяют “забыть” о том, что $\mathbf{q}_\varepsilon$ – решение задачи (3), и написать

$$\mathbf{A}(\mathbf{q}) \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{A}(\mathbf{q}_\varepsilon) \frac{\partial \mathbf{q}_\varepsilon}{\partial x},$$

где $\mathbf{q}_\varepsilon$ – какой-либо *путь* в пространстве решений, удовлетворяющий условиям (5), но не обязательно удовлетворяющий уравнению (3). Строгая теория говорит, что сходимость в последнем предделе следует понимать в смысле сходимости мер. Далее такой путь будем обозначать как $\psi = \psi(s; \mathbf{q}^-, \mathbf{q}^+)$. Соответствующее ему $\mathbf{q}_\varepsilon$ определим как

$$\mathbf{q}_\varepsilon(x) = \begin{cases} \mathbf{q}^-, & x \in (a, x_0 - \varepsilon), \\ \psi\left(\frac{x - x_0 + \varepsilon}{2\varepsilon}; \mathbf{q}^-, \mathbf{q}^+\right), & x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon), \\ \mathbf{q}^+, & x \in (x_0 + \varepsilon, b), \end{cases}$$

где $x_0 \in (a, b)$ – координата точки разрыва, $[a, b]$ – отрезок, содержащий разрыв. Таким образом определённое $\mathbf{q}_\varepsilon$ не является решением (3), но обладает всеми требуемыми свойствами, а именно, $\mathbf{q}_\varepsilon$ интерполирует между значениями $\mathbf{q}^-$ и $\mathbf{q}^+$ на отрезке длины 2ε и является достаточно гладким.

Для такого $\mathbf{q}_\varepsilon$ можно показать, что при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\mathbf{A}(\mathbf{q}_\varepsilon) \frac{\partial \mathbf{q}_\varepsilon}{\partial x} \rightarrow C \delta(x - x_0), \quad C = \int_{\Gamma} \mathbf{A}(\psi(s; \mathbf{q}^-, \mathbf{q}^+)) \frac{\partial \psi(s; \mathbf{q}^-, \mathbf{q}^+)}{\partial s} ds, \quad (11)$$

где сходимость понимается в смысле сходимости мер, $\delta(x - x_0)$ – мера Дирака в точке x_0 . Соотношение (11) является определением неконсервативного произведения в теории DLM. Отметим, что в качестве ψ естественно, но не обязательно, можно взять, при нужном выборе

параметризации, решение $\mathbf{q}_1(\xi)$ задачи (3). Так же легко видеть, что конкретная параметризация ψ не важна, так как интеграл в (11) от неё не зависит. Поэтому обычно говорят о *семействе* путей ψ , а сам путь Γ параметризуют отрезком $[0, 1]$.

Пусть ψ является отображением $\psi : [0, 1] \times \Omega \times \Omega \mapsto \Omega$, удовлетворяющим условию интерполяции $\psi(0; \mathbf{q}^-, \mathbf{q}^+) = \mathbf{q}^-$, $\psi(1; \mathbf{q}^-, \mathbf{q}^+) = \mathbf{q}^+$ и ряду условий гладкости, которые здесь не формулируем (см., например, [12]). Отметим, что если задать путь линейным, т.е. положить

$$\psi(s; \mathbf{q}^-, \mathbf{q}^+) = \mathbf{q}^- + s(\mathbf{q}^+ - \mathbf{q}^-), \quad (12)$$

то теория DLM воспроизведёт теорию А.И. Вольперта.

Можно показать, что в рамках теории DLM могут быть получены соотношения Ранкина–Гюгоньо, полностью аналогичные описанным в п. 1.1, а именно (ср. с (7) и (8))

$$-\sigma(\mathbf{q}^+ - \mathbf{q}^-) = - \int_0^1 \mathbf{A}(\psi(s; \mathbf{q}^-, \mathbf{q}^+)) \frac{\partial \psi(s; \mathbf{q}^-, \mathbf{q}^+)}{\partial s} ds. \quad (13)$$

Подчеркнём ещё раз, что задание конкретного пути либо конкретного регуляризующего оператора является необходимым для корректной постановки задачи (1). Более того, информация о пути не содержится в том или ином виде непосредственно в системе уравнений (1); она является внешней по отношению к ней и должна задаваться из сторонних соображений.

Понятно, что задав определённое $\mathbf{B}$, мы тем самым задаём вполне определённое ψ . Вместе с тем, задав определённое ψ , не очевиден способ указать вид оператора $\mathbf{B}$ такой, чтобы заданное ψ удовлетворяло бы уравнениям (3) (и (2)) (и непонятно, можно ли сделать это в общем случае). Считать (для целей дальнейшего прикладного анализа) первичной величиной ψ или $\mathbf{B}$ – вопрос удобства. По крайней мере можно сказать, что при построении теории часть свойств для ψ , если это необходимо, могут быть *постулированы* – и это проще, чем задать свойства $\mathbf{B}$, которые бы обеспечивали выполнение нужных свойств для ψ . С другой стороны, при анализе, например, разностных схем методом дифференциальных приближений удобнее сравнивать свойства регуляризующего оператора в (2) и в первом дифференциальном приближении разностной схемы, применяемой для решения уравнения (1).

Однако теория DLM не является единственным способом определения неконсервативных произведений. Среди них отметим подход работы [14], посвящённой общим вопросам определения произведений обобщённых функций, и изложенную в [15] теорию, основанную на аппроксимации специальных ударных кривых.

Обратим внимание на следующее. В классической теории консервативных гиперболических систем известны два подхода, широко используемых для их анализа и построения численных алгоритмов: первый основан на концепции вязкого приближения, энтропийных функций и энтропийных неравенств; второй изучает свойства таких систем в терминах характеристик системы уравнений. Эти два подхода не являются альтернативными (в исключаяющем смысле), а согласованы и непротиворечиво дополняют друг друга (см. [16]). Теория DLM является “удобной” в том смысле, что позволяет сделать то же самое для неконсервативных систем уравнений.

В работе [13] было получено, что для строго гиперболической системы уравнений с линейно-вырожденными или истинно нелинейными полями задача Римана для (1) при достаточно малом скачке в начальных данных имеет единственное решение со стандартной “лаксонской” структурой, т.е. представляет собой $n + 1$ постоянное состояние, разделённое центрированными волнами разрежения, контактными разрывами и ударными волнами при некоторых дополнительных условиях, накладываемых на путь. Отличие от консервативного случая заключается только в том, что состояния на ударной волне связаны условиями Ранкина–Гюгоньо в виде (13), а не (9).

2. Разностные схемы. В настоящее время известно множество приложений, в которых необходимо применение математических моделей, представляющих собой неконсервативные квазилинейные гиперболические системы уравнений. В качестве примера назовём широко распространённые уравнения типа Баера–Нунциато для описания динамики многофазных сред

самой различной природы [17]. Эта система уравнений содержит в себе уравнения для описания эволюции объёмных долей фаз, которые необходимо являются неконсервативными. По этой причине построению эффективных вычислительных алгоритмов для решения систем уравнений (1) уделяется значительное внимание.

Понятно, что разработка такого алгоритма является нетривиальной задачей – если, например, использовать формальные разностные аппроксимации уравнения (1), то такие аппроксимации не будут ничего “знать” о пути или виде диссипативного оператора, выделяющих единственный класс разрывных решений задачи. На практике в этом случае может отсутствовать сеточная сходимость численных решений разностной схемы к “точному” решению задачи (см., например, [1]). Более того, указанная проблема существует даже в том случае, если для построения аппроксимаций используются подходы, формально учитывающие заданный вид пути. К последним относятся, в частности, так называемые *формально консервативные по пути схемы* (“formally path-conservative schemes”), которые обобщают классический метод Годунова для рассматриваемого класса задач. Для системы уравнений (1) консервативные по пути схемы более подробно рассматриваются в п. 3. Здесь лишь отметим, что в рамках указанного формализма были предложены, например, схемы типа Лакса–Фридрихса [1], Рое [18, 19], HLL [19] и др.

Несмотря на то, что конкретный вид пути явно учитывается при построении разностных схем указанного класса, они всё равно не свободны от указанных выше проблем – во многих случаях их решение не сходится к заданному точному решению задачи. Возможное объяснение этому эффекту было дано в работе [1]. Его суть заключается в следующем: первое дифференциальное приближение разностной схемы, в том числе консервативной по пути, включает в себя диссипативные слагаемые, отличающиеся от использованных при определении обобщённого решения задачи. Это приводит к тому, что при измельчении шага расчётной сетки численные решения сходятся к такому классу обобщённых решений, который определяется чисто схемным диссипативным оператором (или порождённым им путём). Таким образом, для построения корректной разностной схемы мало формально учитывать заданный вид пути, необходимо ещё обеспечить заданный вид первого дифференциального приближения схемы.

Отметим, что такой проблемы принципиально не возникает при построении аппроксимаций консервативных гиперболических систем (как указано в п. 1), для консервативных систем вид диссипативного оператора до известной степени не важен. По этой причине одним из возможных направлений в построении разностных схем для неконсервативных систем гиперболических уравнений является построение разностных схем с априорно заданным схемным диссипативным оператором. Примеры построения таких схем (в частности, в классе энтропийно-устойчивых схем) предложены в работах [4–7].

Тем не менее, как будет показано далее, вопросы, связанные со сходимостью разностных схем для неконсервативных гиперболических систем уравнений, могут являться более тонкими. Для этого ниже рассмотрен конкретный пример. В п. 3 опишем конкретный вариант консервативной по пути схемы, используемой в дальнейших численных расчётах.

3. Вариант метода HLL. Рассмотрим вариант метода HLL, который относится к классу формально консервативных по пути схем. Он позволяет формально использовать произвольный заданный аналитически путь и обобщает вариант метода, предложенный в работе [19], где рассматривается только случай линейного пути.

Рассмотрим, как и ранее, систему (1). Пусть $q \in \Omega$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – область значений решения задачи. Для упрощения будем считать, что для задачи (1) рассматривается задача Коши на всей вещественной прямой, т.е. $x \in \mathbb{R}$.

Введём разностную сетку с узлами x_i , $i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Узлы сетки будем относить к центрам расчётных ячеек ω_i , $\omega_i = [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$, $x_{i+1/2} = (x_i + x_{i+1})/2$. Далее величины, отнесённые к ячейкам или к их центрам, будем обозначать с использованием целых индексов i ; к границам ячеек – с использованием полуцелых индексов $i + 1/2$. Для удобства шаги $\Delta x = x_{i+1} - x_i$ и Δt по пространству и по времени, соответственно, считаем постоянными.

Для численного решения задачи (1) будем использовать разностную схему вида

$$q_i^{n+1} = q_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (D_{i-1/2}^- + D_{i+1/2}^+), \quad D_{i+1/2}^\pm = D^\pm(q_{i-s}^n, \dots, q_{i+p}^n), \quad (14)$$

где верхний индекс n обозначает номер временного шага, $D^\pm$ – непрерывные функции из Ω^{p+q+1} в Ω , которые удовлетворяют условию $D^\pm(\mathbf{q}, \dots, \mathbf{q}) = 0$ для всех $\mathbf{q} \in \Omega$. Последнее условие гарантирует, что рассмотренная схема точно аппроксимирует постоянные решения.

Схема вида (14) называется *формально консервативной по пути ψ* при условии, что выполняется соотношение [20]

$$D^-(\mathbf{q}_{-s}, \dots, \mathbf{q}_p) + D^+(\mathbf{q}_{-s}, \dots, \mathbf{q}_p) = \int_0^1 A(\psi(s; \mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1)) \frac{\partial \psi(s; \mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1)}{\partial s} ds \quad (15)$$

для всех $\mathbf{q}_i \in \Omega$ и $i = -s, \dots, p$.

Построим теперь консервативную по пути схему типа HLL. Представленный ниже вывод в целом повторяет рассмотренный в [19], однако не делает предположений о линейности пути.

Будем считать, что неконсервативное произведение записано в виде

$$A \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial x} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + C \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial x}.$$

Рассмотрим задачу Римана для системы (1) с состояниями $\mathbf{q}_L$ и $\mathbf{q}_R$ слева и справа от разрыва соответственно. Будем считать, что её решение имеет автомодельный вид, т.е. $\mathbf{q}(x, t) = \mathbf{q}(\xi)$, где $\xi = x/t$. Тогда систему уравнений (1) можно записать как

$$\mathbf{q} - \frac{\partial(\xi \mathbf{q})}{\partial \xi} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \xi} + C(\mathbf{q}) \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \xi} = 0. \quad (16)$$

Приближённое решение задачи Римана будем представлять в виде

$$\mathbf{q}(\xi) = \begin{cases} \mathbf{q}_L, & \xi \leq s_L, \\ \mathbf{q}_*, & s_L < \xi < s_R, \\ \mathbf{q}_R, & \xi \geq s_R, \end{cases} \quad (17)$$

где $\mathbf{q}_{L,R}$ – левое и правое состояния решения на разрыве, $\mathbf{q}_*$ – некоторое промежуточное состояние, которое будет определено в дальнейшем, $s_L = s_L(\mathbf{q}_L, \mathbf{q}_R)$ и $s_R = s_R(\mathbf{q}_L, \mathbf{q}_R)$ – оценки минимального и максимального собственных чисел матрицы A , причём считается, что $s_L < 0 < s_R$ по допущению.

Проинтегрировав равенство (16) на отрезке $\xi \in [s_L, s_R]$ с учётом (17), получим

$$\mathbf{q}_*(s_R - s_L) - (\mathbf{q}_R s_R - \mathbf{q}_L s_L) + (\mathbf{F}_R - \mathbf{F}_L) + \int_{\mathbf{q}_L}^{\mathbf{q}_R} C(\mathbf{q}) d\mathbf{q} = 0, \quad (18)$$

где

$$\int_{\mathbf{q}_L}^{\mathbf{q}_R} C(\mathbf{q}) d\mathbf{q} = \int_0^1 C(\psi(s; \mathbf{q}_L, \mathbf{q}_*)) \frac{\partial \psi(s; \mathbf{q}_L, \mathbf{q}_*)}{\partial s} ds + \int_0^1 C(\psi(s; \mathbf{q}_*, \mathbf{q}_R)) \frac{\partial \psi(s; \mathbf{q}_*, \mathbf{q}_R)}{\partial s} ds.$$

Введём обозначение

$$\tilde{V}(\mathbf{q}_a, \mathbf{q}_b) = \int_0^1 C(\psi(s; \mathbf{q}_a, \mathbf{q}_b)) \frac{\partial \psi(s; \mathbf{q}_a, \mathbf{q}_b)}{\partial s} ds.$$

Тогда (18) можно записать в виде

$$\mathbf{q}_*(s_R - s_L) - (\mathbf{q}_R s_R - \mathbf{q}_L s_L) + (\mathbf{F}_R - \mathbf{F}_L) + \tilde{V}(\mathbf{q}_L, \mathbf{q}_*) + \tilde{V}(\mathbf{q}_*, \mathbf{q}_R) = 0. \quad (19)$$

В силу того, что в последнем соотношении величины $\mathbf{q}_{L,R}$ и путь ψ заданы и известны, его можно рассматривать как нелинейное алгебраическое уравнение относительно неизвестного значения $\mathbf{q}_*$. При реализации метода оно решается подходящим способом численно. В качестве начального приближения удобно использовать оценку $\mathbf{q}_*$, полученную по формуле

$$\tilde{\mathbf{q}}^* = \frac{1}{s_R - s_L} [\mathbf{q}_R s_R - \mathbf{q}_L s_L - (\mathbf{F}_R - \mathbf{F}_L) - \tilde{\mathbf{V}}(\mathbf{q}_R, \mathbf{q}_L)].$$

Это уравнение соответствует приближению, когда промежуточное состояние $\mathbf{q}$ не учитывается при вычислении последнего интеграла в (18).

Далее, проинтегрировав (16) по ξ на промежутках $[s_L, 0]$ и $[0, s_R]$, получим

$$-\mathbf{q}_* s_L + \mathbf{q}_L s_L + \int_{s_L}^0 \mathbf{A}(\mathbf{q}) \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \xi} d\xi = 0, \quad \mathbf{q}_* s_R - \mathbf{q}_R s_R + \int_0^{s_R} \mathbf{A}(\mathbf{q}) \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \xi} d\xi = 0.$$

Интегралы в последних выражениях естественно принять за “потoki” D_{HLL}^- и D_{HLL}^+ соответственно. Выразив их явно, получим

$$D_{\text{HLL}}^- = +\mathbf{q}_* s_L - \mathbf{q}_L s_L, \quad D_{\text{HLL}}^+ = -\mathbf{q}_* s_R + \mathbf{q}_R s_R.$$

Далее необходимо в выражения для $D_{\text{HLL}}^\pm$ подставить значения $\mathbf{q}_*$, определяемые решением уравнения (19). В результате придём к соотношениям

$$\begin{aligned} D_{\text{HLL}}^-(\mathbf{q}_L, \mathbf{q}_R) &= -\frac{s_L}{s_R - s_L} (\mathbf{F}_R - \mathbf{F}_L + \tilde{\mathbf{V}}(\mathbf{q}_L, \mathbf{q}_*) + \tilde{\mathbf{V}}(\mathbf{q}_*, \mathbf{q}_R)) + \frac{s_L s_R}{s_R - s_L} (\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_L), \\ D_{\text{HLL}}^+(\mathbf{q}_L, \mathbf{q}_R) &= \frac{s_R}{s_R - s_L} (\mathbf{F}_R - \mathbf{F}_L + \tilde{\mathbf{V}}(\mathbf{q}_L, \mathbf{q}_*) + \tilde{\mathbf{V}}(\mathbf{q}_*, \mathbf{q}_R)) - \frac{s_L s_R}{s_R - s_L} (\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_L). \end{aligned} \quad (20)$$

Значение $\mathbf{q}_*$ в этом случае определяется как решение уравнения (19). Однако на практике оказывается, что в большинстве рассмотренных авторами случаев оценка $\tilde{\mathbf{q}}_*$ является достаточно точной для того, чтобы использовать её в выражениях (20) непосредственно, без последующего уточнения. Такой вариант метода является существенно более экономичным, так как для большинства ячеек расчётной сетки решения уравнения (19) не требуется.

Наконец, положим в схеме (14)

$$D_{i-1/2}^- = D_{\text{HLL}}^-(\mathbf{q}_{i-1}, \mathbf{q}_i), \quad D_{i+1/2}^+ = D_{\text{HLL}}^+(\mathbf{q}_i, \mathbf{q}_{i+1}). \quad (21)$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что справедливо следующее

Утверждение. Разностная схема (14) с “потоками”, определёнными в соответствии с (21), является формально консервативной по пути в смысле справедливости соотношения (15).

Доказательство. Просуммировав величины $D_{\text{HLL}}^\pm$ исходя из их определения, получим

$$D_{\text{HLL}}^- + D_{\text{HLL}}^+ = \mathbf{F}_R - \mathbf{F}_L + \int_0^1 C(\psi(s; \mathbf{q}_L, \mathbf{q}_R)) \frac{\partial \psi(s; \mathbf{q}_L, \mathbf{q}_R)}{\partial s} ds = \int_0^1 \mathbf{A}(\psi(s; \mathbf{q}_L, \mathbf{q}_R)) \frac{\partial \psi(s; \mathbf{q}_L, \mathbf{q}_R)}{\partial s} ds.$$

4. Неконсервативная система уравнений Бюргерса. Диссипативное возмущение.

В качестве модельной задачи, на примере которой часто иллюстрируются вопросы сходимости разностных схем для неконсервативных гиперболических систем уравнений, рассмотрим модельную систему уравнений Бюргерса [21, 6]

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \mathbf{A}(\mathbf{q}) \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial x} = 0, \quad \mathbf{q} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} u & u \\ v & v \end{pmatrix}. \quad (22)$$

В [21] разрывные решения системы (22) определены путём введения диссипативного слагаемого вида

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial x} = \mathbf{D} \frac{\partial^2 \mathbf{q}}{\partial x^2}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 & \varepsilon_2 \end{pmatrix}, \quad (23)$$

где $\varepsilon_{1,2} > 0$ – малые параметры. Разрывные решения системы (22) определяются как пределы решений системы (23) при $\varepsilon_{1,2} \rightarrow 0$.

В работе [21] показано, что решения уравнения (23) типа бегущей волны с начальными данными (6) существуют только в том случае, если переменные $\mathbf{q}^\pm$ удовлетворяют соотношениям

$$v_+ = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} (2\sigma - u_- - v_-) + \frac{\varepsilon_1 v_- - \varepsilon_2 u_-}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \exp\left(2 - 2 \frac{u_- + v_-}{\sigma}\right), \quad u_+ = 2\sigma - u_- - (v_- + v_+), \quad (24)$$

где σ – скорость бегущей волны, которая, в свою очередь, не может быть произвольной и удовлетворяет условию

$$\frac{u_- + v_-}{2} \leq \sigma \leq u_- + v_-.$$

Непосредственно профиль решения типа бегущей волны в рассматриваемой задаче не может быть получен аналитически. Для его определения поступим следующим образом. Исследуем структуру разрыва, которая удовлетворяет соотношениям (24). Запишем систему уравнений (23) в эквивалентной форме:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(u+v) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{[u+v]^2}{2} \right) &= (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \frac{\partial^2(u+v)}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{v}{u+v} \right) &= \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} - \frac{v}{u+v} \right) \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{u+v} \frac{\partial^2(u+v)}{\partial x^2}. \end{aligned} \quad (25)$$

Будем искать решение (25) вида $u = u(\xi)$ и $v = v(\xi)$, где $\xi = x - \sigma t$, с краевыми условиями

$$\mathbf{q} \rightarrow \mathbf{q}^\pm, \quad \frac{d\mathbf{q}}{d\xi} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \xi \rightarrow \pm\infty. \quad (26)$$

В этом случае система уравнений (25) принимает вид

$$\begin{aligned} -\sigma \frac{d(u+v)}{d\xi} + \frac{d}{d\xi} \left(\frac{[u+v]^2}{2} \right) &= (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \frac{d^2(u+v)}{d\xi^2}, \\ -\sigma \frac{d}{d\xi} \left(\frac{v}{u+v} \right) &= \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} - \frac{v}{u+v} \right) \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{u+v} \frac{d^2(u+v)}{d\xi^2}. \end{aligned} \quad (27)$$

Сделаем замену переменных $w = u + v$ в (27) и введём переменную $\tilde{w} = dw/d\xi$. Тогда из (27) получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка относительно неизвестных $(w, \tilde{w}, v)$ при заданном значении скорости разрыва σ :

$$\frac{dw}{d\xi} = \tilde{w}, \quad \frac{d\tilde{w}}{d\xi} = \tilde{w} \frac{w - \sigma}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}, \quad \frac{dv}{d\xi} = \frac{v}{w} \tilde{w} - \frac{w - \sigma}{\sigma} \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} - \frac{v}{w} \right) \tilde{w}. \quad (28)$$

Эта система уравнений должна быть дополнена граничными условиями, которые являются следствием условий (26). Заметим, что состояния $\mathbf{Q}_+ = (u_+ + v_+, 0, v_+)$ и $\mathbf{Q}_- = (u_- + v_-, 0, v_-)$ являются её положениями равновесия. Тогда граничные условия для системы (28) имеют вид

$$\mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{Q}_\pm \quad \text{при} \quad \xi \rightarrow \pm\infty, \quad (29)$$

где $\mathbf{Q} = (w, \tilde{w}, v)$.

Чтобы задача о структуре разрыва имела решение, необходимо существование интегральной кривой, удовлетворяющей (28) и краевым условиям (29), т.е. соединяющей два положения равновесия.

Описанную выше задачу для системы уравнений (28) с краевыми условиями (29) будем называть *задачей о структуре разрыва* [22, с. 84]. Используемый в работе способ её численного решения представляет собой вариант метода стрельбы и предполагает следующую последовательность шагов.

1. Выбрать “опорное” положение равновесия Q_0 , например, $Q_0 = Q_+$.
2. Выбрать направление “стрельбы” как единичный вектор $n \in \mathbb{R}^3$ в пространстве $Ow\tilde{w}v$.
3. Построить численно (удобным способом) траекторию системы (28), проходящую через точку $Q_\delta = Q_0 + n\delta$, где δ – малый параметр.
4. Проверить “попадание” построенной траектории в δ -окрестность второго положения равновесия, т.е. точки Q_- . Если это условие выполнено, то считается, что требуемая интегральная кривая определена, в противном случае необходимо скорректировать направление вектора n .

Так как вычислительные затраты для решения системы (28) минимальны, решение задачи легко может быть найдено перебором траекторий, определяемых сравнительно небольшим числом векторов n .

На практике численное решение системы уравнений (28) с краевыми условиями (29) реализуется следующим образом. Определим векторы, по направлению которых будем отступать от положения равновесия Q_0 следующим образом:

$$n_k = (n_k^1, n_k^2, n_k^3) = (\sin \theta_k \cos \phi_k, \sin \theta_k \sin \phi_k, \cos \theta_k),$$

где $\theta_k = 2\pi k/k_{\max}$, $\phi_k = 2\pi k/k_{\max}$, $k = \overline{0, k_{\max}}$, и положим $k_{\max}$ в диапазоне от 6 до 20, $\delta = 10^{-4}$. Перебор этих направлений в рассматриваемых ниже задачах позволяет определить интегральную кривую (28) с заданной точностью δ .

5. Численные результаты.

5.1. Задача о структуре разрыва. Рассмотрим задачу о структуре разрыва для неконсервативной системы уравнений Бюргера (23). Аналогично работе [6] выберем набор параметров

$$q^- = (7.99, 11.01), \quad q^+ = (0.25, 0.75), \quad \sigma = 10, \quad (30)$$

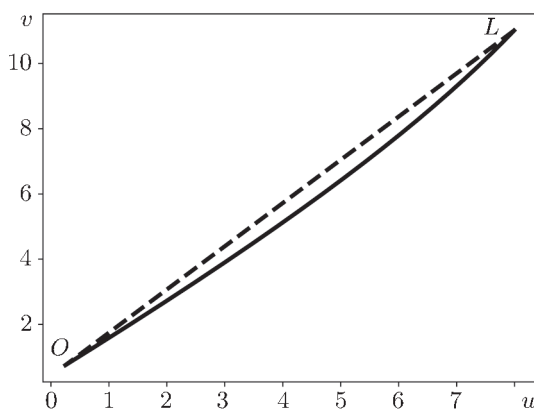


Рис. 1. Решение задачи (28) о структуре разрыва (сплошная линия) и прямая, соединяющая точки O и L (штриховая линия).

который удовлетворяет соотношениям (24).

В уравнении (23) положим $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 10^{-4}$.

Численные эксперименты показывают, что в этом случае существует только одна такая интегральная кривая уравнения (28) с краевыми условиями (29), она показана на рис. 1 в плоскости переменных (u, v) (точка O соответствует значению q_+ , точка L — q_-). Напомним, что построенная структура разрыва определяет профиль решения задачи (23) и, как следствие, соответствующий путь.

5.2. Путь. Для построения в явном виде выражения для пути аппроксимируем интегральную кривую, представленную на рис. 1, полиномом

$$v = c_3 u^3 + c_2 u^2 + c_1 u + c_0,$$

где $c_3 = 0.00465794$, $c_2 = -0.01583278$, $c_1 = 1.14905787$, $c_0 = 0.46234259$. Тогда путь можно параметризовать следующим образом:

$$\psi_u(s) = u_+ + (1-s)(u_- - u_+), \quad \psi_v(s) = c_3 \psi_u(s)^3 + c_2 \psi_u(s)^2 + c_1 \psi_u(s) + c_0, \quad (31)$$

где параметр $s \in [0, 1]$. Уточним, что конкретная параметризация пути не имеет значения (см. п. 1).

5.3. Соотношения Ранкина–Гюгоньо. В общем случае, когда решение системы (22) определяется в рамках теории DLM заданным путём, условия Гюгоньо имеют вид (13), которые запишем здесь в виде

$$\sigma[q] = \int_0^1 A(\psi(s; q^-, q^+)) \frac{\partial \psi(s; q^-, q^+)}{\partial s} ds, \quad \psi = \begin{pmatrix} \psi_u \\ \psi_v \end{pmatrix}. \quad (32)$$

В случае, если путь отождествляется с профилем решения типа бегущей волны для системы (23), последнее уравнение сводится в точности к системе соотношений (25).

Выбрав путь ψ , подставим его в (32), проинтегрируем выражение (32) и исключим переменную σ . В итоге получим ударную адиабату – соотношение вида $f(q^-, q^+) = 0$, которая для фиксированного состояния q^+ до разрыва описывает возможные состояния q^- после разрыва.

Рассмотрим два случая задания пути: линейный, определяемый соотношением (12), и построенный выше (31), соответствующий вязкой регуляризации вида (23). В качестве исходного выберем состояние $q^+ = (0.25, 0.75)$ (см. (30)).

На рис. 2 представлены ударные адиабаты. Точка O соответствует состоянию перед разрывом, точки L и M – состояния за разрывом для соответствующих ударных адиабат.

Как и следовало ожидать, состояния $q_{\pm}$, определённые в соответствии с (30), лежат на одной ударной адиабате, соответствующей регуляризованной задаче (23). Обратим внимание, что ударная адиабата, соответствующая *линейному* пути, не проходит через точку L .

Вообще говоря, это означает следующее.

1. В решении задачи Римана о распаде разрыва для системы (22) в случае, если её обобщённые решения определены с помощью регуляризации (23) (или, эквивалентно, соответствующим путём), разрыв с параметрами (30) не “распадается”, а существует неограниченное время. Другими словами, в этом случае параметры (30) удовлетворяют условиям Ранкина–Гюгоньо для системы (22), и состояния на разрыве при $t > 0$ совпадают с таковыми при $t = 0$.

2. В то же время если обобщённые решения (22) определены с помощью линейного пути тот же самый разрыв с параметрами (30) не удовлетворяет условиям Гюгоньо, распад начального разрыва действительно происходит и состояния на разрыве при $t > 0$ становятся отличными от таковых при $t = 0$.

С точки зрения теории неконсервативных систем гиперболических уравнений это наблюдение является тривиальным фактом, демонстрирующим её основные особенности.

5.4. Численное решение системы (22). Как уже отмечалось, центральной и не до конца решённой проблемой построения разностных схем для неконсервативных систем уравнений является отсутствие сходимости построенных аппроксимаций к точному решению задачи. Традиционно это связывают с тем, что первое дифференциальное приближение разностной схемы включает в себя диссипативные слагаемые, которые порождают путь, отличающийся от использованного при постановке задачи (см. п. 1, а также [1, 6, 20, 23–25]). В п. 3 был приведён пример разностной схемы, которая относится к классу *формально* консервативных по пути (см. также библиографию в п. 2). Термин “формальный” обозначает, что использование при конструировании схемы явно заданного пути вовсе не гарантирует, что первое дифференциальное приближение схемы *фактически* реализует тот же самый путь, который был заложен при её конструировании.

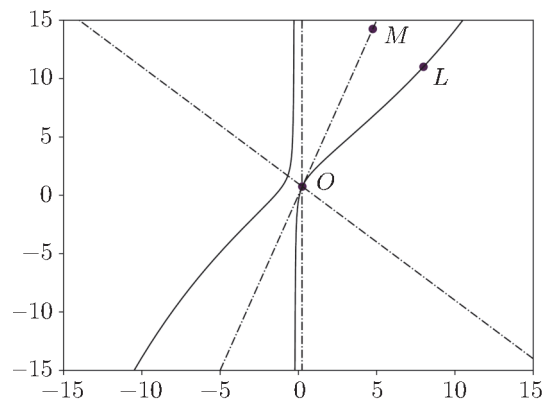


Рис. 2. Ударная адиабата, соответствующая (31) (сплошная линия), и ударная адиабата, соответствующая линейному пути (штрихпунктирная линия).

Численно решим систему уравнений (22) с помощью консервативного вдоль пути численного метода HLL, представленного в п. 3. Рассмотрим задачу Римана о распаде начального разрыва с начальными данными (30). В начальный момент времени $t = 0$ имеются два однородных состояния: $q = O(u_+, v_+)$ при $x > 2$ и $q = L(u_-, v_-)$ при $x < 2$.

На рис. 3, а представлены результаты численных расчётов с линейным путём. Проанализируем соответствующую ударную адиабату, представленную на рис. 2 штрихпунктирной кривой. Точка O соответствует состоянию перед разрывом, точка L – состоянию за разрывом. Видно, что точка L не принадлежит ударной адиабате для линейного пути, поэтому начальный разрыв распался на два разрыва: $O \rightarrow M$ и $M \rightarrow L$. Точка M , в свою очередь, принадлежит ударной адиабате для линейного пути. Таким образом, численный расчёт сошёлся к верному решению.

На рис. 3, б показаны результаты аналогичных расчётов, полученных по той же схеме, но с путём, определённым в соответствии с (31). Видно, что теперь решение совпадает с решением, соответствующим (24). Это согласовано с тем, что точка L принадлежит ударной адиабате для пути (31) (сплошная кривая на рис. 2).

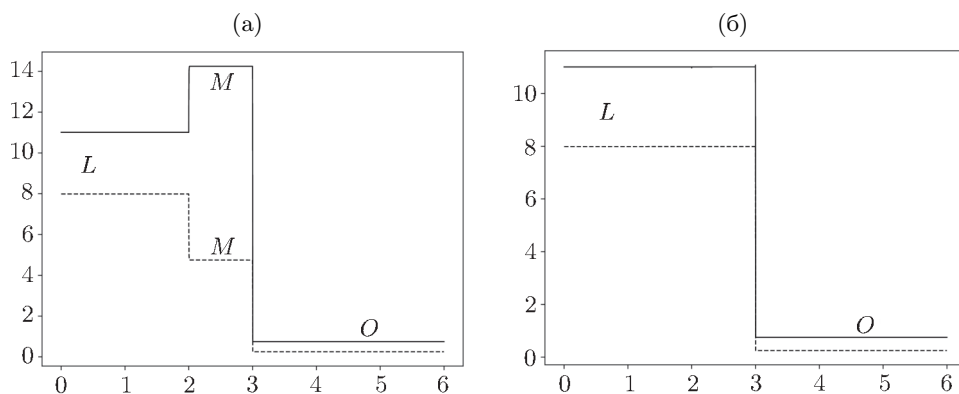


Рис. 3. Результаты численных расчётов для u (штриховая линия) и v (сплошная линия) на момент времени $t = 0.1$ с.

Таким образом, первый вывод, который можно сделать, заключается в том, что для рассмотренного варианта метода HLL и по крайней мере конкретной постановки задач *формально* согласованная по пути схема из п. 3 является *фактически* согласованной.

Второй вывод, не менее важный, состоит в том, что несоответствие численных решений задач с линейным путём и путём (31) в рассматриваемом случае связано с тем, что для одной из них данные (30) удовлетворяют условиям Ранкина–Гюгоньо, а для другой – нет, в силу чего происходит распад разрыва. Более того, параметры скачков после разрыва в численном решении оказываются правильными.

Для примера рассмотрим иную интерпретацию полученных результатов. Так, рассматривая описанный выше тест для неконсервативной системы уравнений Бюргерса, авторы работ [6, 23] утверждают, что им не удалось добиться того, чтобы численное решение (22) сошлось к решению, определяемому соотношениями (24). Результаты этих расчётов (конкретно из работы [6]) приведены на рис. 4. Видно, что начальный

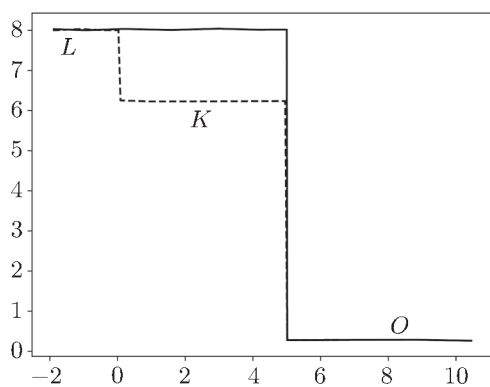


Рис. 4. Результаты численных расчётов из статьи [6] при $t = 0.5$ с.

разрыв распался на два разрыва: $O \rightarrow K$ и $K \rightarrow L$. Там указывается, что задача решалась численно консервативным по пути методом Годунова, а путь определялся вязким профилем расширенной системы уравнений.

Однако способ учёта такого пути, равно как и детали реализации, в этой статье не приводятся. При этом несоответствие численного и аналитического решений в [6] объясняется

наличием первого дифференциального приближения, которое выделяет другой класс решений. Результаты настоящей работы показывают, что в рассмотренном авторами [6] примере проблема со сходимостью связана с недопустимостью рассматриваемого разрыва для пути, заданного в численном методе.

Более того, эта проблема бы сохранилась, если бы авторы использовали полностью “правильные” схемы, которые являлись бы не формально, а *фактически* консервативными по пути (т.е. имели в своём первом дифференциальном приближении такой же диссипативный оператор, как и в дифференциальной задаче).

Заключение. В работе неконсервативная гиперболическая система уравнений Бюргерса исследовалась аналитически и численно консервативным по пути методом HLL. Показано, что при его корректном применении, по крайней мере для рассмотренной модельной задачи, он даёт правильное решение. По результатам решения задачи о структуре разрыва получены явные формулы для пути, отвечающего вязкому профилю расширенной неконсервативной системы Бюргерса [21].

В результате решения задачи Римана о распаде разрыва для модельной задачи в дифференциальной и разностной постановках было получено, что решения имеют качественно отличный вид. Наблюдаемое отсутствие сходимости к точному решению связано с тем, что исходной постановке задачи и разностному решению соответствуют принципиально различные виды ударных адиабат и формы условий Ранкина–Гюнио.

Результаты пп. 4, 5 получены Полехиной Р.Р. при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-283. Результаты пп. 1–3 получены Алексеевым М.В. и Савенковым Е.Б. при поддержке Российского научного фонда (проект 22-11-00203).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. LeFloch P.G., Mohammadian M. Why many theories of shock waves are necessary: kinetic functions, equivalent equations, and fourth-order models // J. of Comput. Phys. 2008. V. 227. № 8. P. 4162–4189.
2. Шоккин Ю.И. Метод дифференциального приближения. Новосибирск, 1979.
3. Karni S. Viscous shock profiles and primitive formulations // SIAM J. on Numer. Anal. 1992. V. 29. № 6. P. 1592–1609.
4. Tadmor E. The numerical viscosity of entropy stable schemes for systems of conservation laws. I // Math. Comp. 1987. V. 49. P. 91–103.
5. Tadmor E., Zhong W. Novel entropy stable schemes for 1D and 2D fluid equations // Hyperbolic Problems: Theory, Numerics, Applications. / Eds. S. Benzoni-Gavage, D. Serre. Berlin; Heidelberg, 2008.
6. Castro M.J. et al. Entropy conservative and entropy stable schemes for nonconservative hyperbolic systems // SIAM J. on Numer. Anal. 2013. V. 51. № 3. P. 1371–1391.
7. LeFloch P., Mishra S. Numerical methods with controlled dissipation for small-scale dependent shocks // Acta Numerica. 2014. V. 23. P. 743–816.
8. Гельфанд И.М. Некоторые задачи теории квазилинейных уравнений // Успехи мат. наук. 1959. Т. 14. Вып. 2 (86). С. 87–158.
9. Петровский И.Г. О проблеме Cauchy для систем линейных уравнений с частными производными в области неаналитических функций // Бюлл. Московского гос. ун-та. Секц. А. Математика и механика. 1938. Т. 1. Вып. 7.
10. Majda A., Pego L. Stable viscosity matrices for systems of conservation laws // J. of Differ. Equat. 1985. V. 56. № 2. P. 229–262.
11. Вольперт А.И. Пространства BV и квазилинейные уравнения // Мат. сб. 1967. Т. 73 (115). № 2. С. 255–302.
12. LeFloch P., Liu T.-P. Existence theory for nonlinear hyperbolic systems in nonconservative form. Berlin; New York, 1993.
13. Dal Maso G., LeFloch P.G., Murat F. Definition and weak stability of nonconservative products // J. de Math. Pur. et Appl. 1995. V. 74. № 6. P. 483–548.
14. Colombeau J.-F. Multiplication of distributions // Bull. of the Amer. Math. Soc. 1990. V. 23. № 2. P. 251–268.

15. *Alouges F., Merlet B.* Approximate shock curves for non-conservative hyperbolic systems in one space dimension // J. of Hyperbolic Differ. Equat. 2004. V. 1. № 4. P. 769–788.
16. *Lax P.* Hyperbolic systems of conservation laws and the mathematical theory of shock waves // CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics. V. 11. SIAM, 1973.
17. *Baer M.R., Nunziato J.W.* A two-phase mixture theory for the deflagration-to-detonation transition (DDT) in reactive granular materials // Int. J. of Multiphase Flow. 1986. V. 2. № 6. P. 861–889.
18. *Toumi I.* A weak formulation of Roe's approximate Riemann solver // J. of Comput. Phys. 1992. V. 102. № 2. P. 360–373.
19. *Dumbser M., Balsara D.S.* A new efficient formulation of the HLLEM Riemann solver for general conservative and non-conservative hyperbolic systems // J. of Comput. Phys. 2016. V. 304. P. 275–319.
20. *Parés C.* Numerical methods for nonconservative hyperbolic systems: atheoretical framework // SIAM J. on Numer. Anal. 2006. V. 44. № 1. P. 300–321.
21. *Berthon C.* Schéma nonlinéaire pour l'approximation numérique d'un système hyperbolique non conservatif // Comptes Rendus Mathématique. 2002. V. 335. № 12. P. 1069–1072.
22. *Куликовский А.Г., Свешникова Е.И.* Нелинейные волны в упругих средах. М., 1998.
23. *Pimentel-García E., Castro M.J., Chalons C., de Luna T.M., Parés C.* In-cell discontinuous reconstruction path-conservative methods for non conservative hyperbolic systems-Second-order extension // J. of Comput. Phys. 2022. V. 459. P. 111152.
24. *Chalons C.* Path-conservative in-cell discontinuous reconstruction schemes for non conservative hyperbolic systems // Commun. Math. Sci. 2020. V. 18. № 1. P. 1–30.
25. *Polekhina R.R., Korneev B.A., Savenkov E.B.* Numerical study of multiphase hyperbolic models // J. of Comput. and Appl. Math. 2023. V. 423. P. 114925.

Институт прикладной математики
имени М.В. Келдыша РАН, г. Москва

Поступила в редакцию 03.03.2023 г.
После доработки 03.03.2023 г.
Принята к публикации 19.05.2023 г.