ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 7, с. 983–995

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

УДК 519.633

СЕТОЧНО-ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЙ МЕТОД ПОВЫШЕННОГО ПОРЯДКА ДЛЯ СИСТЕМ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С КУСОЧНО-ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

© 2023 г. Н. И. Хохлов, И. Б. Петров

Рассмотрен новый подход для повышения порядка точности сеточно-характеристического метода в области скачка коэффициентов, основанный на кусочно-полиномиальной интерполяции для схем второго и третьего порядков точности, для случая, когда граница раздела сред согласована с конечно-разностной сеткой. Метод предназначен для численного моделирования распространения динамических волновых возмущений в гетерогенных средах. Для описания рассматриваемых физических процессов использованы системы гиперболических уравнений с переменными коэффициентами. Приведены описание численного метода и результаты его тестирования.

DOI: 10.31857/S0374064123070117, EDN: GVISAO

Введение. Распространение динамических возмущений наблюдается в различных областях физики, таких как акустика, теория упругости и электромагнетизм. Для математического описания распространения волновых возмущений в гетерогенных средах применяются системы гиперболических уравнений с переменными коэффициентами. При переходе от среды с одними параметрами к среде с другими параметрами изменяются скорость распространения волн и другие характеристики среды. При численном моделировании необходимо корректно учитывать границу перехода от одной среды к другой. В данной работе рассматривается случай разрывного изменения коэффициентов системы и предлагается построение конечно-разностного метода, обладающего повышенным порядком точности в области разрыва коэффициентов, а именно рассматривается кусочно-постоянное распределение параметров среды, причём разрыв её параметров привязан к узлам конечно-разностной сетки, т.е. параметры среды привязаны к ячейкам. Значения искомых физических параметров привязаны к узлам конечно-разностной сетки (сдвинутая сетка).

Рассматриваем одномерную систему уравнений, однако несмотря на то, что решение одномерного уравнения на первый взгляд имеет слабое практическое значение, оно позволяет получить ряд важных результатов, в том числе имеющих прикладное значение. Прежде всего, методы, использующие расщепление по пространственным координатам, сводятся к решению одномерных систем гиперболических уравнений вдоль направлений расщепления [1]. Используя их, решение, полученное для одномерного случая, может быть перенесено на многомерный случай. Также в задачах сейсмики или акустики океана зачастую геологическая модель может быть описана в виде многослойной среды [2]. В задачах медицины, ультразвуковой фильтрации, оптики также возникают такого рода среды [3].

Изучим подробнее вопрос решения рассматриваемых систем уравнений в области разрыва коэффициентов. Данная задача может рассматриваться как задача погружённого интерфейса и является проблемой, возникающей в большом количестве практических приложений. Для решения такого рода задач уже предложен ряд численных методов. Опишем их подробнее. Постановки можно разделить на два типа: когда граница раздела сред согласована с сеткой, т.е. скачок среды приходится на ячейку или узел, и противоположный случай, когда граница может быть не согласована с сеткой.

Следует заметить, что метод погружённого интерфейса достаточно полно представлен для задач параболического и эллиптического типа (см. [4–8] и др.). Для задач гиперболического типа он представлен не так широко.

Для случая, когда граница раздела сред согласована с конечно-разностной сеткой, существует ряд подходов для повышения порядка в области скачка параметров. Так, в работе [1] рассматривается модификация конечно-объёмного метода типа Годунова на примере уравнений акустики и линейной теории упругости, приводятся точное решение задачи распада–разрыва на границе интерфейса и метод, учитывающий это. Рассматриваются TVD методы, обладающие монотонным поведением. Однако, как описано в ней, порядок схемы в области скачка коэффициентов падает. В статье [9] предложен подход повышения порядка точности конечно-разностного метода в области скачка параметров для конечно-разностных методов на сдвинутых сетках типа FDTD [3], изучен подход усреднения (гомогенизации) коэффициентов конечно-разностной схемы для получения второго порядка на границе раздела сред. В простейшей реализации методы данного класса дают первый порядок точности в области скачка параметров. Также для решения такого рода задач на неструктурных сетках широко применяется разрывный метод Галёркина, описанный в [10] в двумерном случае на неструктурированных (или нерегулярных) сетках, там же предложен подход, позволяющий строить методы произвольного порядка. В частности, данный метод даёт возможность рассчитывать границы раздела сред и между различными физическими средами, типа акустическая–упругая среда [11].

Что касается методов погружённого интерфейса с несогласованной сеткой, то одной из первых работ в данном направлении для двумерного уравнения акустики была статья [12]. В ней рассматривается подход, позволяющий обсчитывать границу произвольной формы для двумерного уравнения акустики. Подход, построенный на методе неопределённых коэффициентов, используется в [13]. Позже он был распространён на уравнение упругости [12]. Предложенные авторами методы требуют предварительного решения систем линейных алгебраических уравнений для получения коэффициентов в конечно-разностной схеме.

В работе [14] авторами предложен так называемый явный упрощённый метод погружённого интерфейса (ESIM), отличие которого от классического метода погружённого интерфейса заключается в том, что на всей сетке используется один и тот же метод повышенного порядка точности и только в точках вблизи интерфейса применяются некоторые корректировки, не зависящие от используемого метода. В [14] авторы рассматривают одномерный случай, а в [15] предложили обобщение данного подхода на двумерный случай. Метод позволяет производить расчёт границы произвольной формы на структурированной прямоугольной сетке. В дальнейшем данный подход был применён и для других систем гиперболических уравнений [16]. Метод выглядит достаточно универсальным, однако требует препроцессинга для вычисления матриц коэффициентов на границе и хранения дополнительных данных для границы. Для задач, где параметры среды меняются плавно или достаточно много границ раздела сред, применение такого рода методов может быть затруднительно.

В статье [17] предложен метод CFM четвёртого порядка точности для двумерного уравнения акустики, согласно которому к узлам вблизи границы раздела сред прибавляется компенсирующая добавка после каждого шага, чтобы учесть скачок параметров. Потенциально метод может быть расширен на более высокие порядки и, в том числе, на случай подвижной границы. Однако он также требует препроцессинга и хранения дополнительных параметров для описания границы.

В данной работе рассматривается новый подход для повышения порядка точности в области скачка коэффициентов для случая, когда граница раздела сред согласована с конечно-разностной сеткой.

Ранее для сеточно-характеристического метода уже разрабатывались подходы для явного выделения разрыва матрицы коэффициентов [18]. Использовались компактные сеточно-характеристические схемы [19] второго и третьего порядков точности. Следует отметить, что в отличие от методов с несогласованной сеткой, таких как ESIM, CFM и др., предложенный в данной работе метод более простой и не требует предварительного расчёта коэффициентов схемы или хранения дополнительных данных. Он скорее ближе к методу [9] и больше подходит для задач, где существует достаточно много границ раздела сред, таких как задачи геофизики, сейсмики и т.д.

Идея предложенного метода построена на сеточно-характеристическом методе [20] и на кусочно-полиномиальной интерполяции [21]. Сеточно-характеристический метод применяется для достаточно широкого круга задач, например, для расчёта различных геофизических задач [22, 23], в том числе с наличием трещиноватых неоднородностей [24, 25]. Также сеточно-характеристический метод применяется в задачах движения поездов [26], в задачах сейсмики и сейсмостойкости [27] и др.

Работа построена следующим образом. Вначале рассматривается базовый подход решения систем уравнений гиперболического типа на примере уравнения акустики, описывается метод для случая разрывных коэффициентов системы. Проводится тестирование и исследование метода, показывается пониженный порядок в области скачка. На основе одномерного уравнения переноса предлагается модифицированный метод, имеющий повышенный порядок точности в области скачка скорости переноса. Затем данный подход обобщается на уравнение акустики и проводится тестирование метода. В конце работы формулируются выводы.

1. Сеточно-характеристический метод для одномерного уравнения акустики. В одномерном случае система линейных уравнений акустики имеет вид [1]

$$v_t + \frac{1}{\rho} p_x = 0, \quad p_t + K v_x = 0, \tag{1}$$

где $p(x,t)$ – возмущение давления от некоторого постоянного значения p_0, $v(x,t)$ – скорость, $\rho(x)$ – плотность упругого материала или газа, $K(x)$ – модуль объёмной упругости (в случае акустической среды он равен первому параметру Ламе). Дополнительно введём такие параметры как акустический импеданс $Z = \sqrt{K\rho}$ и скорость распространения продольных волн (скорость звука) $c = \sqrt{K/\rho}$.

Систему уравнений (1) можно записать в матричном виде как систему дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка

$$\mathbf{U}_t + \mathbf{A}\mathbf{U}_\mathbf{x} = 0,$$

где $\mathbf{U} = \begin{pmatrix} p(x,t) \\ v(x,t) \end{pmatrix}$,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & K \\ 1/\rho & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & c/Z \\ cZ & 0 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Будем рассматривать случай, когда параметры среды Z и c кусочно-постоянны и имеют разрыв в некоторой точке $x = x_\alpha$:

$$(Z,c) = \begin{cases} (Z_l, c_l), & \text{если} \ \ x < x_\alpha, \\ (Z_r, c_r), & \text{если} \ \ x > x_\alpha. \end{cases}$$

Условия сшивки в точке разрыва параметров среды для уравнений акустики имеют вид [12]

$$[p] = 0, \quad [v] = 0. \tag{3}$$

Система (1) является гиперболической, поэтому матрица (2) имеет полный набор действительных собственных чисел и векторов [1]. Матрица $\mathbf{A}$ представима в виде $\mathbf{A} = \mathbf{R\Lambda R^{-1}}$, где $\mathbf{R}$ – матрица собственных векторов, $\mathbf{R^{-1}}$ – обратная к ней и $\mathbf{\Lambda}$ – матрица собственных чисел:

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} -c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}.$$

Введём характеристические переменные (инварианты Римана)

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} \omega^- \\ \omega^+ \end{pmatrix} = \mathbf{R^{-1}U} = \frac{1}{2Z} \begin{pmatrix} -p + Zv \\ p + Zv \end{pmatrix}, \tag{4}$$

тогда

$$\mathbf{U} = \mathbf{RW} = \begin{pmatrix} -Z & Z \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega^- \\ \omega^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z(\omega^+ - \omega^-) \\ \omega^+ + \omega^- \end{pmatrix}, \tag{5}$$

или $p = Z(\omega^+ - \omega^-)$, $\upsilon = \omega^+ + \omega^-$.

Дискретизацию будем рассматривать с постоянными шагами по времени и пространству соответственно τ и h. Индекс по времени будем обозначать n, по координате – m. Без ограничения общности рассмотрим трёхточечный шаблон по координате (t^n, x_{m-1}), (t^n, x_m), (t^n, x_{m+1}), (t^{n+1}, x_m).

В дальнейшем, где смысл понятен из контекста, индексы будем опускать. Как уже оговаривалось ранее, в работе рассматривается согласованная сетка, которую будем располагать таким образом, чтобы точка скачка коэффициентов $x = x_\alpha$ попадала в узел расчётной сетки. Не ограничивая общности, будем рассматривать случай $x_\alpha = 0$. Характеристики ω^+ и ω^- попадают, соответственно, в левую и правую стороны.

Рассмотрим алгоритм для случая постоянных коэффициентов, т.е. $(Z_l, c_l) = (Z_r, c_r) = (Z, c)$. В этом случае можно использовать следующий алгоритм вычисления значений $\mathbf{U}^{n+1}$.

Шаг 1. Переходим к характеристическим переменным, $\mathbf{W}^n = \mathbf{R^{-1}U}^n$.

Шаг 2. Решаем одномерные уравнения переноса для характеристических переменных ω^+ и ω^- и находим $\mathbf{W}^{n+1}$.

Шаг 3. Делаем обратное преобразование $\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{RW}^{n+1}$.

Следует заметить, что данный алгоритм может быть достаточно эффективно реализован. Это связано с наличием аналитического выражения для матриц $\mathbf{R}$ и $\mathbf{R^{-1}}$, а также тем, что фактически хранить переменные $\mathbf{W}$ на всей расчётной сетке не нужно, а можно использовать только несколько значений в зависимости от ширины шаблона разностной схемы по пространству. На шаге 2 алгоритма для восстановления решения на следующем временно́м слое можно использовать различные методы, в частности, конечно-объёмные [9] или сеточно-характеристические [20, 28], что и предлагается в данной работе. Также следует отметить, что данный алгоритм можно записать в матричном виде, минуя переход к характеристическим переменным, как, например, выполняется в [1].

2. Системы с переменными коэффициентами. Для переменных коэффициентов алгоритм, описанный ранее, не может быть применим. Это связано с тем, что преобразование переменных подразумевает возможность внесения $\mathbf{R^{-1}}$ под знак дифференциала, что сделать нельзя, если матрица $\mathbf{R^{-1}}$ зависит от координаты x.

Утверждение 1. *Для случая с кусочно-постоянным распределением коэффициентов переход к следующему временно́му слою возможен по формулам*

$$p^{n+1} = 2\frac{Z_l Z_r}{Z_l + Z_r}(\omega^+ - \omega^-), \quad \upsilon^{n+1} = \frac{2}{Z_l + Z_r}(Z_l\omega^+ + Z_r\omega^-). \tag{6}$$

Чтобы решить данную задачу, при вычислении в узле расчётной сетки, который попадает на границу раздела сред, разделим среду на два полупространства и будем их рассматривать независимо, соответственно слева и справа, как показано на рис. 1.

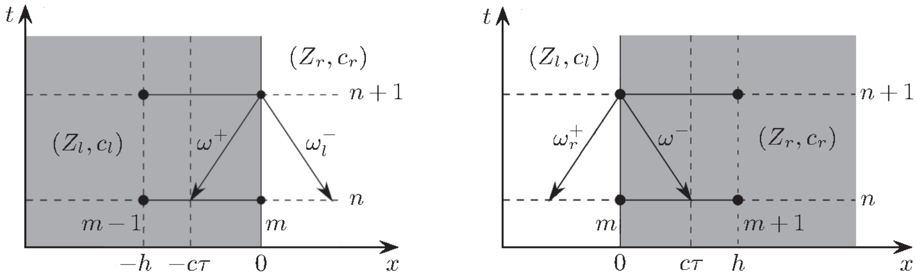

Рис. 1. Разделение расчётной сетки для различных коэффициентов матрицы системы.

Вначале рассмотрим левое полупространство. Будем рассматривать точку $\mathbf{U}_m$ как граничную, соответственно справа находится полупространство с параметрами среды (Z_r, c_r), а слева – с параметрами (Z_l, c_l). Обозначим характеристическую переменную, выходящую за границу области интегрирования, через ω_l^-. Она неизвестна и её необходимо получить из граничного условия. Пусть $\omega_l^{-n+1} = \alpha_l \omega^{+n+1}$, где α_l – некий скалярный коэффициент.

Аналогично для правого полупространства. Характеристика, выходящая за границу области интегрирования, обозначена как $\omega_r^{+n+1} = \alpha_r \omega^{-n+1}$, где α_r – некий скалярный коэффициент. Далее для нахождения α_l и α_r будем использовать условие (3) $[\mathbf{U}] = 0$, т.е. на временно́м шаге $n+1$ необходимо, чтобы $\mathbf{U_l}^{n+1} = \mathbf{U_r}^{n+1}$. Отсюда находим

$$\alpha_r = 2\frac{\omega^+}{\omega^-}\frac{Z_l}{Z_l+Z_r} - \frac{Z_l-Z_r}{Z_l+Z_r}, \quad \alpha_l = 2\frac{\omega^-}{\omega^+}\frac{Z_r}{Z_l+Z_r} + \frac{Z_l-Z_r}{Z_l+Z_r},$$

и значит, выражение (6).

В результате получаем следующий алгоритм вычисления в области разрыва коэффициентов.

Шаг 1. Переходим к характеристическим переменным независимо слева и справа, используя (4): слева $\omega^+ = (p + Z_l v)/(2Z_l)$ и справа $\omega^- = (-p + Z_r v)/(2Z_r)$.

Шаг 2. Используя какой-либо метод, решаем одномерные уравнения переноса для характеристических переменных ω^+ и ω^-.

Шаг 3. Делаем обратное преобразование, используя (6).

Замечание 1. Можно проверить, что равенства (6) при $Z_l = Z_r = Z$ переходят в (5). Алгоритм по вычислительной сложности практически не отличается от алгоритма для постоянных коэффициентов.

Замечание 2. Для кусочно-постоянных параметров среды значения материала нужно привязывать к ячейкам. Для всех точек сетки можно применять метод с переменными коэффициентами, в случае одинаковых значений параметров среды слева и справа от узла он вырождается в метод для постоянных коэффициентов, а по вычислительной сложности практически такой же. Функции p и v непрерывны в точке $x = x_\alpha$, однако производная имеет разрыв. Условия на производные легко получить, исходя из соображения, что поскольку $\mathbf{U}$ непрерывно в любой момент времени t, то и производная по времени $\mathbf{U}_t$ также непрерывна, отсюда получаем условие на производную [12]

$$[\mathbf{A}\mathbf{U}_x] = 0$$

или

$$\left[\frac{1}{\rho}p_x\right] = 0, \quad [Kv_x] = 0.$$

При применении конечно-разностных схем с шаблоном, использующим точки слева и справа от центральной, будет возникать интерполяция через точку разрыва производных, что следует учитывать при расчёте.

Замечание 3. Коэффициенты α_r и α_l можно разложить на два – коэффициент для прошедшей и для отражённой волн. Тогда можно построить граничное условие с заданным импедансом, так как за границей области находится бесконечное полупространство с заданными параметрами среды. Сделать это можно следующим образом. Рассмотрим на примере α_l. Нетрудно заметить, что коэффициент состоит из двух частей, и если занулить в нём параметр ω^- (из правого полупространства ничего не приходит), то получим $\alpha_l^R = (Z_l - Z_r)/(Z_l + Z_r)$ – коэффициент отражения. Тогда другая часть отвечает за прошедшую волну:

$$\alpha_l^T = 2\frac{\omega^-}{\omega^+}\frac{Z_r}{Z_l+Z_r}, \quad \alpha_l = \alpha_l^T + \alpha_l^R.$$

Для задания граничного условия нужно занулить α_l^T, тогда вычисление характеристических переменных, уходящих вправо (ω^-), не требуется. Аналогично для правой части получим $\alpha_r = \alpha_r^T + \alpha_r^R$, где $\alpha_r^R = (Z_r - Z_l)/(Z_l + Z_r)$ и $\alpha_r^T = 2(\omega^+/\omega^-)(Z_r/(Z_l + Z_r))$.

3. Тестирование метода. Прежде чем начать переход к повышению порядка точности в области скачка коэффициентов, рассмотрим работу предложенного метода. Как уже упоминалось ранее, для решения одномерных уравнений переноса, которым удовлетворяют характеристические переменные, можно использовать различные методы. Рассмотрим для функции $u = u(x, t)$ простейшее однородное линейное уравнение переноса

$$u_t + \lambda u_x = 0. \tag{7}$$

Будем полагать, что $\lambda = \mathrm{const} > 0$, поскольку для отрицательных λ все построения аналогичны и могут быть выполнены заменой λ на $-\lambda$ и сеточного шаблона на симметричный по x относительно рассчитываемой точки (t^n, x_m). Число Куранта обозначим как $\sigma = \lambda\tau/h$. Простейшая схема первого порядка точности – это схема типа Куранта–Изаксона–Риса [29]:

$$u^{n+1} = u_m - \sigma(u_m - u_{m-1}). \tag{8}$$

Схема Лакса–Вендрофа [30] второго порядка точности по времени и по координате имеет вид

$$u^{n+1} = u_m - \frac{1}{2}\sigma((u_{m+1} - u_{m-1}) - \sigma(u_{m-1} - 2u_m + u_{m+1})), \tag{9}$$

а схема третьего порядка точности или схема Русанова [31] –

$$u^{n+1} = u_m + \frac{1}{2}\sigma(\Delta_m + \Delta_{m+1}) + \frac{1}{2}\sigma^2(\Delta_m - \Delta_{m+1}) + \frac{1}{6}\sigma(\sigma^2 - 1)(\Delta_{m-1} - 2 * \Delta_m + \Delta_{m+1}), \tag{10}$$

где $\Delta_i = u_{i-1} - u_i$.

Следует отметить, что приведённые разностные схемы немонотонны. Как уже упоминалось ранее, основная область применения, которая предлагается для данных методов – геофизика. В ней при решении задач распространения волновых возмущений в условиях малых деформаций отсутствуют нелинейные эффекты и все изменения в переносе изначальной формы импульса возникают при переходе через границу раздела сред. При точном решении на границе раздела сред нефизичные осцилляции при переходе через границу минимальны и на практике применяются, в основном, немонотонные методы [3, 9, 10]. В задачах такого рода более важен перенос импульса на большие расстояния и сохранение его амплитуды. В случае потенциального расширения предложенного метода на другой класс задач, когда монотонность разностных схем важна, возможно применение монотонных сеточно-характеристических схем [32]. Однако следует учесть, что по норме L_∞ они будут давать первый порядок точности, что показано, например, в работе [19].

3.1. Многослойная среда с переменным импедансом. Рассмотрим пример с многослойной средой, аналогичный разобранному в [1]. Расчётная область $[-0.5, 0.5]$. Параметры среды слева: $c = 1$, $\rho = 1$. Затем, начиная с точки -0.3, начинают чередоваться слои толщиной 0.02 с и плотностью 1 и 3, скорость звука везде постоянная и равна 1. Шаг сетки $h = 0.001$, шаг по времени $\tau = 0.0004$. Использовалась схема третьего порядка точности (10). Начальные данные заданы в виде импульса, движущегося вправо. Импульс имеет форму

$$f(x) = e^{-625(x+0.25)^2/4}. \tag{11}$$

Результат моделирования для тонкослоистой среды приведён на рис. 2. Значения p (сплошная линия) получены схемой третьего порядка (10), $\sigma = 0.4$, значения p_{exact} (точки) посчитаны схемой первого порядка (8), $\sigma = 1$. Решение p_{exact} названо "точным", поскольку при $\sigma = 1$ схема точно переносит решение, при этом в ней нет интерполяции через разрыв. Хорошо видно прохождение импульса через сложную слоистую структуру.

Данный пример демонстрирует возможности метода по учёту множества границ раздела сред, показано отсутствие нефизичных осцилляций при переходе импульса через границы. Несмотря на то, что схема третьего порядка даёт некоторую ошибку, она всё равно сохраняет основную структуру решения и скорость распространения импульса.

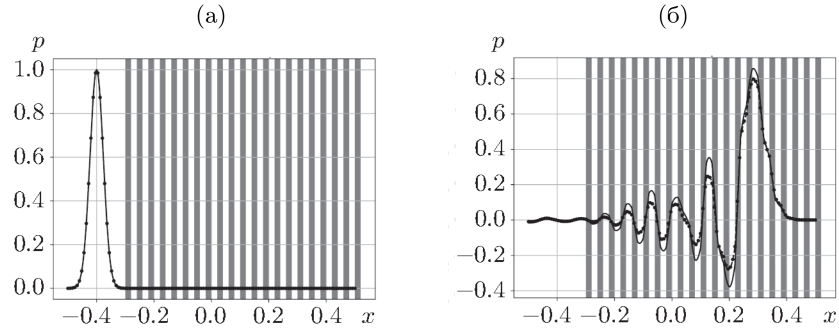

Рис. 2. Примеры расчёта распространения гладкого импульса через слоистую структуру с переменными значениями импеданса и постоянной скоростью звука: а – $t = 0.0$, $\tau = 0$; б – $t = 0.8$, $\tau = 2000$.

3.2. Сеточная сходимость. Исследуем рассматриваемый метод на сеточную сходимость. Для этого возьмём двухслойную среду с параметрами $c_l = 1$, $\rho_l = 1$, $c_r = 2$, $\rho_r = 2$, соответственно импедансы $Z_l = 1$, $Z_r = 4$, граница раздела сред $x_\alpha = 0$. Расчётная область $[-0.5, 1]$. Импульс (11) переходит из левой области в правую. Расчёт ведётся до времени $t = 0.6$. Ошибка измеряется в промежутке $[0, 1]$.

Расчёт проводится с числом Куранта $\sigma = 0.4$ для скорости звука c_l и соответственно $\sigma = 0.8$ для скорости звука c_r. Число узлов в сетке $N = 150, 300, 600, 1200, 2400, 4800$. Для расчёта порядка сходимости использовались следующие нормы: $L_1 = \sum_i |x_i|h$, $L_\infty = \max|x_i|$.

В табл. 1 представлены ошибки и порядки сходимости для схем второго (9) и третьего (10) порядков соответственно. Видно, что численный порядок схем отличается от теоретических и близок к первому или равен ему. Это связано с тем, что искомая функция имеет точку излома в области скачка матрицы коэффициентов, что приводит к понижению порядка до первого.

Таблица 1. Сеточная сходимость для метода Лакса–Вендрофа (9) и метода Русанова (10)

h	Метод Лакса–Вендрофа				Метод Русанова			
	L_1	Порядок	L_∞	Порядок	L_1	Порядок	L_∞	Порядок
0.01	1.201E-01	–	1.000E-02	–	4.185E-02	–	1.000E-02	–
0.005	5.699E-02	1.076	5.728E-01	0.419	1.198E-02	1.804	1.487E-01	1.555
0.0025	1.741E-02	1.711	2.351E-01	1.285	3.414E-03	1.811	4.593E-02	1.694
0.00125	5.009E-03	1.797	7.061E-02	1.735	1.519E-03	1.169	1.773E-02	1.373
0.000625	1.608E-03	1.639	2.223E-02	1.667	7.515E-04	1.015	8.237E-03	1.106
0.0003125	6.059E-04	1.408	7.953E-03	1.483	3.755E-04	1.001	4.048E-03	1.025
0.00015625	2.631E-04	1.203	3.209E-03	1.309	1.878E-04	1.000	2.016E-03	1.006

4. Повышение порядка в области скачка коэффициентов. Далее на примере линейного уравнения переноса (7) рассмотрим вопрос повышения порядка точности метода для случая, когда скорость переноса λ кусочно-постоянна и имеет разрыв в некоторой точке $x = x_\alpha$:

$$\lambda = \begin{cases} \lambda_l, & \text{если } x < x_\alpha, \\ \lambda_r, & \text{если } x > x_\alpha. \end{cases}$$

Условие сшивки в точке разрыва параметров среды для уравнений переноса имеет вид

$$[u] = 0. \tag{12}$$

Рассмотрим решение уравнения (7), используя разностные схемы (9) и (10), удовлетворяющее начальному условию

$$u(0, x) = \sin^4(\pi x) \tag{13}$$

в области $[-0.9, 0.1]$ и периодическим граничным условиям, размер всей области интегрирования $[-1, 2]$. Число Куранта $\sigma = 0.4$. Расчёт проводился до момента времени $t = 2.5$.

Скорость переноса $\lambda = 2$ в интервале $[0.5, 1.5]$ и $\lambda = 1$ в остальной расчётной области. Нетрудно посчитать, что за время $t = 2.5$ импульс должен пройти один период и вернуться в начальное положение.

Результат тестирования приведён в табл. 2 для методов (9) и (10) соответственно. Как видно из таблицы, нет существенного падения порядка точности до первого, как это было с уравнением акустики, однако порядок всё равно не дотягивает до теоретического. Это связано с той же проблемой. Сама функция не имеет разрыва (12) в точке x_α, однако её производная будет иметь скачок [12]

$$[\lambda u_x] = 0. \tag{14}$$

Таблица 2. Сеточная сходимость для уравнения переноса для метода Лакса–Вендрофа (9) и метода Русанова (10)

h	Метод Лакса–Вендрофа				Метод Русанова			
	L_1	Порядок	L_∞	Порядок	L_1	Порядок	L_∞	Порядок
0.04	0.35505	–	0.76520	–	0.12593	–	0.29088	–
0.02	0.17547	1.01681	0.43151	0.82646	0.04354	1.53214	0.10808	1.42829
0.01	0.06069	1.53172	0.15813	1.44828	0.00753	2.53094	0.01937	2.47988
0.005	0.01658	1.87222	0.04303	1.87770	0.00112	2.75251	0.00294	2.71970
0.0025	0.00454	1.86971	0.01199	1.84312	0.00017	2.70403	0.00047	2.63913
0.00125	0.00133	1.76548	0.00363	1.72465	0.00003	2.54744	0.00008	2.48088
0.000625	0.00044	1.59786	0.00122	1.57067	0.00001	2.36544	0.00002	2.31922

Рассмотрим подробнее распространение гладкого импульса через границу раздела сред. На рис. 3 приведён пример расчёта распространения гладкого импульса через границу раздела сред. Расчёт проводился в области $[-1, 1]$, значения $x_\alpha = 0$, $\lambda_l = 1$, $\lambda_r = 2$, $h = 0.002$ (шаг по координате), $\tau = 0.00025$ (шаг по времени). Из графика хорошо видно, что в точке $x = x_\alpha$ искомая функция имеет точку излома, т.е. выполняются условия непрерывности функции (12) и скачка производной (14).

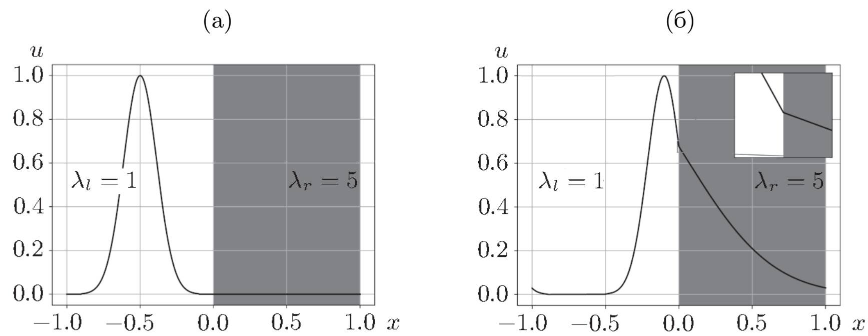

Рис. 3. Пример расчёта распространения гладкого импульса через границу раздела сред: а – по схеме третьего порядка (10), $\sigma = 0.4$; б – для уравнения переноса (7). На врезке показан начальный импульс и момент прохождения через границу раздела поверхностей.

При использовании разностных схем возникает интерполяция через точку излома, в результате чего падает порядок. Для устранения точки излома в работе предлагается новый метод, основанный на кусочно-полиномиальной интерполяции. Похожий подход описан, например, в работе [21].

Не нарушая общности, рассмотрим случай $x_\alpha = 0$. Далее аргумент t, где это возможно, будем опускать. Также предполагаем, что скорость переноса $\lambda(x) > 0$ во всей рассматриваемой области.

Утверждение 2. *Функция*

$$u^*(x) = u\left(\frac{\lambda(x)}{\lambda_l}x\right) \tag{15}$$

в случае двух полупространств

$$u^*(x) = \begin{cases} u(x), & \textit{если} \;\; x < x_\alpha, \\ u\left(\dfrac{\lambda_r}{\lambda_l}x\right), & \textit{если} \;\; x > x_\alpha, \end{cases} \tag{16}$$

удовлетворяет условиям непрерывности $[u^*] = 0$ *и* $[u^*_x] = 0$.

Действительно, условие непрерывности для (15) будет такое же, как и для функции u (12). Далее для производной из (16) следует

$$u^*_x = \frac{\partial u^*(x)}{\partial x} = \begin{cases} \dfrac{\lambda_l}{\lambda_l}\dfrac{\partial u(x)}{\partial x}, & \text{если} \;\; x < x_\alpha, \\ \dfrac{\lambda_r}{\lambda_l}\dfrac{\partial u(\lambda_r\lambda_l^{-1}x)}{\partial x}, & \text{если} \;\; x > x_\alpha. \end{cases}$$

Из (14) получим равенства

$$[\lambda u_x] = \left[\frac{\lambda}{\lambda_l}u_x\right] = [u^*_x] = 0,$$

т.е. у функции u^* отсутствует скачок производной в точке $x = x_\alpha = 0$. На рис. 4 приведены графики функций u (штриховая кривая) и u^* (15) (сплошная). Стрелкой показано фактическое преобразование координат в правой полуплоскости. Видно, что устранена точка излома и, соответственно, скачок производной.

Утверждение 3. *Для функций* u *и* u^* *верно равенство* $u(x_\alpha, t+\tau) = u^*(x_\alpha, t+\tau)$.

Действительно, из (16) следует, что для $x < x_\alpha$ данные функции совпадают и

$$u(x_\alpha, t+\tau) = u(x_\alpha - \lambda_l\tau, t) = u^*(x_\alpha - \lambda_l\tau, t).$$

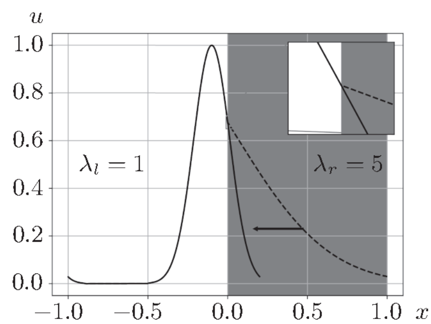

Рис. 4. Графики функции u^* и u.

5. Построение сеточно-характеристической схемы повышенного порядка для кусочно-постоянной скорости переноса. Рассмотрим метод повышенного порядка, построенный на аппроксимации решения полиномом заданной степени. Строить сеточно-характеристическую схему будем на четырёхточечном шаблоне по координатам

$$(t^n, x_{m-2}), \quad (t^n, x_{m-1}), \quad (t^n, x_m), \quad (t^n, x_{m+1}), \quad (t^{n+1}, x_m). \tag{17}$$

Схема максимального порядка, которая может быть построена на данном шаблоне, имеет третий порядок [28]. Схематично шаблон (17) (по координате) приведён на рис. 5, значения функции u показаны сплошной линией, u^* – штриховой. Шаг сетки постоянен и равен h, значение скорости переноса $\lambda(x)$ кусочно-постоянное и постоянно в пределах ячейки, имеет полуцелый индекс.

Исходя из характеристических свойств уравнения, можно записать

$$u(x_m, t^{n+1}) = u(x_m - \lambda_{m-1/2}\tau, t^n) = u^*(x_m - \lambda_{m-1/2}\tau, t^n).$$

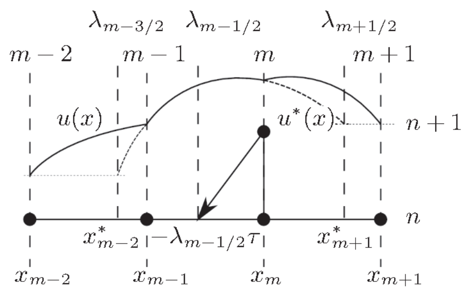

Рис. 5. Четырёхточечный шаблон для построения разностной схемы.

Необходимо построить интерполяционный полином для функции (15), однако значения этой функции для построения полинома известны только в точках

$$x^*_{m-2} = x_{m-1} - h\frac{\lambda_{m-3/2}}{\lambda_{m-1/2}}, \quad x_{m-1}, \quad x_m, \quad x^*_{m+1} = x_m + h\frac{\lambda_{m+1/2}}{\lambda_{m-1/2}},$$

т.е. фактически нужно строить конечно-разностный метод для уравнения переноса с постоянной скоростью переноса $\lambda = \lambda_{m-1/2}$ на шаблоне с переменным шагом (h_1, h_2, h_3), где $h_1 = h\lambda_{m-3/2}/\lambda_{m-1/2}$, $h_2 = h$, $h_3 = h\lambda_{m+1/2}/\lambda_{m-1/2}$.

Для построения такого рода схем можно использовать разложение в ряд Тейлора около точки x_m либо нахождение коэффициентов интерполяционного полинома. Обозначим $u_i = u_{m+i}$, $i = -2, -1, 0, 1$. Тогда для схемы второго порядка можно построить полином вида

$$f_2(x) = ax^2 + bx + c.$$

Если $x_m = 0$, то $u_m^{n+1} = f(-\lambda_{m-1/2}\tau)$,

$$a = \frac{u_{-1}h_3 - u_0(h_2 + h_3) + u_1 h_2}{h_3 h_2 (h_3 + h_2)}, \quad d = \frac{-u_{-1}h_3^2 + u_0(h_3^2 - h_2^2) + u_1 h_2^2}{h_3 h_2 (h_3 + h_2)}, \quad c = u_0. \tag{18}$$

Для схемы третьего порядка имеем

$$f_3(x) = (h_1 + h_2 + x)\left((h_2 + x)\left(\frac{x(\theta_2 - \theta_3)}{h_1 + h_2 + h_3} + \theta_1\right) + \theta_0\right) + u_{-2}, \tag{19}$$

где

$$\theta_0 = \frac{u_{-1} - u_{-2}}{h_1}, \quad \theta_1 = \frac{h_1(u_0 - u_{-1}) - h_2(u_{-1} - u_{-2})}{h_1 h_2 (h_1 + h_2)},$$

$$\theta_2 = \frac{h_2(u_1 - u_0) - h_3(u_0 - u_{-1})}{h_2 h_3 (h_2 + h_3)}, \quad \theta_3 = \frac{h_1(u_0 - u_1) - h_2(u_1 - u_2)}{h_1 h_2 (h_1 + h_2)}.$$

6. Тестирование. В табл. 3 приведены результаты тестирования порядка сходимости методов (18) и (19) соответственно. Параметры тестирования такие же, что и для табл. 2. Хорошо видно, что порядок сходимости методов совпадает с теоретическим порядком схем.

Таблица 3. Сеточная сходимость для уравнения переноса для метода второго порядка с переменными коэффициентами (18) и метода третьего порядка с переменными коэффициентами (19)

h	Метод (18)				Метод (19)			
	L_1	Порядок	L_∞	Порядок	L_1	Порядок	L_∞	Порядок
0.04	0.35689	–	0.76195	–	0.12035	–	0.27664	–
0.02	0.17176	1.05503	0.42513	0.84179	0.04147	1.53706	0.10246	1.43291
0.01	0.05815	1.56268	0.14958	1.50701	0.00671	2.62698	0.01632	2.65075
0.005	0.01514	1.94130	0.03822	1.96841	0.00088	2.92413	0.00213	2.93525
0.0025	0.00378	2.00068	0.00954	2.00243	0.00011	2.98906	0.00027	2.98990
0.00125	0.00094	2.00293	0.00238	2.00141	0.00001	2.99940	0.00003	2.99806
0.000625	0.00024	2.00157	0.00060	2.00039	0.00000	3.00032	0.00000	2.99948

7. Схема для уравнения акустики с переменными коэффициентами. Для системы уравнений линейной теории акустики (1) можно поступить аналогичным образом. Однако характеристические переменные имеют скачок не только производной, но и самой функции, так как из (3) и (5) следует, что $[\mathbf{R}\omega] = [\mathbf{U}] = 0$.

Сами искомые функции не имеют разрыва в точке x_α (3). Для сохранения повышенного порядка точности интерполяцию стоит применять в искомых функциях. Следует учитывать, что скачок производных для уравнения акустики отличается от скачка уравнения переноса (14), а именно [12]

$$[\mathbf{U}] = [\mathbf{A}\mathbf{U}_x] = 0,$$

или отдельно для p_x и v_x

$$\left[\frac{1}{\rho}p_x\right] = 0, \quad [Kv_x] = 0.$$

Исходя из изложенного выше получен следующий алгоритм расчёта.

Шаг 1. Рассчитываем $p_-^{n+1} = p^n(x_\alpha - c_l\tau)$, $\upsilon_-^{n+1} = \upsilon^n(x_\alpha - c_l\tau)$ и $p_+^{n+1} = p^n(x_\alpha + c_r\tau)$, $\upsilon_+^{n+1} = \upsilon^n(x_\alpha + c_r\tau)$, используя (18) или (19).

Шаг 2. Переходим к характеристическим переменным $\omega^+ = (p_+ + Z_l\upsilon_+)/(2Z_l)$ и $\omega^- = (-p_- + Z_r\upsilon_-)/(2Z_r)$, используя (4).

Шаг 3. Делаем обратное преобразование (6).

8. Тестирование нового алгоритма для уравнения акустики. Проведём тестирование сходимости, аналогичное тому, что приведено в табл. 1.

Результаты тестирования приведены в табл. 4 для методов второго и третьего порядков соответственно. Видно, что абсолютное значение норм ошибок значительно уменьшилось и порядок стал ближе к теоретическому. Для схемы второго порядка он равен 2 и для схемы третьего порядка 2.8.

Таблица 4. Сеточная сходимость для метода второго порядка (18) и метода третьего порядка (19) для одномерного уравнения акустики

h	Метод второго порядка				Метод третьего порядка			
	L_1	Порядок	L_∞	Порядок	L_1	Порядок	L_∞	Порядок
0.01	1.137E-01	–	1.000E-02	–	4.011E-02	–	1.000E-02	–
0.005	5.237E-02	1.118	5.117E-01	0.492	1.086E-02	1.885	1.383E-01	1.616
0.0025	1.505E-02	1.799	1.958E-01	1.386	1.760E-03	2.625	2.563E-02	2.432
0.00125	3.810E-03	1.981	5.107E-02	1.939	2.340E-04	2.911	3.554E-03	2.851
0.000625	9.532E-04	1.999	1.262E-02	2.016	3.031E-05	2.949	4.677E-04	2.926
0.0003125	2.382E-04	2.000	3.140E-03	2.008	4.010E-06	2.918	6.297E-05	2.893
0.00015625	5.955E-05	2.000	7.837E-04	2.002	5.585E-07	2.844	8.973E-06	2.811

На рис. 2 значения p^* (штриховая линия) получены схемой третьего порядка (19) и модифицированным методом с переменными коэффициентами, $\sigma = 0.4$. Видно практически полное совпадение с “точным” решением.

Заключение. В работе предложен новый метод построения сеточно-характеристических схем для систем гиперболических уравнений с переменными коэффициентами. На примере одномерного уравнения акустики показано уменьшение абсолютного значения ошибки и повышение порядка точности метода. Метод основан на сеточно-характеристическом подходе [20] и кусочно-полиномиальной интерполяции [21], имеет повышенный порядок в области скачка параметров среды. В отличие от методов, построенных по принципу погружённого интерфейса, он имеет аналитическое выражение и вычислительно менее затратный (в области скачка). По своему типу он скорее подходит для расчёта задач геофизики и им подобных. Метод может быть расширен на двумерный и трёхмерный случаи. Для этого можно использовать методы, использующие расщепление по пространственным координатам, которые сводятся к решению одномерных систем гиперболических уравнений вдоль направлений расщепления [1]. К его преимуществам можно отнести повышенный порядок точности в области скачка параметров среды, меньшую интегральную ошибку вычислений, аналитические выражения для коэффициентов схемы, отсутствие необходимости хранения и вычисления дополнительных параметров, возможность задания параметров среды в каждой ячейке; относительную простоту реализации (не требуется предварительного вычисления и хранения дополнительных данных) и скорость работы. К недостаткам можно отнести требование согласованности параметров среды с сеткой.

В ряде случаев учёт нормали к границе раздела поверхностей может быть критичным. В качестве дальнейшего направления работы предполагается доработка метода для случая несогласованной сетки и учёт нормали к поверхности раздела поверхностей в многомерном случае.

Авторы выражают благодарность Ю.И. Скалько за полезные консультации по работе.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 21-11-00139).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *LeVeque R.J.* Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems. Cambridge, 2002.
2. *Brekhovskikh L.M., Godin O.A.* Acoustics of Layered Media I. Berlin; Heidelberg, 1990.
3. *Moczo P., Kristek J., Galis M.* The Finite-Difference Modelling of Earthquake Motions: Waves and Ruptures. Cambridge, 2014.
4. *Li Z., Ito K.* The Immersed Interface Method: Numerical Solutions of PDEs Involving Interfaces and Irregular Domains. Siam, 2006.
5. *Xu J.* Estimate of the convergence rate of finite element solutions to elliptic equations of second order with discontinuous coefficients // arXiv Prepr. arXiv1311.4178. 2013.
6. *Adjerid S., Ben-Romdhane M., Lin T.* Higher degree immersed finite element methods for second-order elliptic interface problems // Int. J. Numer. Anal. & Model. 2014. V. 11. № 3. P. 541–566.
7. *He X., Lin T., Lin Y., Zhang X.* Immersed finite element methods for parabolic equations with moving interface // Numer. Methods Partial Differ. Equat. 2013. V. 29. № 2. P. 619–646.
8. *Tong F., Wang W., Feng X., Zhao J., Li Z.* How to obtain an accurate gradient for interface problems? // J. Comput. Phys. 2020. V. 405. P. 109070.
9. *Lisitsa V., Podgornova O., Tcheverda V.* On the interface error analysis for finite difference wave simulation // Comput. Geosci. 2010. V. 14. № 4. P. 769–778.
10. *Kaser M., Dumbser M.* An arbitrary high-order discontinuous Galerkin method for elastic waves on unstructured meshes-I. The two-dimensional isotropic case with external source terms // Geophys. J. Int. 2006. V. 166. № 2. P. 855–877.
11. *Wilcox L., Stadler G., Burstedde C., Ghattas O.* A high-order discontinuous Galerkin method for wave propagation through coupled elastic-acoustic media // J. Comput. Phys. 2010. V. 229. № 24. P. 9373–9396.
12. *Zhang C., LeVeque R.J.* The immersed interface method for acoustic wave equations with discontinuous coefficients // Wave Motion. 1997. V. 25. № 3. P. 237–263.
13. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Однородные разностные схемы // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1961. Т. 1. № 1. С. 5–67.
14. *Piraux J., Lombard B.* A new interface method for hyperbolic problems with discontinuous coefficients: one-dimensional acoustic example // J. Comput. Phys. 2001. V. 168. № 1. P. 227–248.
15. *Lombard B., Piraux J.* Numerical treatment of two-dimensional interfaces for acoustic and elastic waves // J. Comput. Phys. 2004. V. 195. № 1. P. 90–116.
16. *Chiavassa G., Lombard B.* Time domain numerical modeling of wave propagation in 2D heterogeneous porous media // J. Comput. Phys. 2011. V. 230. № 13. P. 5288–5309.
17. *Abraham D.S., Marques A.N., Nave J.C.* A correction function method for the wave equation with interface jump conditions // J. Comput. Phys. 2018. V. 353. P. 281–299.
18. *Golubev V., Shevchenko A., Khokhlov N., Petrov I., Malovichko M.* Compact grid-characteristic scheme for the acoustic system with the piece-wise constant coefficients // Int. J. Appl. Mech. 2022. V. 14. № 2. P. 2250002.
19. *Khokhlov N.I., Petrov I.B.* On one class of high-order compact grid-characteristic schemes for linear advection // Russ. J. Numer. Anal. Math. Model. 2016. V. 31. № 6. P. 355–368.
20. *Favorskaya A.V., Zhdanov M.S., Khokhlov N.I., Petrov I.B.* Modelling the wave phenomena in acoustic and elastic media with sharp variations of physical properties using the grid-characteristic method // Geophys. Prospect. 2018. V. 66. № 8. P. 1485–1502.
21. *Ito K., Takeuchi T.* Immersed interface CIP for one dimensional hyperbolic equations // Commun. Comput. Phys. 2014. V. 16. № 1. P. 96–114.
22. *Stognii P.V., Khokhlov N.I., Petrov I.B.* The numerical solution of the problem of the contact interaction in models with gas pockets // J. Phys. Conf. Ser. 2021. V. 1715. № 1. P. 012058.
23. *Golubev V.I., Khokhlov N.I., Nikitin I.S., Churyakov M.A.* Application of compact grid-characteristic schemes for acoustic problems // J. Phys. Conf. Ser. 2020. V. 1479. № 1. P. 012058.
24. *Khokhlov N.I., Favorskaya A., Furgailo V.* Grid-characteristic method on overlapping curvilinear meshes for modeling elastic waves scattering on geological fractures // Minerals. 2022. V. 12. № 12. P. 1597.
25. *Khokhlov N., Favorskaya A., Mitkovets I., Stetsyuk V.* Grid-characteristic method using Chimera meshes for simulation of elastic waves scattering on geological fractured zones // J. Comput. Phys. 2021. V. 446. P. 110637.
26. *Kozhemyachenko A.A., Petrov I.B., Favorskaya A.V., Khokhlov N.I.* Boundary conditions for modeling the impact of wheels on railway track // Comput. Math. Math. Phys. 2020. V. 60. № 9. P. 1539–1554.

27. *Favorskaya A.V., Khokhlov N.I., Petrov I.B.* Grid-characteristic method on joint structured regular and curved grids for modeling coupled elastic and acoustic wave phenomena in objects of complex shape // Lobachevskii J. Math. 2020. V. 41. № 4. P. 512–525.
28. *Kholodov Y.A., Kholodov A.S., Tsybulin I. V.* Construction of monotone difference schemes for systems of hyperbolic equations // Comput. Math. Math. Phys. 2018. V. 58. № 8. P. 1226–1246.
29. *Courant R., Isaacson E., Rees M.* On the solution of nonlinear hyperbolic differential equations by finite differences // Commun. Pure Appl. Math. 1952. V. 5. № 3. P. 243–255.
30. *Lax P., Wendroff B.* Systems of conservation laws // Commun. Pure Appl. Math. 1960. V. 13. № 2. P. 217–237.
31. *Русанов В.В.* Разностные схемы третьего порядка точности для прямого вычисления разрывных решений // Докл. АН СССР. 1968. Т. 180. № 6. С. 1303–1305.
32. *Холодов А.С., Холодов Я.А.* О критериях монотонности разностных схем для уравнений гиперболического типа // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2006. Т. 46. № 9. С. 1638–1667.

Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)

Поступила в редакцию 17.02.2023 г.
После доработки 29.03.2023 г.
Принята к публикации 19.05.2023 г.