ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 7, с. 996–1000

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.925+517.93

СУЩЕСТВОВАНИЕ ЕДИНСТВЕННОЙ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ ОТОБРАЖЕНИЙ, ПОРОЖДЁННЫХ МНОГОМЕРНОЙ СИСТЕМОЙ С РЕЛЕЙНЫМ ГИСТЕРЕЗИСОМ

© 2023 г. А. М. Камачкин, В. В. Евстафьева, Д. К. Потапов

Рассматривается многомерная система обыкновенных дифференциальных уравнений с релейным гистерезисом. Параметры системы полагаются такими, что существует семейство непрерывных операторов, каждый из которых отображает некоторое связное компактное множество в себя. При этом оператору соответствует периодическая орбита с чётным числом точек переключения в фазовом пространстве системы. Для семейства операторов получено необходимое и достаточное условие существования единственной неподвижной точки.

DOI: 10.31857/S0374064123070129, EDN: GWRHOJ

Введение. Постановка задачи. Исследуем многомерную нелинейную динамическую систему со сложным разбиением фазового пространства траекториями разных конфигураций, в том числе периодическими орбитами с различным числом точек переключения.

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\dot{X} = AX + BF(\sigma). \tag{1}$$

Здесь X – вектор состояний системы, $X \in \mathbb{R}^n$, A – постоянная невырожденная квадратная матрица n-го порядка с вещественными элементами, B – постоянный ненулевой вектор из $\mathbb{R}^n$ с вещественными элементами, $F(\sigma)$ – многозначная функция, описывающая нелинейность типа неидеального (гистерезисного) двухпозиционного реле с пороговыми значениями l_1, l_2 $(l_1 < l_2)$ и значениями выхода m_1, m_2 $(m_1 < m_2)$, $\sigma = (\Gamma, X)$ – скалярное произведение векторов Γ и X, где Γ – постоянный ненулевой вектор из $\mathbb{R}^n$ с вещественными элементами.

Функция $F(\sigma(t))$ определена при непрерывном входе $\sigma(t)$ для $t \geqslant 0$ в классе кусочно-непрерывных функций и задаётся следующим образом: из неравенства $\sigma(t) \leqslant l_1$ следует равенство $F(\sigma) = m_1$, из неравенства $\sigma(t) \geqslant l_2$ – равенство $F(\sigma) = m_2$, а из неравенств $l_1 < \sigma(t) < l_2$ $(t_1 < t \leqslant t_2)$ – равенство $F(\sigma(t_1)) = F(\sigma(t_2))$, т.е. $F(\sigma(t))$ принимает постоянное значение на отрезке $[t_1, t_2]$, если $F(\sigma(t_1)) = m_1$ и $\sigma(t) < l_2$ или $F(\sigma(t_1)) = m_2$ и $\sigma(t) > l_1$. Обход по петле гистерезиса на плоскости $(\sigma, F(\sigma))$ совершается против хода часовой стрелки. В приложениях функцию $F(\sigma(t))$ называют *нелинейной характеристикой системы.*

Из последних исследований нелинейных систем с обратной связью в форме двухпозиционного реле с гистерезисом отметим работы [1–9]. В данной статье продолжены эти исследования.

В пространстве $\mathbb{R}^n$ уравнение $(\Gamma, X) = l_i$, $i = 1, 2$, определяет гиперплоскость, которую называют *поверхностью переключения*, поскольку в её точках происходит переключение реле. Эти точки называют *точками переключения.* Поверхность переключения обозначим через L_i, $i = 1, 2$.

Траектория любого непрерывного решения системы (1) с точками переключения в фазовом пространстве состоит из кусков траекторий в силу систем

$$\dot{X} = AX + Bm_1, \quad \dot{X} = AX + Bm_2, \tag{2}$$

склеивание которых происходит в точке переключения. Непрерывному периодическому решению системы (1) соответствует замкнутая фазовая траектория (периодическая орбита) с точкой переключения X^*, удовлетворяющей равенствам $X^* = X(t_0) = X(t_0 + T)$, $(\Gamma, X^*) = l_i$ $(i = 1, 2)$, где t_0 – начальный момент времени, T – период, за который изображающая точка решения возвращается в точку X^*.

Пусть система (1) не имеет положений равновесия. Будем рассматривать непрерывные периодические решения с траекториями, составленными из конечного числа кусков траекторий ввиду систем (2), число этих кусков совпадает с числом точек переключения за период T. В силу решения системы (1) поверхность L_i (или её подмножество) отображается в себя.

Непрерывный оператор P, отображающий некоторое связное множество $S_i \subset L_i$, $i = 1, 2$, в себя в силу решения системы (1), представим в виде

$$P(X_0, T(X_0)) = e^{A(T(X_0)-t_0)}\left(X_0 + \int\limits_{t_0}^{T(X_0)} e^{-A(\tau-t_0)} BF(\sigma)\, d\tau\right), \tag{3}$$

где $X_0 = X(t_0)$ – начальная точка отображения, $X_0 \in S_i$, $T(X_0)$ – время возврата изображающей точки по траектории, задаваемой системой (1), в множество S_i. Точка X_0 произвольная, т.е. может не принадлежать периодической орбите.

Пусть существует периодическое решение $X(\cdot)$ системы (1) с $2k$, $k \in \mathbb{N}$, точками переключения X^1, X^2, $\ldots$, X^{2k}. Изображающая точка решения начинает движение в точке X^1 на поверхности L_1 в момент времени t_0 и достигает поверхности L_2 в точке X^2 в момент времени t_1 в силу системы (1) при $m_i = m_1$, затем переходит на L_1 в точку X^3 в момент времени t_2 при $m_i = m_2$, далее достигает L_2 в точке X^4 в момент времени t_3 при $m_i = m_1$ и так продолжает движение от L_1 к L_2 и обратно k раз. В момент времени t_{2k} изображающая точка возвращается на поверхность L_1 в начальную точку X^1 в силу системы (1) при $m_i = m_2$. Значит $t_{2k} = T$, где T – период решения.

Пусть имеют место неравенства

$$-(\Gamma, A^{-1}Bm_2) < l_1, \quad -(\Gamma, A^{-1}Bm_1) > l_2. \tag{4}$$

Заметим, что матрица A^{-1} существует в силу невырожденности A. Неравенства (4) дают условие, при котором для систем (2) выполняется равенство $\dot{X} = 0$ в точке $X_i = -A^{-1}Bm_i$, $i = 1, 2$, лежащей в фазовом пространстве вне области между поверхностями переключения (т.е. вне зоны неоднозначности $F(\sigma)$).

Далее запишем систему относительно точек и моментов времени переключения в соответствии с описанным выше поведением движения изображающей точки решения. Итак, имеем

$$(\Gamma, X^1) = l_1, \quad X^2 = e^{A(t_1-t_0)}X^1 + \int\limits_{t_0}^{t_1} e^{A(t_1-\tau)} Bm_1\, d\tau,$$

$$(\Gamma, X^2) = l_2, \quad X^3 = e^{A(t_2-t_1)}X^2 + \int\limits_{t_1}^{t_2} e^{A(t_2-\tau)} Bm_2\, d\tau,$$

$$\ldots$$

$$(\Gamma, X^{2k-1}) = l_1, \quad X^{2k} = e^{A(t_{2k-1}-t_{2k-2})}X^{2k-1} + \int\limits_{t_{2k-2}}^{t_{2k-1}} e^{A(t_{2k-1}-\tau)} Bm_1\, d\tau,$$

$$(\Gamma, X^{2k}) = l_2, \quad X^1 = e^{A(t_{2k}-t_{2k-1})}X^{2k} + \int\limits_{t_{2k-1}}^{t_{2k}} e^{A(t_{2k}-\tau)} Bm_2\, d\tau. \tag{5}$$

Система (5) описывает процесс отображения множества $S_1 \subset L_1$ в себя. Аналогично можно построить процесс отображения $S_2 \subset L_2$ в себя. При этом точка $X^j \in S_i$, $j = \overline{1, 2k}$, $i = 1, 2$, принадлежит траектории периодического решения.

Замечание 1. В общем случае, когда в последнем уравнении вместо точки X^1 берём X^{2k+1}, система вида (5) описывает процесс отображения множества S_i, $i = 1, 2$, в себя в силу систем (2). Если $X^{2k+1} \neq X^1$, то $X^j \in S_i$, $j = \overline{1, 2k+1}$, но не принадлежит траектории периодического решения.

Таким образом, система (5) для любого $k \in \mathbb{N}$ задаёт отображение множества S_1 в себя с оператором P, определённым формулой (3). Оператор P обозначим через P_2, если отображение множества S_1 в себя имеет два перехода в силу систем (2), через P_4, если четыре перехода и т.д. В результате получим семейство $\{P_{2k}\}_{k=1}^{\infty}$, каждый оператор которого соответствует отображению множества S_1 в себя. Если оператор P_{2k} имеет неподвижную точку, то существует периодическое решение системы (1) с $2k$ точками переключения в фазовом пространстве.

Задача состоит в том, чтобы установить условия, при которых система (1) имеет периодические решения, соответствующие операторам из семейства $\{P_{2k}\}_{k=1}^{\infty}$.

1. Свойства множества и семейства операторов. Рассмотрим свойства множества S_i $(i = 1, 2)$, которое отображается в себя оператором P_{2k} $(k \in \mathbb{N})$ вида (5).

Пусть собственные числа матрицы A имеют отрицательные вещественные части. Тогда на поверхности L_i существует выпуклое компактное множество S_i, которое в силу системы (1) отображается в себя оператором P_{2k} для любого $k \in \mathbb{N}$ (см. подробнее [7, 8]). Множество S_i является пересечением ограниченного замкнутого множества из $\mathbb{R}^n$ с поверхностью L_i. Значит, множество S_i принадлежит пространству $\mathbb{R}^{n-1}$.

В статье [7] доказано, что изображающая точка любого решения системы (1) с точками переключения за конечное время попадает и остаётся в ограниченной области фазового пространства, т.е. оператор P_{2k} отображает множество S_i в себя для любого k. В случае существования периодического решения с $2k$ изолированными точками переключения в фазовом пространстве установлено, что при $(\Gamma, B) \neq 0$ эти точки локально непрерывно зависят от параметров A и B, а также от Γ, l_1, l_2, m_1 и m_2. Точка переключения является изолированной в том смысле, что в её окрестности не существует точек переключения других периодических орбит. Кроме того, если $(\Gamma, B) \neq 0$, то в точках переключения траектория решения одновременно не касается поверхностей переключения.

В работе [8] установлено, что если точка касания принадлежит множеству S_i, то оно может быть заменено его подмножеством, не содержащим точку касания. Это подмножество сохраняет свойства связности, выпуклости и компактности множества S_i. Поэтому далее полагаем, что S_i не содержит точку касания и выполняется условие $(\Gamma, B) \neq 0$.

Пусть $\mathcal{P} = \{P_{2k}\}_{k=1}^{\infty}$. Тогда согласно (5) имеем, что $\mathcal{P}$ – это семейство отображений, определённых на множестве S_i $(i = 1, 2)$ из пространства $\mathbb{R}^{n-1}$ со значениями в этом множестве. Если $k = 1$, то $P_2(X)$ является непрерывным отображением множества S_i в себя с двумя переходами. Для любых двух различных точек X' и X'' выполняется условие

$$P_2(X') \neq P_2(X'').$$

Отображение $P_2(X)$ взаимно однозначное. При $k \geqslant 2$ получаем последовательность $\{P_{2k}\}_{k=2}^{\infty}$, каждый член которой является суперпозицией непрерывных отображений вида $P_2(X)$. Поэтому семейство $\mathcal{P}$ также различает точки. Кроме того, семейство $\mathcal{P}$ различает замкнутые множества (см. [8]).

2. Неподвижные точки семейства операторов. Поставленная задача сводится к решению проблемы существования неподвижной точки оператора P_{2k}, $k \in \mathbb{N}$, и установлению связи неподвижных точек семейства операторов $\mathcal{P}$.

Теорема Какутани (см., например, [10, с. 638]) даёт достаточное условие существования неподвижной точки замкнутого многозначного отображения $f : K \to 2^K$. Здесь K – непустое компактное выпуклое множество в банаховом пространстве, 2^K – множество всех подмножеств множества K и для каждой точки $x \in K$ множество $f(x)$ является непустым выпуклым подмножеством множества K.

Воспользуемся модификацией теоремы Какутани, которую называют *теоремой Маркова–Какутани.* Приведём формулировку этой теоремы, сохраняя обозначения из монографии [11].

Теорема 1 [11, с. 220]. *Пусть E – отделимое топологическое векторное пространство, K – непустое компактное выпуклое множество в E и Γ – некоторое семейство непрерывных отображений множества K в себя, удовлетворяющее следующим двум условиям:*

а) если $u \in \Gamma$, $x, y \in K$ и α, β – такие положительные числа, что $\alpha + \beta = 1$, то $u(\alpha x + \beta y) = \alpha u(x) + \beta u(y)$;

б) существуют такое натуральное число n и такие подсемейства Γ_i семейства Γ, $0 \leqslant \leqslant i \leqslant n-1$, что $\{1\} = \Gamma_n \subset \Gamma_{n-1} \subset \ldots \subset \Gamma_0 = \Gamma$, где 1 – тождественное отображение на K, и каждой паре $u', u'' \in \Gamma_{i-1}$ соответствует такой элемент $s \in \Gamma_i$, что $u'u'' = u''u's$.

Тогда существует точка $x_0 \in K$ такая, что $u(x_0) = x_0$ для всех отображений $u \in \Gamma$.

По условию б) теоремы 1 элементы семейства Γ попарно коммутируют. Рассмотрим частный случай, когда Γ является абелевой полугруппой непрерывных отображений множества K в себя, которая содержит тождественное отображение 1. Если $1 \notin \Gamma$, то тождественное отображение всегда можно присоединить к семейству Γ, не нарушая при этом другие условия теоремы 1 [11, с. 222]. Следовательно, в этом случае теорема Маркова–Какутани утверждает существование неподвижной точки одновременно для всех отображений из некоторого семейства непрерывных отображений непустого выпуклого компактного подмножества топологического векторного пространства в себя.

Покажем, что семейство $\mathcal{P}$ удовлетворяет условиям теоремы Маркова–Какутани. Имеет место

Теорема 2. *Пусть в системе (1) матрица A имеет собственные числа с отрицательными вещественными частями, $(\Gamma, B) \neq 0$ и выполнены неравенства (4). Семейство операторов $\mathcal{P}$ имеет единственную неподвижную точку тогда и только тогда, когда для $n \geqslant 3$ выполняется условие*

$$\Lambda(P_2) = 1 + (-1)^{n-2} \operatorname{sign} J_{P_2}(X_{\text{fp}}) = 0, \tag{6}$$

где X_{fp} – неподвижная точка отображения $P_2(X)$, $J_{P_2}(X_{\text{fp}})$ – якобиан отображения $P_2(X)$, вычисленный в точке X_{fp}.

Доказательство. Необходимость. Пусть семейство операторов $\mathcal{P}$ имеет единственную неподвижную точку. Доказательство проведём от противного. Согласно теореме 2 из [8] при условиях, наложенных на параметры системы (1), существует по крайней мере одна неподвижная точка X_{fp} отображения $P_2(X)$. Рассмотрим, например, множество $S_1 \setminus \{X_{\text{fp}}\}$, которое является гомотопически эквивалентным сфере S^{n-2}. Здесь и далее $n \geqslant 3$. Тогда по теореме Лефшеца о неподвижной точке (см. [12, с. 419]) для отображения $P_2(X)$ число Лефшеца вычисляется по формуле $\Lambda(P_2) = 1 + (-1)^{n-2} \deg P_2(X)$, где $\deg P_2(X)$ – топологическая степень непрерывного отображения $P_2(X)$, и если $\Lambda(P_2) \neq 0$, то существует ещё одна неподвижная точка отображения $P_2(X)$ на множестве $S_1 \setminus \{X_{\text{fp}}\}$. Множество S_1 не только компактно, но и связно. Поэтому согласно [13, с. 95] имеем $\Lambda(P_2) = 1 + (-1)^{n-2} \operatorname{sign} J_{P_2}(X_{\text{fp}})$. Если для отображения $P_2(X)$ существует неподвижная точка, отличная от X_{fp}, то семейство $\mathcal{P}$ имеет две неподвижные точки. Получили противоречие, которое доказывает необходимость условия (6).

Достаточность. Пусть выполнено условие (6) для $n \geqslant 3$. Покажем, что семейство операторов $\mathcal{P}$ имеет единственную неподвижную точку. Для семейства $\mathcal{P}$ выполняются условия теоремы 1. Во-первых, отображение P_{2k} удовлетворяет свойству, близкому к линейности, что следует из формализации вида (5). Во-вторых, операторы семейства $\mathcal{P}$ попарно коммутируют. Действительно, оператор $P_{2k} \in \mathcal{P}$ для любого k взаимно однозначно отображает S_i, $i = 1, 2$, в себя, при этом обратный к нему оператор P_{2k}^{-1} тоже принадлежит $\mathcal{P}$. Если $P_{2l} \in \mathcal{P}$ и $P_{2m} \in \mathcal{P}$, то $P_{2l}P_{2m} \in \mathcal{P}$, $l, m \in \mathbb{N}$, т.е. имеет место равенство $(P_{2l}P_{2m})X = P_{2l}(P_{2m}X)$. Как отмечалось выше, к семейству $\mathcal{P}$ можно присоединить тождественное отображение. Поэтому существует точка $X_{\text{fp}} \in S_i$ такая, что $P_{2k}(X_{\text{fp}}) = X_{\text{fp}}$ для любого $k \in \mathbb{N}$, в том числе и для оператора $P_2(X)$, для которого справедливо условие (6), т.е.

$$\Lambda(P_2) = 1 + (-1)^{n-2} \operatorname{sign} J_{P_2}(X_{\text{fp}}) = 0.$$

Следовательно, на множестве $S_i \setminus \{X_{\text{fp}}\}$ не существует неподвижной точки, отличной от X_{fp}. Таким образом, X_{fp} – единственная неподвижная точка семейства $\mathcal{P}$. Теорема доказана.

Замечание 2. При выполнении условий теоремы 2 оператор P_{2k}, $k \geqslant 2$, может иметь неподвижную точку, отличную от X_{fp}. В работе [8] получена формула для якобиана $J_{P_2}(X)$ отображения $P_2(X)$. Аналогично можно рассмотреть семейства вида $\mathcal{P}$, где "младшими" операторами являются операторы P_4, P_6 и т.д. Тогда возникает проблема получения якобианов этих операторов, что является отдельной непростой задачей.

Замечание 3. Теорема 2 для семейства операторов $\{P_{2k}\}_{k=1}^{\infty}$ получена с помощью теоремы Маркова–Какутани. На самом деле можно применить теорему Шаудера, согласно которой у каждого оператора P_{2k} существует по крайней мере одна неподвижная точка, и ограничиться рассмотрением оператора P_2, поскольку в силу построения операторов P_{2k} неподвижная точка у P_2 является неподвижной точкой у всех операторов P_{2k}.

Заключение. В статье сделан ещё один шаг в решении проблемы существования и единственности периодического решения системы (1), а именно, установлено, что в фазовом пространстве системы (1) одновременно могут существовать периодические орбиты с различным числом точек переключения, причём как с выходом из зоны неоднозначности нелинейной характеристики, так и без выхода. Теорема 2 даёт необходимое и достаточное условие существования единственной неподвижной точки одновременно у всех возможных отображений, порождаемых системой (1). В частности, отсюда следует существование единственной унимодальной орбиты (периодической орбиты с двумя точками переключения), которую в инженерной практике удобно принимать за рабочий режим колебательной системы, описываемой системой вида (1).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 23-21-00069).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Камачкин А.М., Потапов Д.К., Евстафьева В.В.* Динамика и синхронизация циклических структур осцилляторов с гистерезисной обратной связью // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Прикл. математика. Информатика. Процессы управления. 2020. Т. 16. Вып. 2. С. 186–199.
2. *Фурсов А.С., Тодоров Т.С., Крылов П.А., Митрев Р.П.* О существовании колебательных режимов в одной нелинейной системе с гистерезисами // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 8. С. 1103–1121.
3. *Евстафьева В.В.* О существовании двухточечно-колебательных решений возмущённой релейной системы с гистерезисом // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 2. С. 169–178.
4. *Евстафьева В.В.* Существование T/k-периодических решений нелинейной неавтономной системы с кратным собственным числом матрицы // Мат. заметки. 2021. Т. 109. № 4. С. 529–543.
5. *Євстаф'єва В.В.* Існування двоточково-коливних розв'язків релейної неавтономної системи з кратним власним числом дійсної симетричної матриці // Укр. мат. журн. 2021. Т. 73. № 5. С. 640–650.
6. *Фурсов А.С., Митрев Р.П., Крылов П.А., Тодоров Т.С.* О существовании периодического режима в одной нелинейной системе // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 8. С. 1104–1115.
7. *Kamachkin A.M., Potapov D.K., Yevstafyeva V.V.* Continuous dependence on parameters and boundedness of solutions to a hysteresis system // Appl. Math. 2022. V. 67. № 1. P. 65–80.
8. *Камачкин А.М., Потапов Д.К., Евстафьева В.В.* Неподвижные точки отображения, порождённого системой обыкновенных дифференциальных уравнений с релейным гистерезисом // Дифференц. уравнения. 2022. Т. 58. № 4. С. 456–469.
9. *Евстафьева В.В.* Синтез управления возмущённой системой с неоднозначной нелинейностью // Автоматика и телемеханика. 2023. № 3. С. 44–64.
10. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. М., 1984.
11. *Эдвардс Р.* Функциональный анализ. Теория и приложения. М., 1969.
12. *Лефшец С.* Алгебраическая топология. М., 1949.
13. *Понтрягин Л.С.* Гладкие многообразия и их применения в теории гомотопий. М., 1976.

Санкт-Петербургский государственный университет

Поступила в редакцию 17.02.2023 г.
После доработки 29.05.2023 г.
Принята к публикации 14.06.2023 г.