ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 8, с. 1007–1021

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.928.4

СУЩЕСТВОВАНИЕ И УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ С ВНУТРЕННИМ ПЕРЕХОДНЫМ СЛОЕМ УРАВНЕНИЯ РЕАКЦИИ–ДИФФУЗИИ–АДВЕКЦИИ С KPZ-НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

© 2023 г. Н. Н. Нефедов, А. О. Орлов

Изучается краевая задача для квазилинейного обыкновенного дифференциального уравнения реакции–диффузии–адвекции с содержащей градиент искомой функции в квадрате KPZ-нелинейностью. Рассматривается случай существования внутреннего переходного слоя в некритическом и критическом случаях. Строится асимптотическое приближение решения и определяется асимптотика для точки переходного слоя. Для доказательства теорем существования используется асимптотический метод дифференциальных неравенств. Асимптотическая устойчивость решений по Ляпунову доказывается с помощью метода сужающихся барьеров. Теоремы о неустойчивости доказываются с использованием неупорядоченных верхнего и нижнего решений.

DOI: 10.31857/S0374064123080010, EDN: IMWTXB

1. Введение. Постановка задачи. В работах [1, 2] рассматривалась задача

$$\varepsilon^2\frac{d^2u}{dx^2}=f\bigg(\varepsilon\frac{du}{dx},u,x\bigg),\quad x\in(-1,1),\quad u(\pm1,\varepsilon)=u^{(\pm)}\tag{1}$$

и были получены условия, при которых её решения типа ступеньки существуют в некритическом и критическом случаях, а также условия существования контрастной структуры типа всплеска. Теоремы существования решений доказываются с использованием метода сшивания, широко применяемого в одномерных задачах, однако вопросы устойчивости не затрагиваются.

Периодические задачи для уравнения реакции–диффузии–адвекции, содержащего в правой части слабую адвекцию (слагаемое вида $\varepsilon A(u,x)\partial u/\partial x$), рассмотрены в работах [3–5]. В указанных статьях изучаются вопросы построения асимптотического приближения для контрастной структуры типа ступеньки, а также доказываются теоремы существования и асимптотической устойчивости по Ляпунову такого решения как решения соответствующей начально-краевой параболической задачи с использованием метода дифференциальных неравенств [6].

Отметим также недавние работы, посвящённые новому классу задач с разрывными адвективным и реактивным членами в одномерной и двумерной постановках [7–9].

В данной статье рассматривается краевая задача для квазилинейного обыкновенного дифференциального уравнения реакции–диффузии–адвекции, являющаяся специальным важным для приложений случаем задачи (1), позволяющим получить конструктивные условия существования и асимптотической устойчивости по Ляпунову решения как стационарного решения соответствующей параболической задачи

$$\varepsilon^2\frac{d^2u}{dx^2}=\varepsilon^2A(u,x)\bigg(\frac{du}{dx}\bigg)^2+f(u,x,\varepsilon),\quad x\in(-1,1),\quad u'(\pm1,\varepsilon)=u^{(\pm)},\tag{2}$$

где $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ – малый параметр.

Особенностью изучаемой задачи является слагаемое, содержащее градиент искомой функции в квадрате. Нелинейности такого типа носят название нелинейностей Кардари–Паризи–Жанга (KPZ-нелинейности) и широко используются при моделировании процессов популяционной динамики [10], роста свободной поверхности в теории полимеров, нелинейной теории теплопроводности (см. [11, 12] и библиографию в них). Отметим также и несомненный теоретический интерес к данному уравнению: квадрат является максимальным (предельным) показателем степени, при котором условия Бернштейна на рост нелинейности выполнены (нелинейность принадлежит классу функций Нагумо (см. [13–15]).

Основной целью настоящей работы являются доказательство существования и исследование устойчивости решений с внутренним переходным слоем, как решений соответствующих начально-краевых параболических задач. Рассмотрены некритический и критический случаи.

Итак, пусть выполнены следующие условия.

Условие (A1). Функция $f(u,x,\varepsilon)$ определена на множестве $\overline{\Omega_1} := (u,x,\varepsilon) \in I_u \times [-1,1] \times \times (0,\varepsilon_0]$, а $A(u,x)$ – на множестве $\overline{\Omega_2} := (u,x) \in I_u \times [-1,1]$; обе являются достаточно гладкими функциями своих аргументов.

Условие (A2). Вырожденное уравнение $f(u,x,0)=0$ имеет ровно три корня $u = \varphi^{(\pm,0)}(x)$, удовлетворяющих условиям

$$\varphi^{(-)}(x) < \varphi^{(0)}(x) < \varphi^{(+)}(x), \quad f_u(\varphi^{(\pm)}(x),x,0) > 0, \quad f_u(\varphi^{(0)}(x),x,0) < 0, \quad x \in [-1,1].$$

Введём присоединённую систему уравнений

$$\frac{d\tilde{u}}{d\xi} = \tilde{v}, \quad \frac{d\tilde{v}}{d\xi} = A(\tilde{u},x)\left(\frac{d\tilde{u}}{d\xi}\right)^2 + f(\tilde{u},x,0), \quad -\infty < \xi < \infty. \tag{3}$$

Условие (A2) означает, что на фазовой плоскости $(\tilde{u},\tilde{v})$ присоединённой системы есть две точки покоя типа седло $(\varphi^{(\pm)}(x),0)$. Существуют сепаратрисы $v^{(\pm)}(\tilde{u},x)$, входящие, соответственно, в сёдла $(\varphi^{(\pm)}(x),0)$ при $\xi \to \pm\infty$. Выражения для этих сепаратрис имеют следующий вид:

$$\tilde{v}^{(\pm)}(\tilde{u},x) = \left(\int\limits_{\varphi^{(\pm)}(x)}^{\tilde{u}} 2f(s,x,0)\exp\left(2\int\limits_{s}^{\tilde{u}} A(\sigma,x)\,d\sigma\right)ds\right)^{1/2}.$$

Введём также функцию

$$H(x) := \tilde{v}^{(+)}(\varphi^{(0)}(x),x) - \tilde{v}^{(-)}(\varphi^{(0)}(x),x), \quad x \in (-1,1),$$

для которой справедливо представление

$$H(x) = -\frac{2}{\tilde{v}^{(-)}(0,x) + \tilde{v}^{(+)}(0,x)} \int\limits_{\varphi^{(-)}(x)}^{\varphi^{(+)}(x)} f(s,x,0)\exp\left(2\int\limits_{s}^{\varphi^{(0)}(x)} A(\sigma,x)\,d\sigma\right)ds, \quad x \in (-1,1). \tag{4}$$

Определим положение точки переходного слоя условием пересечения решения и корня вырожденного уравнения $\varphi^{(0)}(x)$:

$$\varphi^{(0)}(x^*) = u(x^*,\varepsilon). \tag{5}$$

Рассмотрим решение, которое при $\varepsilon \to 0$ на части интервала $(-1,x^*(\varepsilon))$ стремится к корню $\varphi^{(-)}(x)$, а на другой части $(x^*(\varepsilon),1)$ – к другому корню $\varphi^{(+)}(x)$. В окрестности точки $x^*(\varepsilon)$ возникает область быстрого изменения решения – *внутренний переходный слой*. Такие решения называются *контрастными структурами*. Положение точки переходного слоя $x^*(\varepsilon)$ заранее неизвестно. Будем искать её в виде ряда по степеням ε:

$$x^*(\varepsilon) = x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \ldots \tag{6}$$

Оказывается, что нахождение коэффициентов ряда (6) для точки перехода зависит существенным образом от свойств функции $H(x)$. В п. 3 мы рассмотрим некритический и критический случаи и подробно опишем процедуру нахождения коэффициентов x_i, $i \in \mathbb{N}_0 \equiv \mathbb{N} \bigcup \{0\}$. Некритическому случаю отвечает

Условие (A3). Уравнение $H(x)=0$ имеет решение $x=x_0$, причём $-1<x_0<1$. Выполнено неравенство
$$\frac{dH}{dx}(x_0)>0.$$

Критический случай имеет место, если выполнено

Условие (A3′). Справедливо тождество $H(x)\equiv 0,\ \ x\in(-1,1)$.

В данной работе мы не будем уделять внимание описанию поведения решения вблизи граничных точек $x=\pm1$. Отметим только, что в случае граничных условий Неймана вблизи граничных точек $x=\pm1$ возникают слабые (порядка ε) пограничные слои.

Замечание 1. В случае граничных условий Дирихле необходимо сформулировать условие принадлежности граничных значений $u^{(\pm)}$ области влияния соответствующих корней вырожденного уравнения
$$\int\limits_{\varphi^{(\pm)}(\pm1)}^{\tilde u} f(s,\pm1,0)\exp\biggl(2\int\limits_s^{\tilde u} A(\sigma,\pm1)\,d\sigma\biggr)\,ds>0\quad\text{для всех}\ \ \tilde u\in(\varphi^{(\pm)}(\pm1),u^{(\pm)}].$$

2. Асимптотическое представление решения. Опишем построение формального асимптотического приближения решения краевой задачи (2) по методу А.Б. Васильевой.

Для построения формальной асимптотики задача (2) разбивается на две [6]. Слева от переходного слоя в области $-1<x<x^*(\varepsilon)$ рассматривается задача
$$L_\varepsilon(u):=\varepsilon^2\frac{d^2u}{dx^2}-\varepsilon^2A(u,x)\biggl(\frac{du}{dx}\biggr)^2-f(u,x,\varepsilon)=0,\quad -1<x<x^*(\varepsilon),$$
$$u'(-1,\varepsilon)=u^{(-)},\quad u(x^*(\varepsilon),\varepsilon)=\varphi^{(0)}(x^*);$$
справа от переходного слоя в области $x^*(\varepsilon)<x<1$ – задача
$$L_\varepsilon(u):=\varepsilon^2\frac{d^2u}{dx^2}-\varepsilon^2A(u,x)\biggl(\frac{du}{dx}\biggr)^2-f(u,x,\varepsilon)=0,\quad x^*(\varepsilon)<x<1,$$
$$u(x^*(\varepsilon),\varepsilon)=\varphi^{(0)}(x^*),\quad u'(1,\varepsilon)=u^{(+)}.$$
Далее для функций асимптотики в области $-1<x<x^*(\varepsilon)$ используем обозначение “ $^{(-)}$ ”, в области $x^*(\varepsilon)<x<1$ – “ $^{(+)}$ ”, а индекс “ $^{(\pm)}$ ” будем писать, подразумевая функции как для левой, так и для правой частей асимптотики. Построим асимптотику в виде ряда по степеням ε, не предполагая разложенной в такой ряд функцию $x^*(\varepsilon)$, которую считаем известной:
$$U^{(\pm)}(x,\varepsilon)=\bar u^{(\pm)}(x,\varepsilon)+Q^{(\pm)}(\xi,\varepsilon)+\Pi^{(\pm)}(\tau,\varepsilon),\tag{7}$$
здесь регулярная часть
$$\bar u^{(\pm)}(x,\varepsilon)=\bar u_0^{(\pm)}(x)+\varepsilon\bar u_1^{(\pm)}(x)+\ldots+\varepsilon^n\bar u_n^{(\pm)}(x)+\ldots,$$
пограничная часть в окрестности $x=-1$ для $u^{(-)}$ и в окрестности $x=1$ для $u^{(+)}$
$$\Pi^{(\pm)}(\tau,\varepsilon)=\Pi_0^{(\pm)}(\tau)+\varepsilon\Pi_1^{(\pm)}(\tau)+\ldots+\varepsilon^n\Pi_n^{(\pm)}(\tau)+\ldots,$$
где
$$\tau=\begin{cases}(x+1)/\varepsilon, & x\leqslant x^*(\varepsilon),\\ (x-1)/\varepsilon, & x>x^*(\varepsilon),\end{cases}$$

и часть внутреннего переходного слоя в окрестности точки $x^*(\varepsilon)$, $\xi = (x - x^*(\varepsilon))/\varepsilon$,

$$Q^{(\pm)}(\xi,\varepsilon) = Q_0^{(\pm)}(\xi,\varepsilon) + \varepsilon Q_1^{(\pm)}(\xi,\varepsilon) + \ldots + \varepsilon^n Q_n^{(\pm)}(\xi,\varepsilon) + \ldots,$$

члены которой зависят не только от аргумента ξ, но и от ε. Отметим, что уравнения, из которых эти члены находятся, содержат функции, зависящие от $x^*(\varepsilon)$, что и объясняет наличие у членов Q_i аргумента ε. Для определённости рассматриваем переход от корня $\varphi^{(-)}$ к корню $\varphi^{(+)}$.

Метод пограничных функций [16] приводит к последовательности задач для определения коэффициентов асимптотических рядов (7), из которых, в частности, получим

$$\bar{u}_0^{(-)}(x) = \varphi^{(-)}(x), \quad \bar{u}_0^{(+)}(x) = \varphi^{(+)}(x).$$

Функции $\bar{u}_i^{(\pm)}(x)$, $i \in \mathbb{N}$, а также пограничные функции $\Pi_i^{(\pm)}(\tau)$, $i \in \mathbb{N}_0$, строятся стандартным образом [16, 17], и мы это построение здесь рассматривать не будем.

Рассмотрим подробно построение функций внутреннего переходного слоя.

Члены $Q_0^{(\pm)}(\xi,\varepsilon)$ определяются из задач

$$\frac{\partial^2 Q_0^{(\pm)}(\xi,\varepsilon)}{\partial\xi^2} - A(\varphi^{(\pm)}(x^*) + Q_0^{(\pm)}, x^*)\left(\frac{\partial Q_0^{(\pm)}(\xi,\varepsilon)}{\partial\xi}\right)^2 = f(\varphi^{(\pm)}(x^*) + Q_0^{(\pm)}, x^*, 0),$$

$$Q_0^{(\pm)}(0,\varepsilon) + \bar{u}_0^{(\pm)}(x^*) = \varphi^{(0)}(x^*), \quad Q_0^{(\pm)}(\pm\infty,\varepsilon) = 0. \tag{8}$$

Положим

$$\tilde{u}^{(\pm)}(\xi,\varepsilon) := \varphi^{(\pm)}(x^*) + Q_0^{(\pm)}(\xi,\varepsilon), \quad \tilde{v}^{(\pm)}(\xi,\varepsilon) := \frac{\partial\tilde{u}^{(\pm)}(\xi,\varepsilon)}{\partial\xi}.$$

В этих обозначениях задачи (8) будут выглядеть следующим образом:

$$\frac{\partial^2\tilde{u}^{(\pm)}}{\partial\xi^2} - A(\tilde{u}^{(\pm)}, x^*)\left(\frac{\partial\tilde{u}^{(\pm)}}{\partial\xi}\right)^2 = f(\tilde{u}^{(\pm)}, x^*, 0),$$

$$\tilde{u}^{(\pm)}(0,\varepsilon) = \varphi^{(0)}(x^*), \quad \tilde{u}^{(\pm)}(\pm\infty,\varepsilon) = \varphi^{(\pm)}(x^*).$$

Уравнения для функции $\tilde{u}^{(\pm)}(\xi,\varepsilon)$ на каждой из полупрямых $\xi \leqslant 0$ и $\xi \geqslant 0$ эквивалентны уравнениям присоединённой системы (3). Используя представление для сепаратрис, можно получить решения задач (8) в виде квадратурных формул

$$\xi = \int\limits_{\varphi^{(0)}(x^*)}^{\tilde{u}^{(\pm)}(\xi,\varepsilon)} \left(\int\limits_{\varphi^{(\pm)}(x^*)}^{\varkappa} 2f(s,x^*,0)\exp\left(2\int\limits_{s}^{\varkappa} A(\sigma,x^*)\right)d\sigma\, ds\right)^{-1/2} d\varkappa, \quad -\infty < \xi < \infty.$$

Замечание 2. Из вида уравнения (8) следует, что в функциях $\tilde{u}^{(\pm)}(\xi,\varepsilon)$, $\tilde{v}^{(\pm)}(\xi,\varepsilon)$ можно перейти к другому набору аргументов (ξ, x^*). В дальнейшем будем пользоваться обоими наборами аргументов также и для функций внутреннего переходного слоя, для каждого конкретного случая выбирая наиболее удобный.

Функции $Q_1^{(\pm)}$ определяются из задач

$$\frac{\partial^2 Q_1^{(\pm)}}{\partial\xi^2} - 2\tilde{A}^*\frac{\partial\tilde{u}^{(\pm)}}{\partial\xi}\frac{\partial Q_1^{(\pm)}}{\partial\xi} - \left(\frac{\partial\tilde{A}^*}{\partial u}\left(\frac{\partial\tilde{u}^{(\pm)}}{\partial\xi}\right)^2 + \frac{\partial\tilde{f}^*}{\partial u}\right)Q_1^{(\pm)} = r_1^{(\pm)},$$

$$Q_1^{(\pm)}(0,x^*) + \bar{u}_1^{(\pm)}(x^*) = 0, \quad Q_1^{(\pm)}(\pm\infty,x^*) = 0,$$

$$r_1^{(\pm)}(\xi,\varepsilon):=2\tilde{A}^*\tilde{v}^{(\pm)}\frac{d\bar{u}_0^{(\pm)}}{dx}+\left(\frac{\partial\tilde{A}^*}{\partial u}(\tilde{v}^{(\pm)})^2+\frac{\partial\tilde{f}^*}{\partial u}\right)\left(\frac{d\bar{u}_0^{(\pm)}}{dx}\xi+\bar{u}_1^{(\pm)}\right)+$$
$$+\left(\frac{\partial\tilde{A}^*}{\partial x}(\tilde{v}^{(\pm)})^2+\frac{\partial\tilde{f}^*}{\partial x}\right)\xi+\frac{\partial\tilde{f}^*}{\partial\varepsilon}, \tag{9}$$

где символы “ $\sim$”, “ $*$” над и справа от функции означают, что её значение берётся при аргументе $(\tilde{u}^{(\pm)}(\xi,x^*),x^*,0)$.

Решения задач (9) находятся в явном виде:

$$Q_1^{(\pm)}(\xi,x^*)=-\bar{u}_1^{(\pm)}(x^*)\frac{\tilde{v}^{(\pm)}(\xi,x^*)}{\tilde{v}^{(\pm)}(0,x^*)}-$$
$$-\tilde{v}^{(\pm)}(\xi,x^*)\int\limits_0^{\xi}\frac{1}{p^{(\pm)}(s,x^*)(\tilde{v}^{(\pm)}(s,x^*))^2}\int\limits_s^{\pm\infty}p^{(\pm)}(\eta,x^*)\tilde{v}^{(\pm)}(\eta,x^*)r_1^{(\pm)}(\eta,\varepsilon)\,d\eta\,ds, \tag{10}$$

где

$$p^{(\pm)}(\xi,x^*)=\exp\left(-2\int\limits_0^{\xi}A(\tilde{u}^{(\pm)}(y,x^*),x^*)\tilde{v}^{(\pm)}(y,x^*)dy\right).$$

Функции Q следующих порядков определяются из аналогичных уравнений. Для всех функций Q справедливы стандартные экспоненциальные оценки [17]

$$|Q_i^{(\pm)}(\xi,\varepsilon)|<Ce^{-\varkappa|\xi|},\quad \xi\in\mathbb{R},\quad i\in\mathbb{N}_0,$$

где $C,\ \varkappa$ – положительные константы.

Поскольку функции $A,\ f,\ u^{(\pm)}$ достаточно гладкие, формальная асимптотика может быть построена до любого порядка n.

3. Построение асимптотики точки $x^*(\varepsilon)$ переходного слоя. Одной из ключевых проблем построения асимптотики является построение асимптотики точки перехода $x^*(\varepsilon)$.

Непрерывность асимптотики в точке $x^*(\varepsilon)$ выполняется за счёт согласованности асимптотик $U^{(-)}$ и $U^{(+)}$ в силу условия (5). Потребуем также непрерывности первых производных асимптотики на этой кривой (условие C^1-сшивания):

$$\varepsilon\frac{\partial U^{(+)}}{\partial x}\bigg|_{x=x^*(\varepsilon)}-\varepsilon\frac{\partial U^{(-)}}{\partial x}\bigg|_{x=x^*(\varepsilon)}=0. \tag{11}$$

Подставив асимптотическое разложение (7) в условие (11), получим

$$\frac{\partial Q_0^{(+)}(0,x^*)}{\partial\xi}-\frac{\partial Q_0^{(-)}(0,x^*)}{\partial\xi}+\varepsilon\left(\frac{d\bar{u}_0^{(+)}(x^*)}{dx}+\frac{\partial Q_1^{(+)}(0,x^*)}{\partial\xi}-\frac{d\bar{u}_0^{(-)}(x^*)}{dx}-\frac{\partial Q_1^{(-)}(0,x^*)}{\partial\xi}\right)+$$
$$+\varepsilon^2\left(\frac{d\bar{u}_1^{(+)}(x^*)}{dx}+\frac{\partial Q_2^{(+)}(0,\varepsilon)}{\partial\xi}-\frac{d\bar{u}_1^{(-)}(x^*)}{dx}-\frac{\partial Q_2^{(-)}(0,\varepsilon)}{\partial\xi}\right)+\ldots=:$$
$$=:H(x^*)+\varepsilon G_1(x^*)+\varepsilon^2G_2(\varepsilon)+\ldots=0.$$

Здесь мы обозначили

$$G_1(x^*):=\frac{d\bar{u}_0^{(+)}(x^*)}{dx}+\frac{\partial Q_1^{(+)}(0,x^*)}{\partial\xi}-\frac{d\bar{u}_0^{(-)}(x^*)}{dx}-\frac{\partial Q_1^{(-)}(0,x^*)}{\partial\xi},$$

$$G_i(\varepsilon) := \frac{d\bar{u}_{i-1}^{(+)}(x^*)}{dx} + \frac{\partial Q_i^{(+)}(0,\varepsilon)}{\partial \xi} - \frac{d\bar{u}_{i-1}^{(-)}(x^*)}{dx} - \frac{\partial Q_i^{(-)}(0,\varepsilon)}{\partial \xi}, \quad i = 2, 3, \ldots$$

Функция $H(x^*)$ была введена выше (см. (4)). С учётом (6) разложим выражение (11) в ряд по степеням ε:

$$\varepsilon\frac{\partial U^{(+)}(x^*,\varepsilon)}{\partial x} - \varepsilon\frac{\partial U^{(-)}(x^*,\varepsilon)}{\partial x} = H(x_0) + \varepsilon\left(\frac{dH}{dx}\bigg|_{x=x_0} x_1 + G_1|_{x=x_0}\right) +$$

$$+ \varepsilon^2\left[\frac{x_1^2}{2}\frac{d^2H}{dx^2}\bigg|_{x=x_0} + x_2\frac{dH}{dx}\bigg|_{x=x_0} + x_1\frac{dG_1}{dx}\bigg|_{x=x_0} + G_2|_{\varepsilon=0}\right] + \ldots = 0. \tag{12}$$

Далее рассмотрим некритический и критический случаи.

3.1. Некритический случай. В силу условия (A3) слагаемое при ε^0 в разложении (12) равно нулю, таким образом определён нулевой порядок x_0 в разложении точки перехода $x^*(\varepsilon)$. Определим член x_1 в (12). Приравнивая к нулю слагаемое при ε^1, получаем

$$\frac{dH}{dx}\bigg|_{x=x_0} x_1 + G_1|_{x=x_0} = 0. \tag{13}$$

Используя (10), выполним преобразования

$$G_1(x^*) := \frac{d\bar{u}_0^{(+)}(x^*)}{dx} + \frac{\partial Q_1^{(+)}(0,x^*)}{\partial \xi} - \frac{d\bar{u}_0^{(-)}(x^*)}{dx} - \frac{\partial Q_1^{(-)}(0,x^*)}{\partial \xi} =$$

$$= \frac{d\varphi^{(+)}(x^*)}{dx} - \frac{d\varphi^{(-)}(x^*)}{dx} - \bar{u}_1^{(+)}(x^*)\frac{\tilde{v}_\xi^{(+)}(0,x^*)}{\tilde{v}^{(+)}(0,x^*)} + \bar{u}_1^{(-)}(x^*)\frac{\tilde{v}_\xi^{(-)}(0,x^*)}{\tilde{v}^{(-)}(0,x^*)} -$$

$$- \frac{1}{\tilde{v}^{(+)}(0,x^*)}\int\limits_0^{+\infty} p^{(+)}(\eta,x^*)\tilde{v}^{(+)}(\eta,x^*)r_1^{(+)}(\eta,\varepsilon)\,d\eta +$$

$$+ \frac{1}{\tilde{v}^{(-)}(0,x^*)}\int\limits_0^{-\infty} p^{(-)}(\eta,x^*)\tilde{v}^{(-)}(\eta,x^*)r_1^{(-)}(\eta,\varepsilon)\,d\eta =$$

$$= \Bigg[- \frac{1}{\tilde{v}^{(\pm)}(0,x^*)}\Bigg(\int\limits_0^{\pm\infty} p^{(\pm)}(\eta,x^*)\tilde{v}^{(\pm)}(\eta,x^*)\left(\frac{\partial A}{\partial x}(\tilde{u}^{(\pm)},x^*)(\tilde{v}^{(\pm)}(\eta,x^*))^2 +\right.$$

$$\left. + \frac{\partial f}{\partial x}(\tilde{u}^{(\pm)},x^*,0)\right)\eta\,d\eta + \int\limits_0^{\pm\infty} p^{(\pm)}(\eta,x^*)\tilde{v}^{(\pm)}(\eta,x^*)\frac{\partial f}{\partial \varepsilon}(\tilde{u}^{(\pm)},x^*,0)\,d\eta\Bigg)\Bigg]_-^+. \tag{14}$$

Здесь $[\,\cdot\,]_-^+$ означает разность между выражениями, помеченными символами “ $+$ ” и “ $-$ ”. Отметим, что в силу условия (A3) $\tilde{v}^{(-)}(0,x_0) = \tilde{v}^{(+)}(0,x_0)$, а также $\tilde{u}^{(-)}(0,x_0) = \tilde{u}^{(+)}(0,x_0)$. Таким образом, $\tilde{v}(\xi,x_0)$, $\tilde{u}(\xi,x_0)$, $p(\xi,x_0)$ – непрерывные по ξ функции в рассматриваемой области. Поэтому далее индекс $(\pm)$ в выражениях для $\tilde{v}(\xi,x_0)$, $\tilde{u}(\xi,x_0)$, $p(\xi,x_0)$ можно опустить.

Подставив равенства (14) в (13), получим уравнение для нахождения x_1:

$$\frac{dH(x_0)}{dx}x_1 - \frac{1}{\tilde{v}(0,x_0)}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Bigg[p(\xi,x_0)\tilde{v}(\xi,x_0)\left(\frac{\partial A}{\partial x}(\tilde{u}(\xi,x_0),x_0)(\tilde{v}(\xi,x_0))^2\xi +\right.$$

$$+\frac{\partial f}{\partial x}(\tilde{u}(\xi,x_0),x_0,0)\xi+\frac{\partial f}{\partial \varepsilon}(\tilde{u}(\xi,x_0),x_0,0)\Big)\Big]\,d\xi=0. \tag{15}$$

Уравнение (15) разрешимо в силу условия (A3), таким образом, коэффициент 1-го порядка в разложении (6) определён.

Из уравнений, определяющих $Q_i^{(\pm)}$, и следующих приближений в соотношении (12) по стандартной схеме получим алгебраические задачи для x_i:

$$\frac{dH(x_0)}{dx}x_i+f_i=0,\quad i\geqslant 1,$$

где f_i – известные на i-м шаге величины.

Таким образом, указан способ определения всех неизвестных функций x_i для некритического случая.

3.2. Критический случай. Условие (A3$'$) коренным образом отличает некритический случай от критического, поскольку, как будет видно далее, оно изменяет алгоритм нахождения слагаемых в разложении (6).

Действительно, в силу условия (A3$'$) получаем, что $H(x^*)=0$, $x^*\in(-1,1)$. Тогда (12) примет вид

$$\frac{\partial U^{(+)}(x^*,\varepsilon)}{\partial x}-\frac{\partial U^{(-)}(x^*,\varepsilon)}{\partial x}=G_1(x^*)+\varepsilon G_2(\varepsilon)+\ldots=0.$$

Разлагая $x^*(\varepsilon)$ в ряд по степеням ε, получаем для C^1-сшивания следующее выражение:

$$\frac{\partial U^{(+)}(x^*,\varepsilon)}{\partial x}-\frac{\partial U^{(-)}(x^*,\varepsilon)}{\partial x}=G_1|_{x=x_0}+\varepsilon\bigg(x_1\frac{dG_1}{dx}\bigg|_{x=x_0}+G_2|_{\varepsilon=0}\bigg)+\ldots=0. \tag{16}$$

Приравняем к нулю по очереди коэффициенты при степенях ε в (16). При ε получим

$$G_1|_{x=x_0}=0. \tag{17}$$

Потребуем, чтобы выполнялось

Условие (A4$'$). Уравнение $G_1(x)=0$ имеет решение $x=x_0$, причём $-1<x_0<1$. Выполнено неравенство

$$\frac{dG_1}{dx}(x_0)>0.$$

Подставив выражения (14) в равенство (17), получим нелинейное алгебраическое уравнение для отыскания нулевого приближения для точки переходного слоя

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}p(\xi,x_0)\tilde{v}(\xi,x_0)\bigg(\frac{\partial A}{\partial x}(\tilde{u}(\xi,x_0),x_0)(\tilde{v}(\xi,x_0))^2\xi+$$

$$+\frac{\partial f}{\partial x}(\tilde{u}(\xi,x_0),x_0,0)\xi+\frac{\partial f}{\partial \varepsilon}(\tilde{u}(\xi,x_0),x_0,0)\bigg)\,d\xi=0,$$

которое разрешимо в силу условия (A4$'$). Приравняв к нулю коэффициент при ε в (16), получим уравнение для определения коэффициента x_1:

$$\frac{dG_1}{dx}\bigg|_{x=x_0}x_1+G_2|_{\varepsilon=0}=0.$$

Оно также разрешимо в силу условия (A4$'$).

Из уравнений, определяющих $Q_i^{(\pm)}$, и следующих приближений в соотношении (17) получим алгебраические задачи для x_i:

$$\frac{dG_1}{dx}\bigg|_{x=x_0} x_i + f_i = 0, \quad i \geqslant 1,$$

где f_i – известные на i-м шаге величины.

Таким образом, указан способ определения всех неизвестных функций x_i для критического случая.

4. Обоснование построенной асимптотики. Обозначим через $U_n(x,\varepsilon)$ частичные суммы порядка n построенных асимптотических рядов, в которых аргумент ξ у Q-функций заменён на $\xi_n := (x - \sum_{i=0}^{n+1}\varepsilon^i x_i)/\varepsilon$, а x^* – на $x_n^*(\varepsilon) := \sum_{i=0}^{n+1}\varepsilon^i x_i$. На множествах $-1 \leqslant x \leqslant x^*$ и $x^* \leqslant x \leqslant 1$, на которые отрезок $[-1,1]$ разделяется точкой x_n^*, при построении $U_n(x,\varepsilon)$ используются функции $Q^{(-)}$ и $Q^{(+)}$ соответственно.

Для доказательства существования решения вида ступеньки в некритическом и критическом случаях используем асимптотический метод дифференциальных неравенств [18, 19]. Построим непрерывные функции $\alpha(x,\varepsilon)$, $\beta(x,\varepsilon)$ таким образом, чтобы они удовлетворяли следующим условиям.

1. *Условие упорядоченности*: $\alpha(x,\varepsilon) \leqslant \beta(x,\varepsilon)$, $x \in [-1,1]$.
2. *Действие оператора на верхнее и нижнее решения*:

$$\varepsilon^2\frac{d^2\beta}{dx^2} - \varepsilon^2 A(\beta,x)\left(\frac{d\beta}{dx}\right)^2 - f(\beta,x,\varepsilon) \leqslant 0 \leqslant \varepsilon^2\frac{d^2\alpha}{dx^2} - \varepsilon^2 A(\alpha,x)\left(\frac{d\alpha}{dx}\right)^2 - f(\alpha,x,\varepsilon)$$

для всех $x \in (-1,1)$, за исключением тех точек x, в которых функции $\alpha(x,\varepsilon)$, $\beta(x,\varepsilon)$ являются негладкими.

3. *Условия на границе*:

$$\alpha'(-1,\varepsilon) \geqslant u^{(-)} \geqslant \beta'(-1,\varepsilon), \quad \alpha'(1,\varepsilon) \leqslant u^{(+)} \leqslant \beta'(1,\varepsilon).$$

4. *Условия на скачок производных*:

$$\frac{d\beta}{dx}(\overline{x} - 0,\varepsilon) \geqslant \frac{\partial\beta}{dx}(\overline{x} + 0,\varepsilon),$$

где $\overline{x}$ – точка, в которой верхнее решение является негладким;

$$\frac{\partial\alpha}{dx}(\underline{x} - 0,\varepsilon) \leqslant \frac{\partial\alpha}{dx}(\underline{x} + 0,\varepsilon),$$

где $\underline{x}$ – точка, в которой нижнее решение является негладким.

Сформулируем и докажем теоремы существования для каждого случая.

4.1. Некритический случай. Имеет место

Теорема 1. *Если выполнены условия (A1)–(A3), то при достаточно малых ε существует решение $u(x,\varepsilon)$ задачи (2), являющееся контрастной структурой типа ступеньки, причём имеет место оценка*

$$|U_n(x,\varepsilon) - u(x,\varepsilon)| < C\varepsilon^{n+1}, \quad x \in [-1,1],$$

где C – положительная константа.

Доказательство. Верхнее и нижнее решения задачи (2) будем строить путём модификации членов асимптотического ряда

$$\beta_n(x,\varepsilon) = \bar u_0^{(\pm)}(x) + \varepsilon\bar u_1^{(\pm)}(x) + \ldots + \varepsilon^{n+2}\bar u_{n+2}^{(\pm)}(x) + Q_0^{(\pm)}(\xi_\beta, x_\beta) + \varepsilon Q_1^{(\pm)}(\xi_\beta,\varepsilon) + \ldots$$

$$\ldots + \varepsilon^{n+2}Q_{n+2}^{(\pm)}(\xi_\beta,\varepsilon) + \Pi_\beta(\tau,\varepsilon) + \varepsilon^{n+2}(\gamma + q_\beta^{(\pm)}(\xi_\beta,\varepsilon)),$$

где $x_\beta(\varepsilon) = x_n^*(\varepsilon) + \varepsilon^{n+2}(x_{n+2} - \delta)$, $\gamma > 0$ – некоторая постоянная, обеспечивающая выполнение неравенства на оператор, $\delta > 0$ – постоянная, обеспечивающая неравенства для скачка производных, функции Π_β обеспечивают выполнение дифференциальных неравенств вблизи точек $x = -1$ и $x = 1$, их построение проводится стандартным образом (см. [17]). Здесь для функций асимптотики в области слева от точки $x_\beta(\varepsilon)$ используем обозначение $(-)$, а справа – $(+)$. Функции $Q_i^{(\pm)}(\xi_\beta, \varepsilon)$ являются решением соответствующих краевых задач для $Q_i^{(\pm)}(\xi, \varepsilon)$, у которых везде функция $x^*(\varepsilon)$ заменена на $x_\beta(\varepsilon)$, а аргумент ξ – на ξ_β. Функции $q_\beta^{(\pm)}(\xi_\beta, \varepsilon)$ необходимы для устранения невязки в уравнении для $Q_{n+2}^{(\pm)}(\xi_\beta, \varepsilon)$, вносимой постоянной γ, и определяются из следующих задач:

$$\frac{\partial^2 q_\beta^{(\pm)}}{\partial \xi^2} - 2\tilde{A}_\beta^* \frac{\partial \tilde{u}_\beta^{(\pm)}}{\partial \xi} \frac{\partial q_\beta^{(\pm)}}{\partial \xi} - \left(\frac{\partial \tilde{A}_\beta^*}{\partial u} \left(\frac{\partial \tilde{u}_\beta^{(\pm)}}{\partial \xi} \right)^2 + \frac{\partial \tilde{f}_\beta^*}{\partial u} \right) q_\beta^{(\pm)} = r_\beta(\xi, \varepsilon),$$

$$q_\beta^{(\pm)}(0, \varepsilon) + \gamma = 0, \quad q_\beta^{(\pm)}(\pm\infty, \varepsilon) = 0, \tag{18}$$

где символы “ $\sim$ ”, “ $*$ ”, “ β ” над и справа от функции означают, что её значение берётся при аргументе $(\tilde{u}_\beta^{(\pm)}, x_\beta, 0)$. При этом

$$\tilde{u}_\beta^{(\pm)} = \tilde{u}^{(\pm)}(\xi, x_\beta), \quad r_\beta(\xi, \varepsilon) = \gamma \left(\frac{\partial \tilde{A}_\beta^*}{\partial u} \left(\frac{\partial \tilde{u}_\beta^{(\pm)}}{\partial \xi} \right)^2 + \frac{\partial \tilde{f}_\beta^*}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial u}(\varphi^{(\pm)}, x_\beta, 0) \right).$$

Нижнее решение $\alpha_n(x, \varepsilon)$ имеет аналогичную структуру.

Неравенство на оператор проверяется прямым вычислением. Проверим его, например, для верхнего решения $\beta_n(x, \varepsilon)$:

$$\varepsilon^2 \frac{d^2 \beta_n}{dx^2} - \varepsilon^2 A(\beta_n, x, \varepsilon) \left(\frac{d\beta_n}{dx} \right)^2 - f(\beta_n, x, \varepsilon) = -\varepsilon^{n+2} \bar{f}_u \gamma + O(\varepsilon^{n+3}) < 0,$$

где черта над функцией означает, что её значение берётся при аргументе $(\varphi^{(\pm)}(x_0), x_0, 0)$.

Неравенства в граничных точках $x \pm 1$ выполняются за счёт модификации погранслойных функций (см., например, [17]), и их проверка здесь не рассматривается.

Проверка упорядоченности проводится в точности также как и в статье [20].

Проверим неравенство на скачок производной

$$\varepsilon \left(\frac{\partial \beta_n^{(+)}(x_\beta, \varepsilon)}{\partial x} - \frac{\partial \beta_n^{(-)}(x_\beta, \varepsilon)}{\partial x} \right) = -\varepsilon^{n+2} \left(\frac{dH(x_0)}{dx} \delta + \gamma B(x_0) \right) + O(\varepsilon^{n+3}),$$

$$B(x_0) = \frac{1}{\tilde{v}(0, x_0)} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(\xi, x_0) \tilde{v}(\xi, x_0) \left(\frac{\partial A}{\partial u}(\tilde{u}^{(\pm)}, x_0, 0)(\tilde{v}(\xi, x_0))^2 + \frac{\partial f}{\partial u}(\tilde{u}^{(\pm)}, x_0, 0) - \frac{\partial f}{\partial u}(\varphi^{(\pm)}, x_0, 0) \right) d\xi.$$

Все соответствующие неравенства для нижнего решения $\alpha_n(x, \varepsilon)$ проверяются аналогично. Нужный знак скачка производной обеспечивается в силу условия (А3) и выбора достаточно большого $\delta > 0$. Теорема доказана.

4.2. Критический случай.

Теорема 2. *Если выполнены условия (A1), (A2), (A3′), (A4′), то при достаточно малых ε существует решение $u(x, \varepsilon)$ задачи (2), являющееся контрастной структурой типа ступеньки, причём имеет место оценка*

$$|U_n(x, \varepsilon) - u(x, \varepsilon)| < C\varepsilon^{n+1}, \quad x \in [-1, 1],$$

где C – положительная константа.

Доказательство. Асимптотический метод дифференциальных неравенств позволяет обосновать построенную асимптотику. Верхнее и нижнее решения задачи (2) будем строить путём модификации членов асимптотического ряда в виде

$$\mathfrak{B}_n(x,\varepsilon)=\bar{u}_0^{(\pm)}(x)+\varepsilon\bar{u}_1^{(\pm)}(x)+\ldots+\varepsilon^{n+3}\bar{u}_{n+3}^{(\pm)}(x)+Q_0^{(\pm)}(\xi_\beta,x_\beta)+$$

$$+\varepsilon Q_1^{(\pm)}(\xi_\beta,\varepsilon)+\ldots+\varepsilon^{n+3}Q_{n+3}^{(\pm)}(\xi_\beta,\varepsilon)+\Pi_{\mathfrak{B}}(\tau,\varepsilon)+\varepsilon^{n+3}(\gamma+q_{\mathfrak{B}}^{(\pm)}(\xi_\beta,\varepsilon)),$$

где $x_{\mathfrak{B}}(\varepsilon)=x_n^*(\varepsilon)+\varepsilon^{n+2}(x_{n+2}-\nu)$, $\gamma>0$ – некоторая постоянная, обеспечивающая выполнение неравенства на оператор, $\nu>0$ – постоянная, которая будет определена ниже, обеспечивающая неравенства для скачка производных в точке переходного слоя, функции Π_β обеспечивают выполнение неравенств вблизи точек $x=-1$ и $x=1$, их построение проводится стандартным образом (см. [17]). Здесь для функций асимптотики в области слева от точки $x_\beta(\varepsilon)$ используем обозначение $(-)$, а справа – $(+)$. Функции $Q_i^{(\pm)}(\xi_\beta,\varepsilon)$ являются решением соответствующих краевых задач для $Q_i^{(\pm)}(\xi,\varepsilon)$, у которых везде функции x^* заменены на x_β, а аргумент ξ – на ξ_β. Функции $q_{\mathfrak{B}}^{(\pm)}(\xi_\beta,\varepsilon)$ необходимы для устранения невязки в уравнении для $Q_{n+3}^{(\pm)}(\xi_\beta,\varepsilon)$, вносимой постоянной γ, и определяются из задач (18). Нижнее решение $\mathfrak{A}_n(x,\varepsilon)$ имеет аналогичную структуру.

Неравенство на оператор проверяется прямым вычислением. Например, проверим его для верхнего решения $\mathfrak{B}_n(x,\varepsilon)$:

$$\varepsilon^2\frac{d^2\mathfrak{B}_n}{dx^2}-\varepsilon^2A(\mathfrak{B}_n,x,\varepsilon)\left(\frac{d\mathfrak{B}_n}{dx}\right)^2-f(\mathfrak{B}_n,x,\varepsilon)=-\varepsilon^{n+3}\bar{f}_u\gamma+O(\varepsilon^{n+4})<0,$$

где черта над функцией означает, что её значение берётся при аргументе $(\varphi^{(\pm)},x_0,0)$.

Неравенства в граничных точках $x=\pm1$ выполняются за счёт модификации погранслойных функций (см., например, [17]), и их проверка здесь не проводится.

Доказательство упорядоченности выполняется совершенно аналогично тому, как это было сделано в работе [21].

Для доказательства теоремы остаётся проверить условие для скачка производной:

$$\varepsilon\left(\frac{\partial\beta_n^{(+)}(x_\beta,\varepsilon)}{\partial x}-\frac{\partial\beta_n^{(-)}(x_\beta,\varepsilon)}{\partial x}\right)=-\varepsilon^{n+3}\left(\frac{dG(x_0)}{dx}\nu+\gamma B(x_0)\right)+O(\varepsilon^{n+4}).$$

Нужный знак скачка производной обеспечивается в силу условия (A4$'$) и выбора достаточно большого $\nu>0$. Таким образом, все необходимые условия известных теорем [22] о дифференциальных неравенствах выполнены. Теорема доказана.

5. Асимптотическая устойчивость решения. Решения задачи (2) можно рассматривать как решения соответствующей начально-краевой параболической задачи на полубесконечном промежутке времени:

$$L_t[v]:=\varepsilon^2\left(\frac{\partial^2v}{\partial x^2}-\frac{\partial v}{\partial t}\right)-\varepsilon^2A(v,x)\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2-f(v,x,\varepsilon)=0,$$

$$(x,t)\in D_{t+}:=\{(x,t)\in\mathbb{R}^2:-1<x<1,\quad 0<t<\infty\},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}(\pm1,t,\varepsilon)=u^{(\pm)},\quad 0<t<\infty,$$

$$v(x,0,\varepsilon)=v^0(x,\varepsilon),\quad -1\leqslant x\leqslant 1. \tag{19}$$

Очевидно, что если $v^0(x,\varepsilon)=u(x,\varepsilon)$, где $u(x,\varepsilon)$ – решение задачи (2), то и задача (19) имеет решение $v(x,t,\varepsilon)=u(x,\varepsilon)$. Исследование его устойчивости основано на асимптотическом методе дифференциальных неравенств [6]. Будем искать верхнее и нижнее решения задачи (19) в виде

$$\alpha(x,t,\varepsilon) = u(x,\varepsilon) + e^{-\lambda(\varepsilon)t}(\alpha_n(x,\varepsilon) - u(x,\varepsilon)), \quad \beta(x,t,\varepsilon) = u(x,\varepsilon) + e^{-\lambda(\varepsilon)t}(\beta_n(x,\varepsilon) - u(x,\varepsilon)),$$

где $\lambda(\varepsilon) > 0$ будет указана ниже. Очевидно, что упорядоченность, неравенства на границе и на скачок в точке x_0 для функций $\beta(x,t,\varepsilon)$, $\alpha(x,t,\varepsilon)$ выполняются в силу того, что $\beta_n(x,\varepsilon)$, $\alpha_n(x,\varepsilon)$ удовлетворяют дифференциальным неравенствам (1), (3), (4), и для проверки классических теорем о дифференциальных неравенствах для параболических систем из [22] достаточно проверить неравенства на оператор: $L_t[\beta] < 0$, $L_t[\alpha] > 0$. Нетрудно получить требуемые неравенства как для некритического, так и для критического случаев. В ходе доказательства нам потребуется

Лемма. *Пусть $u(x,\varepsilon)$ – решение, существование которого утверждает теорема 1. Тогда выполнены следующие оценки:*

$$\left|\frac{\partial(u(x,\varepsilon) - \alpha_n(x,\varepsilon))}{\partial x}\right| = O(\varepsilon^n), \quad \left|\frac{\partial(u(x,\varepsilon) - \beta_n(x,\varepsilon))}{\partial x}\right| = O(\varepsilon^n).$$

Из представлений верхнего и нижнего решений имеют место оценки

$$|U_n(x,\varepsilon) - \alpha_n(x,\varepsilon)| = O(\varepsilon^{n+1}), \quad \left|\frac{\partial(U_n(x,\varepsilon) - \alpha_n(x,\varepsilon))}{\partial x}\right| = O(\varepsilon^n),$$

$$|U_n(x,\varepsilon) - \beta_n(x,\varepsilon)| = O(\varepsilon^{n+1}), \quad \left|\frac{\partial(U_n(x,\varepsilon) - \beta_n(x,\varepsilon))}{\partial x}\right| = O(\varepsilon^n),$$

в силу которых имеем

$$\frac{\partial u(x,\varepsilon)}{\partial x} - \frac{\partial \alpha_n(x,\varepsilon)}{\partial x} = \frac{\partial u(x,\varepsilon)}{\partial x} - \frac{\partial U_n(x,\varepsilon)}{\partial x} + \frac{\partial U_n(x,\varepsilon)}{\partial x} - \frac{\partial \alpha_n(x,\varepsilon)}{\partial x} =$$

$$= \frac{\partial u(x,\varepsilon)}{\partial x} - \frac{\partial U_n(x,\varepsilon)}{\partial x} + O(\varepsilon^n). \tag{20}$$

Аналогично

$$\frac{\partial u(x,\varepsilon)}{\partial x} - \frac{\partial \beta_n(x,\varepsilon)}{\partial x} = \frac{\partial u(x,\varepsilon)}{\partial x} - \frac{\partial U_n(x,\varepsilon)}{\partial x} + O(\varepsilon^n).$$

Таким образом, из формулы (20) следует, что для доказательства леммы необходимо показать близость производной решения и производной асимптотики. Для этого сведём уравнение задачи (2) к нелинейной системе сингулярно возмущённых уравнений первого порядка

$$\varepsilon\frac{dv}{dx} = A(u,x)v^2 + f(u,x,\varepsilon), \quad \varepsilon\frac{du}{dx} = v, \quad u'(\pm 1,\varepsilon) = u^{(\pm)}. \tag{21}$$

Далее приведём результат из работы [1], в которой построена асимптотика и доказано существование решения типа ступенька–всплеск у системы (21) с помощью метода сшивания асимптотических разложений.

Теорема 3. *Если выполнены условия (A1)–(A3), то при достаточно малых ε существует решение $(u(x,\varepsilon), v(x,\varepsilon))$ задачи (21), являющееся контрастной структурой типа ступенька–всплеск, причём имеет место оценка*

$$|U_n(x,\varepsilon) - u(x,\varepsilon)| < C\varepsilon^{n+1}, \quad |V_n(x,\varepsilon) - v(x,\varepsilon)| < C\varepsilon^{n+1}, \quad x \in [-1,1].$$

Из теоремы 3 следует, что

$$\frac{\partial u(x,\varepsilon)}{\partial x} - \frac{\partial U_n(x,\varepsilon)}{\partial x} = O(\varepsilon^n),$$

а значит,

$$\frac{\partial u(x,\varepsilon)}{\partial x} - \frac{\partial \alpha_n(x,\varepsilon)}{\partial x} = O(\varepsilon^n), \quad \frac{\partial u(x,\varepsilon)}{\partial x} - \frac{\partial \beta_n(x,\varepsilon)}{\partial x} = O(\varepsilon^n).$$

Лемма доказана.

Замечание 3. Сформулированный результат леммы остаётся справедливым и в критическом случае:

$$\left|\frac{\partial(u(x,\varepsilon) - \mathfrak{A}_n(x,\varepsilon))}{\partial x}\right| = O(\varepsilon^n), \quad \left|\frac{\partial(u(x,\varepsilon) - \mathfrak{B}_n(x,\varepsilon))}{\partial x}\right| = O(\varepsilon^n).$$

Для доказательства достаточно воспользоваться теоремой существования решения типа ступенька–всплеск для системы (21) в критическом случае, доказанной в статье [2] при выполнении условий (A1), (A2), (A3′), (A4′).

Замечание 4. Отметим, что используемые нами теоремы из [1] и [2] доказаны при краевых условиях Дирихле. Однако не составляет труда провести доказательство и в случае условий Неймана.

Для удобства введём функцию

$$F(z,u,x,\varepsilon) := A(u,x)z^2 + f(u,x,\varepsilon).$$

С учётом обозначения запишем операторы задач

$$L_t[\beta] := \varepsilon^2\frac{\partial^2\beta}{\partial x^2} - \varepsilon^2\frac{\partial\beta}{\partial t} - F\left(\varepsilon\frac{\partial\beta}{\partial x},\beta,x,\varepsilon\right), \quad L_\varepsilon[\beta_n] := \varepsilon^2\frac{d^2\beta_n}{dx^2} - F\left(\varepsilon\frac{d\beta_n}{dx},\beta_n,x,\varepsilon\right).$$

Проверим, например, неравенство $L_t[\beta] < 0$ для верхнего решения:

$$L_t[\beta] := \varepsilon^2\frac{\partial^2\beta}{\partial x^2} - \varepsilon^2\frac{\partial\beta}{\partial t} - F\left(\varepsilon\frac{\partial\beta}{\partial x},\beta,x,\varepsilon\right) = L_\varepsilon[u] + e^{-\lambda(\varepsilon)t}(L_\varepsilon[\beta_n] - L_\varepsilon[u]) + \varepsilon^2\lambda(\beta_n - u_\varepsilon)e^{-\lambda(\varepsilon)t} +$$

$$+\left(F\left(\varepsilon\frac{d\beta_n}{dx},\beta_n,x,\varepsilon\right) - F\left(\varepsilon\frac{du}{dx},u,x,\varepsilon\right)\right)e^{-\lambda(\varepsilon)t} - \left(F\left(\varepsilon\frac{\partial\beta}{\partial x},\beta,x,\varepsilon\right) - F\left(\varepsilon\frac{du}{dx},u,x,\varepsilon\right)\right).$$

В силу построения функции $\beta_n(x,\varepsilon)$, а также учитывая результаты леммы и теоремы 3, верны равенства

$$L_\varepsilon[u] = 0, \quad L_\varepsilon[\beta_n] = -\varepsilon^{n+2}\gamma\bar{f}_u(x) + O(\varepsilon^{n+3}) < 0, \quad |\beta_n - u| = O(\varepsilon^{n+1}), \quad \left|\frac{d\beta_n}{dx} - \frac{du}{dx}\right| = O(\varepsilon^n).$$

Применяя формулу конечных приращений Лагранжа, преобразуем последние две скобки:

$$\left(F\left(\varepsilon\frac{d\beta_n}{dx},\beta_n,x,\varepsilon\right) - F\left(\varepsilon\frac{du}{dx},u,x,\varepsilon\right)\right)e^{-\lambda(\varepsilon)t} - \left(F\left(\varepsilon\frac{\partial\beta}{\partial x},\beta,x,\varepsilon\right) - F\left(\varepsilon\frac{du}{dx},u,x,\varepsilon\right)\right) =$$

$$= (\theta_2 e^{-\lambda(\varepsilon)t} - \theta_1)e^{-\lambda(\varepsilon)t}\left[F^*_{uu}(\beta_n - u)^2 + (F^*_{uz} + F^*_{zu})\varepsilon(\beta_n - u_\varepsilon)\left(\frac{d\beta_n}{dx} - \frac{du}{dx}\right) + F^*_{zz}\varepsilon^2\left(\frac{d\beta_n}{dx} - \frac{du}{dx}\right)^2\right].$$

Здесь под индексом “ $*$ ” мы понимаем, что значения частных производных взяты в некоторой промежуточной точке (не обязательно одинаковой), например,

$$F^*_{zz} = F_{zz}\left(\varepsilon\frac{du}{dx} + \varepsilon\left(\frac{d\beta_n}{dx} - \frac{du}{dx}\right)(\theta_2 e^{-\lambda(\varepsilon)t} + \theta_3(\theta_2 e^{-\lambda(\varepsilon)t} - \theta_1)),\right.$$

$$\left. u + (\beta_n - u)(\theta_2 e^{-\lambda(\varepsilon)t} + \theta_3(\theta_2 e^{-\lambda(\varepsilon)t} - \theta_1))x,\varepsilon\right),$$

где $|\theta_i| < 1$, $i = 1,2,3$. Окончательно имеем

$$L_t[\beta] = e^{-\lambda(\varepsilon)t}(-\varepsilon^{n+2}\gamma\bar{f}_u(x) + O(\varepsilon^{n+3}) + O(\varepsilon^{2n+2}) + \varepsilon^2\lambda(\varepsilon)(\beta_n - u_\varepsilon)) < 0$$

при $n \geqslant 0$ и $\lambda(\varepsilon) = \lambda_0 > 0$ – достаточно малой константе.

Следовательно, в некритическом случае построенное выше решение устойчиво с областью влияния, по крайней мере, $[\alpha_0(x,\varepsilon),\beta_0(x,\varepsilon)]$.

В критическом случае можно провести аналогичные вычисления и получить неравенство

$$L_t[\mathfrak{B}] = e^{-\lambda(\varepsilon)t}(-\varepsilon^{n+3}\gamma\bar{f}_u(x) + O(\varepsilon^{n+4}) + O(\varepsilon^{2n+2}) + \varepsilon^2\lambda(\varepsilon)(\mathfrak{B}_n - u_\varepsilon)) < 0$$

при $n \geqslant 1$ и $\lambda(\varepsilon) = \lambda_0 > 0$.

Итак, построенное выше решение в критическом случае устойчиво с областью влияния, по крайней мере, $[\mathfrak{A}_1(x,\varepsilon),\mathfrak{B}_1(x,\varepsilon)]$.

Таким образом, справедливы следующие теоремы.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия (A1)–(A3). Тогда решение $u(x,\varepsilon)$ задачи (2) асимптотически устойчиво по Ляпунову как решение задачи (19) с областью устойчивости по крайней мере $[\alpha_0(x,\varepsilon),\beta_0(x,\varepsilon)]$, и, следовательно, $u(x,\varepsilon)$ – единственное решение задачи (2) в этой области.*

Теорема 5. *Пусть выполнены условия (A1), (A2), (A3′), (A4′). Тогда решение $u(x,\varepsilon)$ задачи (2) асимптотически устойчиво по Ляпунову как решение задачи (19) с областью устойчивости, по крайней мере, $[\mathfrak{A}_1(x,\varepsilon),\mathfrak{B}_1(x,\varepsilon)]$, и, следовательно, $u(x,\varepsilon)$ – единственное решение задачи (2) в этой области.*

6. Оценка главного собственного значения линеаризованного оператора. Неустойчивость. Рассмотрим задачу Штурма–Лиувилля для линеаризованного на решении $u(x,\varepsilon)$ оператора задачи (2):

$$L_{\mathrm{lin}}[w] := \varepsilon^2\frac{d^2w}{dx^2} - 2\varepsilon^2A(u,x)\frac{du}{dx}\frac{dw}{dx} -$$

$$-\left(\varepsilon^2A_u(u,x)\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + f_u(u,x,\varepsilon)\right)w = \lambda w, \quad x\in(-1,1), \quad w'(\pm1,\varepsilon) = 0.$$

Известно [23], что если главное собственное значение $\lambda_0 > 0$, то решение $u(x,\varepsilon)$ является неустойчивым. Доказательство неустойчивости решения типа контрастной структуры проводится с использованием неупорядоченных верхнего и нижнего решений [24].

Введём функцию $\Psi(x,\varepsilon) = \beta_{\mathrm{ust}}(x,\varepsilon) - \alpha_{\mathrm{ust}}(x,\varepsilon)$, где $\beta_{\mathrm{ust}}(x,\varepsilon)$, $\alpha_{\mathrm{ust}}(x,\varepsilon)$ – верхнее и нижнее решения, полученные в п. 4.1, у которых δ заменена на $-\delta$. Нетрудно показать, что при такой замене на отрезке $x\in[x_0 - C\varepsilon, x_0 + C\varepsilon]$ будет нарушаться упорядоченность верхнего и нижнего решений [24].

Изменим также знак неравенства в условии (A3): $\dfrac{dH}{dx}(x_0) < 0$, обозначение условия при этом оставим прежним.

Рассмотрим сдвиг оператора:

$$L_{\mathrm{shift}}[w] := \varepsilon^2\frac{d^2w}{dx^2} - 2\varepsilon^2A(u,x)\frac{du}{dx}\frac{dw}{dx} - \left(\varepsilon^2A_u(u,x)\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + f_u(u,x,\varepsilon)\right)w - \varkappa\varepsilon w.$$

Выберем параметр $\varkappa > 0$ малым, чтобы выполнялись неравенства

$$L_{\mathrm{shift}}[\Psi] < 0, \quad x\in(-1,1),$$

$$\Psi(x,\varepsilon) < 0, \quad x\in[x_0 - C\varepsilon, x_0 + C\varepsilon],$$

$$\left.\frac{d\Psi}{dx}\right|_{x=x_0+0} - \left.\frac{d\Psi}{dx}\right|_{x=x_0-0} < 0, \quad \Psi'(-1,\varepsilon) \leqslant 0 \leqslant \Psi'(1,\varepsilon).$$

Данные соотношения показывают, что $\Psi(x,\varepsilon)$ – верхнее негладкое решение однородной краевой задачи для оператора L_{shift}.

Используя технику из [24], можно провести процедуру сглаживания и получить гладкую функцию $\Psi^*(x,\varepsilon)$ – верхнее решение однородной краевой задачи, при этом $\Psi^*(x,\varepsilon) \leqslant \Psi(x,\varepsilon)$, $x\in[-1,1]$.

Рассмотрим задачу Штурма–Лиувилля для оператора L_{shift} задачи (2):

$$L_{\text{shift}}[w] = \mu w, \quad x \in (-1,1), \quad w'(\pm 1, \varepsilon) = 0. \tag{22}$$

Нетрудно видеть, что собственные значения задач для операторов L_{lin} и L_{shift} связаны формулой $\lambda = \mu + \varepsilon \varkappa$. Поэтому для доказательства неустойчивости достаточно показать, что $\mu \geqslant 0$. Для этого нам понадобится теорема 2.4 из работы [25], являющаяся следствием теории Крейна–Рутмана.

Теорема 6. *Следующие утверждения эквивалентны:*

1) главное собственное значение задачи (22) $\mu_0 < 0$;

2) любое решение задачи $L_{\text{shift}}[y(x,\varepsilon)] \leqslant 0$, $x \in (-1,1)$, $y'(-1,\varepsilon) \leqslant 0 \leqslant y'(1,\varepsilon)$ *удовлетворяет неравенству* $y(x,\varepsilon) \geqslant 0$.

Покажем, что $\mu_0 \geqslant 0$. Предположим противное: $\mu_0 < 0$. Тогда из того, что $\Psi^*(x,\varepsilon)$ удовлетворяет задаче $L_{\text{shift}}[\Psi^*(x,\varepsilon)] \leqslant 0$, $x \in (-1,1)$, $\Psi^{*\prime}(-1,\varepsilon) \leqslant 0 \leqslant \Psi^{*\prime}(1,\varepsilon)$, последует, что $\Psi^*(x,\varepsilon) \geqslant 0$, $x \in [-1,1]$. Но при этом $\Psi^*(x,\varepsilon) \leqslant \Psi(x,\varepsilon) < 0$, $x \in [x_0 - C\varepsilon, x_0 + C\varepsilon]$. Полученное противоречие доказывает, что $\mu_0 \geqslant 0$, а значит, учитывая связь $\lambda = \mu + \varepsilon\varkappa$, имеет место неравенство $\lambda_0 \geqslant \varkappa\varepsilon$. Из [23] следует, что решение неустойчиво.

Теорема 7. *При выполнении условий (A1)–(A3) при достаточно малых* $\varepsilon > 0$ *стационарное решение* $u(x,\varepsilon)$ *задачи (19), для которого функция* $U_n(x,\varepsilon)$ *является равномерным асимптотическим приближением, неустойчиво.*

Изменим также знак неравенства в условии (A4$'$): $\dfrac{dG}{dx}(x_0) < 0$. Обозначение условия при этом оставим прежним. Аналогичным образом, с использованием неупорядоченных верхнего и нижнего решений, полученных путём замены ν на $-\nu$ из представленных в п. 4.2, можно доказать теорему в критическом случае.

Теорема 8. *При выполнении условий (A1), (A2), (A3$'$), (A4$'$) при достаточно малых* $\varepsilon > 0$ *стационарное решение* $u(x,\varepsilon)$ *задачи (19), для которого функция* $U_n(x,\varepsilon)$ *является равномерным асимптотическим приближением, неустойчиво.*

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 23-11-00069).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Васильева А.Б., Давыдова М.А.* О контрастной структуре типа ступеньки для одного класса нелинейных сингулярно возмущённых уравнений второго порядка // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1998. Т. 38. № 6. С. 938–947.
2. *Давыдова М.А.* Решение типа всплеска и критический случай ступеньки для сингулярно возмущённого уравнения второго порядка // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1998. Т. 39. № 8. С. 1305–1316.
3. *Nefedov N.N., Nikulin E.I., Recke L.* On the existence and asymptotic stability of periodic contrast structures in quasilinear reaction–advection–diffusion equations // Russ. J. of Math. Phys. 2019. V. 26. № 1. P. 55–69.
4. *Нефедов Н.Н., Никулин Е.И.* Существование и асимптотическая устойчивость периодического решения с внутренним переходным слоем в задаче со слабой линейной адвекцией // Моделирование и анализ информ. систем. 2018. Т. 25. № 1. С. 125–132.
5. *Нефедов Н.Н., Никулин Е.И.* Существование и асимптотическая устойчивость периодических двумерных контрастных структур в задаче со слабой линейной адвекцией // Мат. заметки. 2019. Т. 106. № 5. С. 708–722.
6. *Нефедов Н.Н.* Развитие методов асимптотического анализа переходных слоев в уравнениях реакция–диффузия–адвекция: теория и применение // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2021. Т. 61. № 12. С. 2074–2094.
7. *Фэй П.Я., Мин К.Н., Давыдова М.А.* Контрастные структуры в задачах для стационарного уравнения реакция–диффузия–адвекция с разрывной нелинейностью // Мат. заметки. 2018. Т. 104. № 5. С. 759–770.
8. *Nefedov N.N., Nikulin E.I., Orlov A.O.* Existence of contrast structures in a problem with discontinuous reaction and advection // Russ. J. of Math. Phys. 2022. V. 29. № 2. P. 214–224.
9. *Nefedov N.N., Nikulin E.I., Orlov A.O.* Contrast structures in the reaction–diffusion–advection problem in the case of a weak reaction discontinuity // Russ. J. of Math. Phys. 2022. V. 29. № 1. P. 81–90.

10. *Grimson M.J., Barker G.C.* Continuum model for the spatiotemporal growth of bacterial colonies // Phys. Rev. E. 1994. V. 49. № 2. P. 1680–1688.
11. *Davydova M.A., Zakharova S.A.* Multidimensional thermal structures in the singularly perturbed stationary models of heat and mass transfer with a nonlinear thermal diffusion coefficient // J. of Comput. and Appl. Math. 2022. V. 400. № 1. Art. 113731.
12. *Krug J., Spohn H.* Universality classes for deterministic surface growth // Phys. Rev. A. 1988. V. 38. № 8. Art. 4271.
13. *Похожаев С.И.* Об уравнениях вида $\Delta u = f(x, u, Du)$ // Мат. сб. 1980. Т. 113. № 2. С. 324–338.
14. *Муравник А.Б.* Об убывании неотрицательных решений сингулярных параболических уравнений с KPZ-нелинейностями // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2020. Т. 60. № 8. С. 1422–1427.
15. *Муравник А.Б.* О качественных свойствах решений некоторых квазилинейных параболических уравнений, допускающих вырождение на бесконечности // Уфимск. мат. журн. 2018. Т. 10. № 4. С. 77–84.
16. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М., 1990.
17. *Бутузов В.Ф., Васильева А.Б., Нефедов Н.Н.* Асимптотическая теория контрастных структур (обзор) // Автоматика и телемеханика. 1997. № 7. С. 4–82.
18. *Нефедов Н.Н.* Метод дифференциальных неравенств для некоторых классов нелинейных сингулярно возмущённых задач с внутренними слоями // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31. № 7. С. 1132–1139.
19. *Нефедов Н.Н.* Метод дифференциальных неравенств для нелинейных сингулярно возмущённых задач с контрастными структурами типа ступеньки в критическом случае // Дифференц. уравнения. 1996. Т. 32. № 11. С. 1529–1537.
20. *Nefedov N.N., Nikulin E.I.* Existence and stability of periodic contrast structures in the reaction–advection–diffusion problem // Russ. J. of Math. Phys. 2015. V. 22. P. 215–226.
21. *Нефедов Н.Н., Никулин Е.И.* Существование и устойчивость периодических контрастных структур в задаче реакция–диффузия–адвекция в случае сбалансированной нелинейности // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53. № 4. С. 524–537.
22. *Pao C.V.* Nonlinear Parabolic and Elliptic Equations. New York; London, 1993.
23. *Хенри Д.* Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений М., 1985.
24. *Нефедов Н.Н., Орлов А.О.* О неустойчивых контрастных структурах в одномерных задачах реакция–диффузия–адвекция с разрывными источниками // Теор. и мат. физика. 2023. Т. 215. № 2. С. 297–310.
25. *Lopez-Gomez J.* The strong maximum principle. Mathematical analysis on the self-organization and self-similarity // CR Acad. Sci. Paris. 1990. V. 310. P. 49–52.

Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова

Поступила в редакцию 14.06.2023 г.
После доработки 14.06.2023 г.
Принята к публикации 20.07.2023 г.