ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 8, с. 1022–1028

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.925.54

О СВОЙСТВЕ МОНОТОННОСТИ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ОТНОСИТЕЛЬНО НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ

© 2023 г. Л. И. Родина, М. С. Волдеаб

Рассматривается автономная система дифференциальных уравнений $\dot{x} = f(x)$ и решение данной системы $\varphi(t,x)$, удовлетворяющее начальному условию $\varphi(0,x) = x$. Получены достаточные условия, при которых выполнено следующее свойство монотонности решений относительно начальных условий: если значения $x(0) \in \mathbb{R}^n$ и $y(0) \in \mathbb{R}^n$ такие, что $x(0) \leqslant y(0)$, то выполняется неравенство $\varphi(t,x(0)) \leqslant \varphi(t,y(0))$ для любого $t \geqslant 0$. Указанное свойство применяется для исследования задачи оценки средней временно́й выгоды для систем со случайными параметрами, выполненной с вероятностью, равной единице.

DOI: 10.31857/S0374064123080022, EDN: IMXZLD

Введение. Рассмотрим автономную систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x), \tag{1}$$

где $x = (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n$, вектор-функция $f(x)$ и её производные $\partial f_i/\partial x_j$ $(i,j=\overline{1,n})$ непрерывны. Обозначим через $\varphi(t,x) = (\varphi_1(t,x),\ldots,\varphi_n(t,x))$ решение данной системы, удовлетворяющее начальному условию $\varphi(0,x) = x$. Для решения многих прикладных задач желательно, чтобы решения системы (1) обладали следующим свойством монотонности относительно начальных условий.

Свойство А. Пусть $x(0) \in \mathbb{R}^n$ и $y(0) \in \mathbb{R}^n$ такие, что $x(0) \leqslant y(0)$. Тогда имеет место неравенство

$$\varphi(t,x(0)) \leqslant \varphi(t,y(0)) \quad \text{для любого} \quad t \geqslant 0.$$

Здесь и далее неравенство $x \leqslant y$, записанное для векторов $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^n$, будем понимать как неравенства $x_i \leqslant y_i$, $i=\overline{1,n}$. Аналогично $x < y$ означает, что $x_i < y_i$ для всех $i=\overline{1,n}$.

В статье получены условия на функцию $f(x)$, при которых данное свойство выполнено для системы дифференциальных уравнений (1). Показано, что оно справедливо для любого уравнения (1) (т.е. при $n=1$). Приведены примеры моделей взаимодействия двух видов, обладающих свойством монотонности решений. Рассмотрена одна из задач, для исследования которой применяется указанное свойство, – задача оценки средней временно́й выгоды для систем со случайными параметрами, которая выполнена с вероятностью, равной единице.

1. Свойство монотонности решений относительно начальных условий для линейных систем с постоянными коэффициентами. Рассмотрим сначала линейную систему дифференциальных уравнений $\dot{x} = Ax$, где A – постоянная $n \times n$-матрица. Известно, что решение данной системы можно записать в виде $\varphi(t,x) = e^{At}x$, где e^{At} – матричная экспонента. Матрица A называется *экспоненциально неотрицательной*, если $e^{At} \geqslant 0$ для всех $t \geqslant 0$. Матрица A называется *матрицей Метцлера*, если её элементы удовлетворяют неравенствам $a_{ij} \geqslant 0$ при $i \neq j$, $i=\overline{1,n}$ (см. [1]).

Лемма [1]. *Матрица A является экспоненциально неотрицательной тогда и только тогда, когда она является матрицей Метцлера.*

Первоначально данное утверждение, по-видимому, было доказано в работе Т. Важевского [2] в 1950 г. Из леммы очевидно следует, что если A – матрица Метцлера и $x \leqslant y$, то $\varphi(t,x) = e^{At}x \leqslant e^{At}y = \varphi(t,y)$ для любого $t \geqslant 0$. Также отсюда следует, что решение $\varphi(t,x)$ является неотрицательным при любых неотрицательных начальных условиях, т.е. обладает свойством *квазиположительности* (см. [3, с. 34]).

Отметим, что свойство монотонности решений линейных систем имеет широкое применение в математической теории управления [4, 5] и теории линейных функционально-дифференциальных уравнений [6, 7].

2. Свойство монотонности решений относительно начальных условий для нелинейных автономных систем. Условия, при которых справедливо свойство монотонности решений системы (1), исследовались в работе [8]. Ниже получены менее обременительные условия для выполнения данного свойства.

Замечание 1. Отметим, что свойство A выполнено для дифференциального уравнения вида (1). Для этого нужно показать, что при любом фиксированном $t > 0$ функция $x \mapsto \varphi(t,x)$ возрастающая. Действительно, если это не так, то существуют такие x_1 и x_2, $x_1 < x_2$, что $\varphi(t,x_1) \geqslant \varphi(t,x_2)$. Тогда найдётся точка $t_* \in (0,t]$, в которой $\varphi(t_*,x_1) = \varphi(t_*,x_2)$; получили противоречие с условием единственности решений дифференциального уравнения. Однако это свойство выполнено не для любой системы второго порядка и выше.

Напомним, что множество $D \subseteq \mathbb{R}^n$ называется *положительно инвариантным относительно системы* (1), если для любой начальной точки $x(0) \in D$ траектория решения $\varphi(t,x(0))$ содержится в D.

Условие A. Пусть множество $D \subseteq \mathbb{R}^n$ положительно инвариантно относительно системы (1). Каждая из функций f_i является возрастающей на множестве D по всем переменным, от которых она явным образом зависит, за исключением переменной x_i, $i = \overline{1,n}$.

Замечание 2. Если система (1) линейная и выполнено условие A, то матрица A данной системы является матрицей Метцлера.

Теорема 1. *Пусть выполнено условие A. Тогда для значений $x(0) \in D$ и $y(0) \in D$ таких, что $x(0) \leqslant y(0)$, имеет место неравенство $\varphi(t,x(0)) \leqslant \varphi(t,y(0))$ для всех $t \geqslant 0$.*

Доказательство теоремы разделим на две части.

1. Рассмотрим случай, когда $x(0) < y(0)$. Предположим, что утверждение теоремы не верно, тогда существуют $i \in \{1,\ldots,n\}$ и $t_i^* > 0$ такие, что $\varphi_i(t_i^*,x(0)) > \varphi_i(t_i^*,y(0))$. Пусть $I \neq \varnothing$ – множество всех i, для которых выполнено последнее неравенство. Введём функции

$$R_i(t,x,y) \equiv \varphi_i(t,x) - \varphi_i(t,y), \quad i = \overline{1,n},$$

которые непрерывны по t как разность непрерывных функций. Пусть $i \in I$, тогда

$$R_i(0,x(0),y(0)) < 0, \quad R_i(t_i^*,x(0),y(0)) > 0,$$

поэтому для каждого $i \in I$ найдётся $t_i \in (0,t_i^*)$ такое, что $R_i(t_i,x(0),y(0)) = 0$. Пусть

$$\tau_i = \inf\{t \in (0,t_i^*) : R_i(t,x(0),y(0)) = 0\}, \quad \tau = \min_{i \in I}\{\tau_i\}.$$

Из выбора точки τ следует, что $\varphi_i(\tau,x(0)) \leqslant \varphi_i(\tau,y(0))$, причём существуют $i \in \{1,\ldots,n\}$, при которых выполнено строгое неравенство, так как все траектории не могут прийти в одну точку за конечное время. Пусть $I(\tau) \neq \varnothing$ – множество всех i, при которых $\varphi_i(\tau,x(0)) = \varphi_i(\tau,y(0))$, $J(\tau) \equiv \{1,\ldots,n\} \backslash I(\tau)$ – множество всех i, при которых $\varphi_i(\tau,x(0)) < \varphi_i(\tau,y(0))$, $J(\tau) \neq \varnothing$. Поскольку $\tau_i > 0$, то $\tau > 0$.

Перейдём от системы дифференциальных уравнений (1) к интегральным уравнениям

$$\varphi_i(t,x(0)) = x_i(0) + \int\limits_0^t f_i(\varphi(s,x(0)))\,ds, \quad i = \overline{1,n}. \tag{2}$$

Если $i \in I(\tau)$, то $\varphi_i(\tau,x(0)) = \varphi_i(\tau,y(0))$, $x_i(0) < y_i(0)$ и из (2) получаем

$$\int\limits_0^\tau [f_i(\varphi(s,x(0))) - f_i(\varphi(s,y(0)))]\,ds = y_i(0) - x_i(0) > 0. \tag{3}$$

Далее $\varphi_i(\tau-\delta,x(0)) < \varphi_i(\tau-\delta,y(0))$ для любого $\delta\in(0,\tau)$, поэтому в силу (2) выполнено неравенство

$$\int\limits_0^{\tau-\delta}[f_i(\varphi(s,x(0))) - f_i(\varphi(s,y(0)))]\,ds < y_i(0)-x_i(0). \qquad (4)$$

Из (3), (4) следует, что для любого $\delta\in(0,\tau)$ имеет место

$$\int\limits_{\tau-\delta}^{\tau}[f_i(\varphi(s,x(0))) - f_i(\varphi(s,y(0)))]\,ds > 0. \qquad (5)$$

Отметим, что из непрерывности подынтегральной функции следует неравенство

$$f_i(\varphi(\tau,x(0))) \geqslant f_i(\varphi(\tau,y(0))), \quad i\in I(\tau). \qquad (6)$$

Возможны два случая. В первом хотя бы одна из функций f_i, $i\in I(\tau)$, зависит от некоторой переменной x_j, $j\notin I(\tau)$, пусть это будет функция f_k, $k\in I(\tau)$. Тогда $\varphi_i(\tau,x(0)) = \varphi_i(\tau,y(0))$ для всех $i\in I(\tau)$, $\varphi_i(\tau,x(0)) < \varphi_i(\tau,y(0))$ при $i\in J(\tau)$ и из условия A следует $f_k(\varphi(\tau,x(0))) < f_k(\varphi(\tau,y(0)))$. Получили противоречие с (6).

Во втором случае все функции f_i, $i\in I(\tau)$, не зависят от переменных x_i, $i\in J(\tau)$. Тогда

$$\varphi_i(\tau,x(0)) = \varphi_i(\tau,y(0)) \quad \text{для всех} \quad i\in I(\tau), \qquad (7)$$

и можем выделить из исходной системы (1) отдельную подсистему, в которую входят только уравнения с x_i, $i\in I(\tau)$. Поэтому из (7) следует равенство

$$\varphi_i(t,x(0)) = \varphi_i(t,y(0)) \quad \text{для всех} \quad t\in\mathbb{R}, \quad i\in I(\tau),$$

из которого получаем $f_i(\varphi(s,x(0))) - f_i(\varphi(s,y(0))) \equiv 0$, $i\in I(\tau)$, что противоречит (5).

2. Пусть $x_i(0)=y_i(0)$ при $i\in I(0)$ и $x_i(0)<y_i(0)$ при $i\in J(0)\equiv\{1,\ldots,n\}\setminus I(0)$; здесь $I(0)$ – любое непустое подмножество $\{1,\ldots,n\}$, множество $J(0)$ может быть пустым. Определим последовательность точек $\{y^k\}_{k=1}^\infty$ пространства $\mathbb{R}^n$ таким образом, что

$$y_i^{k+1} > y_i^k > y_i(0) = x_i(0),$$

$$\lim_{k\to\infty} y_i^k = y_i(0) \quad \text{при} \quad i\in I(0) \quad \text{и} \quad y_i^k = y_i(0) \quad \text{при} \quad i\in J(0), \quad k\in\mathbb{N}.$$

Тогда $\lim\limits_{k\to\infty} y^k = y(0)$ и $x(0) < y^k$, $k\in\mathbb{N}$. Из первой части доказательства следует, что $\varphi(t,x(0)) < \varphi(t,y^k)$ для всех $t\in[0,d]$, $k\in\mathbb{N}$. Переходя к пределу при $k\to\infty$ в последнем неравенстве и используя свойство непрерывности функции $\varphi(t,x)$ по совокупности переменных, получаем, что

$$\varphi(t,x(0)) \leqslant \lim_{k\to\infty}\varphi(t,y^k) = \varphi(t,y(0)) \quad \text{для всех} \quad t\geqslant 0.$$

Теорема доказана.

3. Модели взаимодействия двух видов, обладающие свойством монотонности решений. Модели взаимодействия двух видов в классификации Е. Одума подробно описаны в книге Г.Ю. Ризниченко [9, с. 143–157]. Пусть численности видов равны x_1 и x_2, тогда данные модели могут быть описаны системой уравнений

$$\dot x_1 = a_1x_1 + b_{12}x_1x_2 - c_1x_1^2, \quad \dot x_2 = a_2x_2 + b_{21}x_1x_2 - c_2x_2^2. \qquad (8)$$

Здесь параметры $a_i>0$ – постоянные собственной скорости роста видов, $c_i>0$ – постоянные самоограничения численности (внутривидовой конкуренции), b_{ij} – постоянные взаимодействия видов, $i,j=1,2$. Знаки коэффициентов b_{ij} определяют тип взаимодействия.

Отметим, что свойством монотонности решений обладают, конечно, не все модели вида (8); данное свойство выполнено для таких моделей, как симбиоз (в этом случае $b_{12} > 0,\ b_{21} > 0$), комменсализм $(b_{12} > 0,\ b_{21} = 0)$ и нейтрализм $(b_{12} = 0,\ b_{21} = 0)$. Если хотя бы один из коэффициентов b_{ij} отрицательный, то свойство монотонности будет выполнено не для всех решений системы (8); это относится к таким моделям как хищник–жертва, конкуренция и аменсализм.

Замечание 3. Если для линейной системы (1) выполнено условие квазиположительности, то матрица A системы является матрицей Метцлера. Для нелинейной системы из условия квазиположительности не следует свойство монотонности решений. Например, условие квазиположительности имеет место для всех моделей взаимодействия двух видов, но свойство монотонности не выполняется для моделей хищник–жертва, конкуренция и аменсализм.

4. Условия монотонности решений системы по части начальных условий. Предположим, что в системе (1) найдётся подсистема из m уравнений, которая зависит только от переменных $\widetilde{x} = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$, где $1 \leqslant m \leqslant n-1$. Пусть данная подсистема имеет вид

$$\dot{\widetilde{x}} = g(\widetilde{x}), \quad \widetilde{x} \in \mathbb{R}^m. \tag{9}$$

В силу теоремы 1 если условие A выполнено для системы (9), то решение $\widetilde{\varphi}(t,x)$ этой системы монотонно по всем начальным условиям $\widetilde{x}(0) \in \mathbb{R}^m$; следовательно, решение $\varphi(t,x)$ системы (1) монотонно по части начальных условий $\widetilde{x}(0) \in \mathbb{R}^m$.

Примером системы, обладающей свойством монотонности по части начальных условий, для моделей взаимодействия двух видов является система, описывающая модель аменсализма. Напомним, что при взаимодействии типа аменсализм в системе (8) выполнены условия $b_{12} = 0,\ b_{21} < 0$. Тогда первое уравнение этой системы имеет вид $\dot{x}_1 = a_1x_1 - c_1x_1^2$ (не зависит от переменной x_2), и система (8) обладает свойством монотонности по начальному условию $x_1(0)$.

5. Оценки средней временно́й выгоды, выполненные с вероятностью единица. В данном пункте продолжаются рассуждения из работ [10, 11], в которых описываются вопросы оптимального сбора ресурса из стохастической популяции, заданной дифференциальным уравнением (1) (случай $n=1$). Здесь мы рассматриваем модели динамики структурированной популяции, заданные системой уравнений, зависящей от случайных параметров (случай $n>1$). Предполагаем, что при отсутствии эксплуатации развитие популяции описывается системой (1), а в моменты времени $\tau(k) = kd,\ d>0$, из популяции извлекается некоторая случайная доля ресурса

$$\omega(k) = (\omega_1(k), \ldots, \omega_n(k)) \in \Omega \subseteq [0,1]^n, \quad k \in \mathbb{N},$$

что приводит к резкому (мгновенному) уменьшению его количества. Ресурс $x \in \mathbb{R}^n_+$ является неоднородным, т.е. либо состоит из отдельных видов $x_1,\ \ldots,\ x_n$, либо разделён на n возрастных групп. Отметим, что в данной работе в скобках мы обозначаем временны́е, а нижними индексами – пространственные параметры; например, через $\omega_i(k)$ обозначается доля ресурса i-го вида, извлеченного из популяции в момент kd.

Пусть имеется возможность остановить процесс сбора, если доли извлеченного ресурса для одного или нескольких видов окажутся достаточно большими (не меньше, чем заданные значения $(u_1(k), \ldots, u_n(k)) = u(k) \in [0,1]^n$ в момент kd). В этом случае определённая часть ресурса сохраняется с целью увеличения размера следующего сбора, и доля добываемого ресурса будет равна

$$\ell(k) = (\ell_1(k), \ldots, \ell_n(k)) \in [0,1]^n, \quad \text{где} \quad \ell_i(k) = \min\{\omega_i(k), u_i(k)\}, \quad i = \overline{1,n}.$$

Таким образом, рассматривается эксплуатируемая популяция, динамика которой задана управляемой системой со случайными параметрами

$$\dot{x}_i = f_i(x), \quad t \neq kd, \quad x_i(kd) = (1 - \ell_i(k))x_i(kd-0), \tag{10}$$

где $x_i(kd-0)$ и $x_i(kd)$ – количество ресурса i-го вида до и после сбора в момент kd соответственно, $i=\overline{1,n}$, $k\in\mathbb{N}$. Предполагаем, что решения системы (10) непрерывны справа.

Приведём описание *вероятностной модели,* заданной управляемой системой (10). Пусть задано вероятностное пространство $(\Omega,\widetilde{\mathfrak{A}},\widetilde{\mu})$, где $\Omega\subseteq[0,1]$, $\widetilde{\mathfrak{A}}$ – сигма-алгебра подмножеств Ω, на которой определена вероятностная мера $\widetilde{\mu}$. Рассмотрим множество последовательностей $\Sigma\equiv\{\sigma:\sigma=(\omega(1),\ldots,\omega(k),\ldots)\}$, где $\omega(k)=(\omega_1(k),\ldots,\omega_n(k))\in\Omega\subseteq[0,1]^n$, $k\in\mathbb{N}$. Обозначим через $\mathfrak{A}$ наименьшую сигма-алгебру, порождённую цилиндрическими множествами

$$E_k\equiv\{\sigma\in\Sigma:\omega(1)\in A(1),\ldots,\omega(k)\in A(k)\},\quad\text{где}\quad A(j)\in\widetilde{\mathfrak{A}},\quad j=\overline{1,k},$$

и определим меру $\widetilde{\mu}(E_k)=\widetilde{\mu}(A(1))\cdots\widetilde{\mu}(A(k))$. Тогда в силу теоремы А.Н. Колмогорова на измеримом пространстве $(\Sigma,\mathfrak{A})$ существует единственная вероятностная мера μ, которая является продолжением меры $\widetilde{\mu}$ на сигма-алгебру $\mathfrak{A}$.

Пусть $X_i(k)=x_i(kd-0)$ – количество ресурса i-го вида до сбора в момент kd, $k\in\mathbb{N}$, зависящее от долей ресурса $\ell(1),\ \ldots,\ \ell(k-1)$, собранного в предыдущие моменты времени и начального количества $x(0)$; $C_i\geqslant 0$ – стоимость ресурса i-го вида. Тогда общая стоимость собранного ресурса равна $Y(k)=\sum_{i=1}^n C_iX_i(k)\ell_i(k)$. Для любого $x(0)\in\mathbb{R}^n_+$ рассмотрим функцию, введённую в статье [10]:

$$H_*(\overline{\ell},x(0))\equiv\varliminf_{k\to\infty}\frac{1}{k}\sum_{j=1}^k Y(j)=\varliminf_{k\to\infty}\frac{1}{k}\sum_{j=1}^k\sum_{i=1}^n C_iX_i(j)\ell_i(j),\tag{11}$$

которая называется *средней временнóй выгодой* от извлечения ресурса. Если предел (11) существует, будем обозначать его $H(\overline{\ell},x(0))$.

В данной работе получены оценки функции (11), выполненные с вероятностью единица, для структурированной популяции в случае $n>1$. Описан способ добычи ресурса для режима сбора на бесконечном промежутке времени, при котором постоянно сохраняется некоторая часть популяции, необходимая для её дальнейшего восстановления.

Рассматриваем эксплуатируемую популяцию, заданную системой (10). Пусть $x(k)$ равно количеству ресурса после сбора в момент τ_k, тогда

$$X(k+1)=\varphi(d,x(k))\quad\text{и}\quad x(k)=(1-\ell(k))X(k).$$

Если $\ell_i(k)=u_i$ для всех $k\in\mathbb{N}$, то $X(k)$ удовлетворяет разностному уравнению

$$X(k+1)=\varphi(d,(1-u)X(k)),\quad k\in\mathbb{N}.\tag{12}$$

Обозначим через $S(u)=(S_1(u),\ldots,S_n(u))$ неподвижную точку уравнения (12), тогда $S(u)=$ $=\varphi(d,(1-u)S(u))$. Пусть $s(u)\equiv(1-u)S(u)$; отметим, что

$$s_i(u)=(1-u_i)S_i(u),\quad \varphi_i(d,s(u))=S_i(u),\quad i=\overline{1,n}.$$

Рассмотрим случайные величины $\ell_i(k)=\min\{\omega_i(k),u_i\}$, $i=\overline{1,n}$, $k\in\mathbb{N}$, и обозначим через $M\ell_i=M\ell_i(k)$ их математическое ожидание.

Теорема 2. *Пусть выполнено свойство А. Тогда если* $x(0)\geqslant s(u)$, *то для почти всех* $\sigma\in\Sigma$ *справедлива оценка*

$$H_*(\overline{\ell},x(0))\geqslant\sum_{i=1}^n C_iS_i(u)M\ell_i.$$

Доказательство. Напомним, что через $X_i(k)$ и $x_i(k)$ обозначены количества ресурса i-го вида до сбора и после сбора в момент kd; тогда $x_i(k)=(1-\ell_i(k))X_i(k)$, $k\in\mathbb{N}$.

По свойству А если $x_i(0)\geqslant s_i(u)$, то $X_i(1)=\varphi_i(d,x(0))\geqslant\varphi_i(d,s(u))=S_i(u)$, $i=\overline{1,n}$. Из неравенств $\ell_i(k)\leqslant u_i$ получаем

$$x_i(1)=(1-\ell_i(1))X_i(1)\geqslant(1-u_i)X_i(1)\geqslant(1-u_i)S_i(u)=s_i(u),\quad i=\overline{1,n}.$$

Далее $X_i(2) = \varphi_i(d, x(1)) \geqslant \varphi_i(d, s(u)) = S_i(u)$. Аналогично получаем, что $X_i(k) \geqslant S_i(u)$ для всех $k \in \mathbb{N}$, $i = \overline{1,n}$. Дальнейшее доказательство следует из усиленного закона больших чисел Колмогорова и определения средней временно́й выгоды.

Пример. Рассмотрим модель взаимодействия двух видов типа симбиоз:

$$\dot{x}_1 = ax_1 + bx_1x_2 - cx_1^2, \quad \dot{x}_2 = ax_2 + bx_1x_2 - cx_2^2, \tag{13}$$

где $a > 0$, $c > b > 0$. Найдём оценку средней временно́й выгоды в предположении, что случайные величины $\omega_i(k)$, $i = 1,2$, $k \in \mathbb{N}$, имеют равномерное распределение на отрезке $[0,1]$.

Отметим, что если функция распределения F случайной величины $\omega_i(k)$ абсолютно непрерывна, то математическое ожидание $\ell_i(k)$ равно

$$M\ell_i(k) = \int\limits_0^u tf(t)\,dt + u(1 - F(u)), \quad i = \overline{1,n}, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{14}$$

где через f обозначена плотность данного распределения (см. [10]). Поскольку $\omega_i(k)$, $i = 1,2$, $k \in \mathbb{N}$, имеют равномерное распределение на отрезке $[0,1]$, то их плотность $f(t) = 1$ при $t \in \in [0,1]$ и функция распределения $F(t) = t$, $t \in [0,1]$. Таким образом, из (14) следует, что

$$M\ell_i(k) = u_i - \frac{u_i^2}{2}, \quad i = 1,2, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{15}$$

Решением системы (13), удовлетворяющим начальному условию $x_1(0) = x_2(0)$, является функция $\varphi(t, x(0)) = (\varphi_1(t, x(0)), \varphi_2(t, x(0)))$, где

$$\varphi_1(t, x(0)) = \varphi_2(t, x(0)) = \frac{ax_1(0)e^{at}}{a + (c-b)x_1(0)(e^{at} - 1)}, \quad t \geqslant 0.$$

Пусть $u_1 = u_2 = u < 1 - e^{-ad}$, тогда уравнение (12) имеет неподвижную положительную точку с координатами

$$S_1(u) = S_2(u) = \frac{a(e^{ad}(1-u) - 1)}{(c-b)(1-u)(e^{ad} - 1)}.$$

В силу теоремы 2 и равенства (15) получаем, что при $x_i(0) \geqslant s_i(u) = (1-u)S_i(u)$, $i = 1,2$, для почти всех $\sigma \in \Sigma$ имеет место оценка

$$H_*(\overline{\ell}, x(0)) \geqslant \frac{a(C_1 + C_2)(e^{ad}(1-u) - 1)}{(c-b)(1-u)(e^{ad} - 1)}\left(u - \frac{u^2}{2}\right), \quad \text{где} \quad u < 1 - e^{-ad}.$$

В заключении отметим, что свойство монотонности решений систем относительно начальных условий можно применить для оценки других характеристик сбора ресурса, одной из которых является суммарный доход от эксплуатации популяции с учётом дисконтирования [12].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Noutsos D., Tsatsomeros M.J.* Reachability and holdability of nonnegative states // SIAM J. on Matrix Anal. and Appl. 2008. V. 30. № 2. P. 700–712.
2. *Wazewski T.* Systemes des equations et des inegalites differentieles ordinaires aux deuxiemes membres monotones et leurs applications // Ann. de la Societe Polonaise de Math. 1950. V. 23. P. 112–166.
3. *Кузенков О.А., Рябова Е.А.* Математическое моделирование процессов отбора. Нижний Новгород, 2007.
4. *Zaslavsky B.G.* Eventually nonnegative realization of difference control systems // Dynamical Systems and Related Topics. Adv. Ser. Dynam. Systems. V. 9. New Jersey, 1991. P. 573–602.
5. *Angeli D., Sontag E.D.* Monotone control systems // IEEE Trans. Automat. Control. 2003. V. 48. № 10. P. 1684–1698.

6. *Домошницкий А.И.* О покомпонентной применимости теоремы Чаплыгина к системе линейных дифференциальных уравнений с запаздыванием // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26. № 10. С. 1699–1705.
7. *Agarval R.P., Domoshnitsky A.* On positivity of several components of solution vector for systems of linear functional differential equations // Glasgow Math. J. 2010. V. 52. P. 115–136.
8. *Мастерков Ю.В., Родина Л.И.* Оценка средней временно́й выгоды для стохастической структурированной популяции // Изв. Ин-та математики и информатики Удмуртского гос. ун-та. 2020. Т. 56. С. 41–49.
9. *Ризниченко Г.Ю.* Лекции по математическим моделям в биологии. Ч. 1. Ижевск, 2002.
10. *Родина Л.И.* Оптимизация средней временной выгоды для вероятностной модели популяции, подверженной промыслу // Вестн. Удмуртского ун-та. Математика. Механика. Компьют. науки. 2018. Т. 28. № 1. С. 48–58.
11. *Родина Л.И.* Свойства средней временной выгоды в стохастических моделях сбора возобновляемого ресурса // Вестн. Удмуртского ун-та. Математика. Механика. Компьют. науки. 2018. Т. 28. № 2. С. 213–221.
12. *Rodina L.I., Hammadi A.H.* Optimization problems for models of harvesting a renewable resourse // J. of Math. Sci. 2020. V. 25. № 1. P. 113–122.

Владимирский государственный университет
имени А.Г. и Н.Г. Столетовых,
Национальный исследовательский
технологический университет “МИСиС”

Поступила в редакцию 15.06.2023 г.
После доработки 15.06.2023 г.
Принята к публикации 20.07.2023 г.